

# WGS MEDEDELINGEN

ORGAAN VAN DE WERKGROEP GEWAPEND BETON- EN STAALCONSTRUCTIES

T.N.O.

Redacteur Ir. A. L. Bouma, Postbus 49, Delft

JAARGANG 1

NO. 3

OCTOBER 1953

## DE AFLEIDING VAN EEN DIFFERENTIAALVERGELIJKING VOOR CIRKELCYLINDRISCHE SCHALEN

De analytische berekening van schaaldaken is naar veler idee nog een buitengewoon moeizame en omvangrijke procedure. De theorie van Dischinger (1935), die als eerste een strenge oplossing heeft gegeven voor de buigingstheorie van cirkelcyllindrische schalen, heeft terecht velen afgeschrikt.

Maar het is wel interessant, dat ook voor dit gebied geldt, wat Wästlund<sup>1)</sup> in het algemeen zegt van de ontwikkeling van de theoretische wetenschappen t.w.: „Its history has been characterised by a progress both from less to more and from more to less. Thus, the way from less to more is indicated by new discoveries about materials and structures, the way from more to less by still more generalised laws and principles, and by the simplification of calculation methods.” Dit laatste zal aan de hand van een zeer korte afleiding van een differentiaalvergelijking voor cilindrische schalen worden toegelicht.

Formeel heeft Dischinger het probleem tot een oplossing gebracht. De uitwerking van zijn methode is echter een vrijwel ondoenlijk werk en alleen mogelijk voor een gespecialiseerde firma<sup>2)</sup>, beschermd door een patent.

Ofschoon de ontwikkeling van de cirkelcyllindrische schalen tot die tijd voor-

### Notaties:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$  specifieke rekken van het middenvlak in respectievelijk de  $x$ - en de  $y$ -richting.

$\gamma_{xy}$  specifieke hoekverdraaiing in het middenvlak.

$E$  de elasticiteitsmodulus van de schaal.

$t$  de dikte van de schaal.

$D = Et$  de rekstijfheid.

$K = \frac{1}{12} Et^3$  de buigingsstijfheid.

$\Delta$  de operator  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

$\alpha_n = (2n + 1) \frac{\pi}{L}$

$\beta_n = \sqrt{\frac{3\alpha_n^4}{R^2 t^2}}$

$\gamma_n = \frac{\alpha_n^2}{\beta^2}$ .

<sup>1)</sup> G. Wästlund: Influence of modern research on structural design. Building Research Congress, Division 1, 1951.

<sup>2)</sup> Dyckerhoff-Widmann. A.G.

namelijk in Duitsland heeft plaats gevonden, komen nieuwere ontwikkelingen en vereenvoudigingen sindsdien voornamelijk van Scandinavische zijde (Aas-Jacobsen, Eggwertz, Lundgren), Amerikaanse zijde (Schorer, Donnell, v. Karman) en na de oorlog ook van Engelse zijde (Jenkins).

De te behandelen vergelijking is het eerst door Donnell (lit. 1) afgeleid voor de bepaling van de stabiliteit van cylinders bij wringing. Jenkins (lit. 3) past de vergelijking het eerst toe bij de berekening van schaaldaken, maar gebruikt hierbij verder matrixrekening, wat weinig aantrekkelijk lijkt en niet essentieel is. Von Karman c.s. (lit. 2) breiden de vergelijking uit voor het gebied boven de stabiliteitsgrens, dus in het niet-lineaire gebied, voor het bestuderen van plooiverschijnselen.

Het essentiële van de methode is, dat consequent alle onbelangrijke termen worden geschrapt, waardoor men komt tot een zeer simpele, overzichtelijke differentiaal-vergelijking.

We baseren ons op de gebruikelijke aannamen in de theorie van platen, die of loodrecht op, of in hun vlak worden belast.

Bij de afleiding verwaarlozen we de contractie-coëfficiënt om der wille van de eenvoud en de overzichtelijkheid. De afleiding, waarbij de contractie-coëfficiënt wel in rekeing wordt gebracht, verloopt volkomen analoog.

De afmetingen van de schaal, de coördinaten, verplaatsingscomponenten, belastingscomponenten, spanningskrachten en momenten per  $\text{cm}^2$  zijn in de figuren 1 t/m 5 gegeven. De vormveranderingsgroottheden  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  en  $\gamma_{xy}$  kunnen we als volgt in de verplaatsingsgroottheden uitdrukken:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \dots \dots \dots \text{1a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \dots \dots \dots \text{1b}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \dots \dots \dots \text{1c}$$

De vergelijkingen 1a en c zijn dezelfde als bij een vlakke spanningstoestand en behoeven geen toelichting. In vergelijking 1b treedt een extra term op.

Immers de vezel  $dy$  wordt niet alleen een bedrag  $\frac{\partial v}{\partial y} dy$  langer, doch door de radiale verplaatsing  $w$  (positief naar binnen) ook een bedrag  $w d\varphi = w \frac{dy}{R}$  korter (zie fig. 6).

De rek in deze richting bedraagt dus:

$$\varepsilon_y = \left( \frac{\partial v}{\partial y} dy - w \frac{dy}{R} \right) : dy.$$

Wanneer we nu de spanningskrachten m.b.v. de wet van Hooke uitdrukken

# CIRKELCYLINDRISCHE SCHAAL

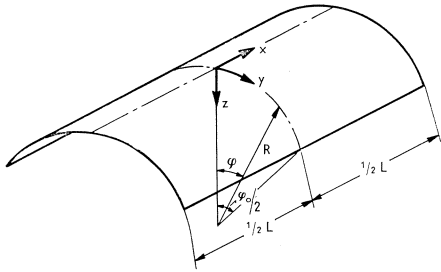


Fig. 1 Coördinaten

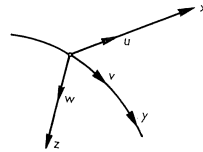


Fig. 2. Verplaatsingen u, v en w

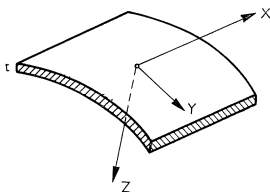


Fig. 3. Belastingcomponenten

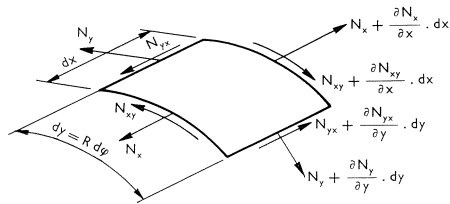


Fig. 4. „Vlakke” spanningskrachten  
De spanningen t.g.v. hiervan bedragen:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} \quad \sigma_y = \frac{N_y}{t} \quad \tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{t}$$

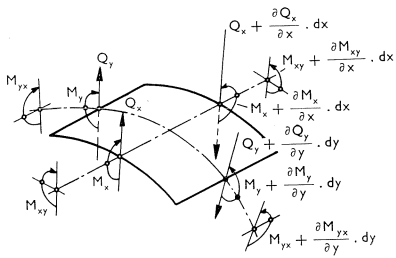


Fig. 5. Momenten en dwarskrachten

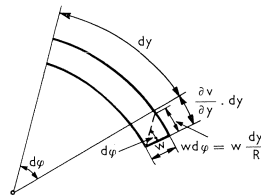


Fig. 6. Bepaling van  $\epsilon_y$

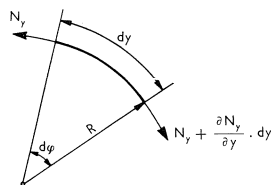


Fig. 7. Radiale component van  $N_y$

in de vormveranderingsgrootheden, dan vinden we de volgende betrekkingen tussen spanningskrachten en verplaatsingen:

$$N_x = D \frac{\partial u}{\partial x} \dots \dots \dots 2a$$

$$N_y = D \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) \dots \dots \dots 2b$$

$$N_{xy} = \frac{D}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dots \dots \dots 2c$$

Hierin stelt  $D$  de rekstijfheid voor:  $D = Et$  ( $E =$  elasticiteitsmodulus,  $t =$  dikte van de schaal).

Evenzo definiëren we de buigingsstijfheid  $K = \frac{Et^3}{12}$ .

De buigende momenten en dwarskrachten definiëren we op dezelfde wijze als in de elementaire plaattheorie gebruikelijk is:

$$M_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots \dots \dots 3a$$

$$M_y = -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots \dots \dots 3b$$

$$M_{xy} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots \dots \dots 3c$$

$$Q_x = -K \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \dots \dots \dots 3d$$

$$Q_y = -K \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) \dots \dots \dots 3e$$

Ter afkorting hebben we de operator:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  ingevoerd.

We stellen nu de vergelijkingen, die het probleem beheersen, op. In de eerste plaats de evenwichtsvergelijkingen in  $x$  en  $y$  richting:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X = 0 \dots \dots \dots 4a$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y = 0 \dots \dots \dots 4b$$

Deze vergelijkingen zijn dezelfde als bij een vlakke spanningstoestand in platen of in de membraantheorie van de schalen.

De momentenvoorwaarden om  $y$ -as en  $x$ -as luiden:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \dots\dots\dots 5a$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \dots\dots\dots 5b$$

Uit deze vergelijkingen volgen m.b.v. de formules 3a, b, c de uitdrukkingen 3d, e voor  $Q_x$  en  $Q_y$ . De vergelijkingen 5a, b worden dus verder niet gebruikt.

De evenwichtsvoorwaarde in radiale ( $z$ -) richting luidt:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{N_y}{R} + Z = 0 \dots\dots\dots 6a$$

De derde term is de radiale component van  $N_y$  (zie fig. 7), die dus eigenlijk een extra belasting van het elementje vormt.

Men zou kunnen opmerken dat in vergelijking 4b om dezelfde reden nog een term  $\frac{Q_y}{R}$  zou moeten voorkomen. Een nadere beschouwing leert echter, dat deze term een grootte-orde kleiner is dan de overige en dus te verwaarlozen is.

Substitutie van de formules 3d, e voor  $Q_x$  en  $Q_y$  in vergelijking 6a levert de volgende vergelijking:

$$-K \Delta \Delta w + \frac{N_y}{R} + Z = 0 \dots\dots\dots 7$$

De afleiding van deze formule is volkomen analoog aan die van de plaat-vergelijking. Vergelijking (7) ware dus ook direct op te schrijven wanneer men bedenkt, dat aan de belastingterm  $Z$  een extra term  $\frac{N_y}{R}$  dient te worden toegevoegd.

De momentenvoorwaarde om de  $z$ -as levert een identiteit.

De vierde vergelijking, nodig voor het bepalen van de vier onbekenden  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  en  $w$  is de compatibiliteitsvoorwaarde in het vlak van de schaal. De afleiding hiervan verloopt volkomen analoog met die van de vergelijking van Airy, met dien verstande, dat hier een extra term t.g.v. de radiale verplaatsing  $w$  dient te worden toegevoegd.

Differentiëren we vergelijking 2a twee maal naar  $y$ :

$$D \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_x,$$

differentiëren we vergelijking 2b twee maal naar  $x$ :

$$D \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_y + \frac{D}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w,$$

en differentiëren we vergelijking 2c eenmaal naar  $x$  en eenmaal naar  $y$ :

$$D \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{xy}, \text{ dan vinden we dus:}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} N_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_y - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{xy} + \frac{D}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w = 0 \quad \dots \dots \dots 8$$

De vergelijkingen 4a, b, 7 en 8 beheersen dus het gehele probleem. Door eliminatie kan men tot een enkele vergelijking in één der onbekenden komen. De oplossing van een dergelijke differentiaal-vergelijking bestaat uit een particuliere integraal en de oplossing van de gereduceerde vergelijking.

Wanneer de belasting continu verloopt kan men voor de particuliere integraal ook de membraanoplossing gebruiken. In het buigingsprobleem heeft men dan dus niet meer met de belastingstermen te maken, doch uitsluitend met de gereduceerde vergelijking, die aan bepaalde randvoorwaarden moet voldoen.

In de vergelijkingen 4a, b en 7 laten we dus nu de belastingstermen  $X$ ,  $Y$  en  $Z$  weg.

Voeren we de spanningsfunctie  $F$  in, waarvoor geldt:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad N_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

dan wordt aan de vergelijkingen 4a, b identiek voldaan.

De vergelijkingen 7 en 8 gaan over in:

$$- K R \Delta \Delta w + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad \dots \dots \dots 9$$

$$\Delta \Delta F + \frac{D}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w = 0 \quad \dots \dots \dots 10$$

Vergelijking 9 is dus de uitgebreide plaatvergelijking, vergelijking 10 de uitgebreide vergelijking van Airy. Bij vlakke platen zijn de beide spannings-toestanden onafhankelijk van elkaar op te lossen, waarna door superpositie het totale spanningsbeeld kan worden verkregen.

Bij schalen is dit dus niet het geval en zijn de spanningstoestanden aan elkaar gekoppeld. Elimineren we nu bijvoorbeeld de spanningsfunctie  $F$  door op vergelijking 9 tweemaal de operator  $\Delta$  toe te passen en op vergelijking 10 de operator  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , dan volgt de differentiaalvergelijking van de achtste orde in  $w$ , die het gehele schaalprobleem beheerst:

$$K \cdot R \cdot \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{D}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad \dots \dots \dots 11a$$

$$\text{of} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^4 w + \frac{12}{R^2 t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad \dots \dots \dots 11b$$

Met dwarscontractie  $\nu$  en belastingstermen luidt de vergelijking:

$$K \cdot R \cdot \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{D}{R} (1 - \nu^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^3}{\partial x^3} X - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} X + \\ + (2 + \nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} Y + \frac{\partial^3}{\partial y^3} Y - R \Delta \Delta Z = 0 \dots \dots \dots 12$$

De eerste term stelt de „plaatwerking” voor, de tweede de „schaalwerking” (langsdracht). Is de straal  $R = \infty$  (vlakke plaat) en de belastingstermen  $X$  en  $Y = 0$ , dan gaat de vergelijking weer in de plaatvergelijking over.

Passen we voor alle grootheden in  $x$ -richting een ontwikkeling in Fourierreeksen toe, dan kunnen we de algemene oplossing van vergelijking (11) schrijven in de vorm:

$$w = A \cdot e^{-\beta \sigma y} \cos \alpha_n x \dots \dots \dots 13$$

hierin is  $\alpha_n = (2n + 1) \frac{\pi}{L}$ ;  $4\beta^8 = \frac{12}{R^2 t^2} \alpha_n^4$  en  $\gamma_n = \frac{\alpha_n^2}{\beta^2}$

De karakteristieke vergelijking luidt dan:

$$(\beta^2 \varrho^2 - \alpha_n^2)^4 + \frac{12}{R^2 t^2} \cdot \alpha_n^4 = 0.$$

ofwel

$$(\varrho^2 - \gamma)^4 + 4 = 0 \dots \dots \dots 14$$

De complexe wortels van deze vergelijking zijn direct uit te schrijven.

Als  $\varrho = \sigma + i\tau$ , dan is

$$\sigma_1 = \left( \frac{(1 + (1 + \gamma)^2)^{1/2} + (1 + \gamma)}{2} \right)^{1/2}; \quad \tau_1 = \frac{1}{2\sigma_1}$$

$$\sigma_2 = \left( \frac{(1 + (1 - \gamma)^2)^{1/2} - (1 - \gamma)}{2} \right)^{1/2}; \quad \tau_2 = \frac{1}{2\sigma_2}.$$

De algemene oplossing van de differentiaal-vergelijking 11 luidt dus:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ e^{-\beta \sigma_1 y} \left( A_{11} \cos \frac{\beta y}{2\sigma_1} + A_{12} \sin \frac{\beta y}{2\sigma_1} \right) + e^{+\beta \sigma_1 y} \left( A_{13} \cos \frac{\beta y}{2\sigma_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + A_{14} \sin \frac{\beta y}{2\sigma_1} \right) + e^{-\beta \sigma_2 y} \left( A_{21} \cos \frac{\beta y}{2\sigma_2} + A_{22} \sin \frac{\beta y}{2\sigma_2} \right) + \right. \\ \left. + e^{+\beta \sigma_2 y} \left( A_{23} \cos \frac{\beta y}{2\sigma_2} + A_{24} \sin \frac{\beta y}{2\sigma_2} \right) \right] \cos \alpha_n x \dots \dots \dots 15$$

Met behulp van de formules 2, 3, 4 en 7 kunnen de verplaatsingen  $u$  en  $v$ , de momenten en de spanningen worden bepaald, door differentiatie van de formules voor  $w$ .

De uitdrukkingen blijven dan steeds analoog aan formule 15, en de nieuwe constanten  $A$  kunnen m.b.v. recurrente betrekkingen uit de oorspronkelijke worden afgeleid.

$$\text{B.v. voor} \quad \frac{\partial^n w}{\partial y^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ e^{-\beta \sigma_1 y} \left( A_{11}^{(n)} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_1} + \dots \right) \right]$$

$$\text{waarin} \quad A_{11}^{(n)} = -\beta \sigma_1 A_{11}^{(n-1)} + \frac{\beta}{2 \sigma_1} A_{12}^{(n-1)} \quad \text{enz. enz.}$$

$$\text{en voor} \quad \Delta A w = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ e^{-\beta \sigma_1 y} \left( \bar{A}_{11} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_1} + \dots \right) \right]$$

$$\text{waarin} \quad \bar{A}_{11} = -2 \beta^4 A_{12} \quad \text{enz. enz.}$$

Bij een aan de uiteinden vrij opgelegde schaal is door de ontwikkeling in cosinusreeksen aan de randvoorwaarden aldaar automatisch voldaan.

Voor de bepaling van de acht constanten  $A$  beschikt men over vier randvoorwaarden aan elke lange zijde. Bij symmetrische schalen is het voldoende één zijde te beschouwen en kan men stellen  $A_{11} = + A_{13}$  enz. Men houdt dan slechts vier constanten over.

In andere gevallen kan men meestal volstaan de beide gedempte trillingen die van één zijde uitgaan te beschouwen en aan te nemen dat deze vóór ze de overzijde bereiken, reeds zijn uitgestorven. Dan beschouwt men slechts de helft van de vergelijking 15 met de negatieve  $e$ -machten en de constanten  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ .

Aan de rand kunnen voorwaarden bestaan voor de verplaatsingen  $u, v$  en  $w$  en de hoekverdraaiing  $\chi$  en de krachten  $N_{xy}, N_y, R_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$  en het moment  $M_y$ .

Vier voorwaarden zijn dus noodzakelijk en voldoende langs een rand.

Het aansluitingsprobleem voor een schaal met of zonder randbalken komt dus altijd neer op het oplossen van een stelsel van 4 lineaire vergelijkingen in de onbekende constanten  $A$ . Dit blijft voor alle analytische berekeningsmethoden nog het sluitstuk van de berekening, waaraan nog niet te ontkomen valt.

#### LITERATUUR

1. Donnell, L. H.: Stability of thin-walled tubes under torsion, National Advisory Committee on Aeronautics, Report no 479 (1933)
2. von Karman, T and Tsien, H. S.: The buckling of thin cylindrical shells under axial compression, Journal of the Aeronautical Sciences, 1941, Vol. 8, bl. 303 e.v.
3. Jenkins, R. S.: Theory and design of cylindrical shell structures. London, The O.N. Arup Group of Consulting Engineers, 1947.
4. Mc Namee, J. J.: Existing Methods for the Analysis of concrete Shell roofs. Symposium on concrete shell roof construction, 2—4 Juli, 1952, no 4.