

MODELLEN VAN POLYSTYREENSCHUIM

U.D.C. 624.001.57:678.746.22-496.8

Het artikel behandelt de vervaardiging en beproeving van modellen van polystyreenschuim, een elastisch materiaal met een zeer gering volumegegewicht en een zeer lage elasticiteitsmodulus. Het materiaal biedt typische mogelijkheden, staat snel en voldoende nauwkeurig werk toe, maar vereist een aparte meettechniek. De meetapparatuur en de nauwkeurigheid van de meting worden uitvoerig behandeld. Tenslotte volgt een korte beschrijving van enkele uitgevoerde metingen en wordt ingegaan op de modelregels, nodig voor de interpretatie van de meetresultaten.

0 Inleiding

Bij modelonderzoeken wordt de keuze van het modelmateriaal en de meetmethodiek bepaald door de aard van de gegevens die men wenst te verkrijgen. Vervaardigt men een model van hetzelfde materiaal als de oorspronkelijke constructie, of tracht men dit in zijn eigenschappen zo goed mogelijk na te bootsen, dan zullen de verschijnselen zich op analoge wijze voordoen als in werkelijkheid. Men kan dan eveneens uitsluitsel verkrijgen over eventuele scheurvorming of vloeiverschijnselen en de wijze van bezwijken. In vele gevallen zal men het model echter vervaardigen van een „ideaal” materiaal, waaronder wordt verstaan een homogeen, elastisch, isotroop materiaal dat voldoet aan de Wet van Hooke. Men kan een dergelijk model beschouwen als een zeer doeltreffend werkende rekenmachine, die voor een bepaald geval resultaten levert die zijn gebaseerd op de elasticiteitstheorie.

Sinds enkele jaren wordt bij het Instituut als „ideaal” materiaal ook gebruik gemaakt van polystyreenschuim, waarmee ingewikkelde modellen snel kunnen worden vervaardigd. Voorts kan het model gemakkelijk worden gewijzigd, zodat de constructeur ook variantoplossingen van het probleem aan het model kan toetsen.

Het grote voordeel van het polystyreenschuim ligt in de zeer lage waarde van de elasticiteitsmodulus, tengevolge waarvan de meeste belastingen door middel van kleine gewichtjes kunnen worden aangebracht, zodat men geen belastingapparatuur behoeft op te bouwen. Fig. 1 geeft hiervan een duidelijk voorbeeld; op de rechterhelft van het balkon wordt een gelijkmatig verdeelde belasting aangebracht d.m.v. kleine boutjes. Worden de belastingen gevormd door vloeistof- of korreldrukken, dan kan men in het model nog goed meetbare vervormingen verkrijgen door een belasting aan te brengen met water, resp. een korrelachtig materiaal. De vervormingen t.g.v. het eigen gewicht van de constructie kan men bepalen door het model in delen gesplitst te denken en in de zwaartepunten hiervan krachtjes te laten aangrijpen die evenredig zijn met

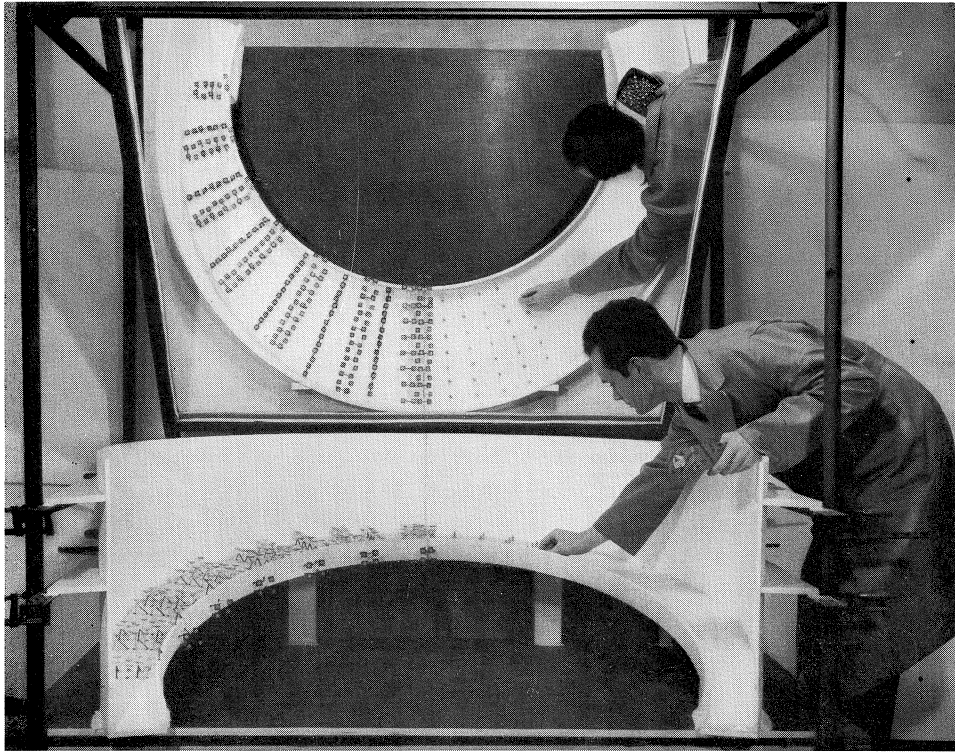


Fig. 1. Het belasten van een model. Zelfs bij deze geringe belasting bedragen de waarden van de hoekverdraaiing en de rek in het model ongeveer het drievoudige van die in de werkelijke constructie.

de volumes van de desbetreffende delen. Bij ingewikkelde modellen is dit echter zeer omslachtig. Het is dan doelmatiger het model onderstboven in water onder te dompelen. De opwaartse kracht van het water grijpt dan op dezelfde wijze aan als de zwaartekracht en veroorzaakt aanzienlijke vervormingen.

De lage waarde van de elasticiteitsmodulus is echter tevens de oorzaak dat het meten van de vervormingen niet met de gebruikelijke meetmethoden plaats kan vinden. Rekstrookjes b.v. veroorzaken plaatselijk grote verstijvingen, terwijl alle meetinstrumenten die door de waarnemer op het model worden geplaatst tengevolge van de druk van de hand verstoringen veroorzaken. Om deze reden is een optische meetmethode ontwikkeld, die bovengenoemde bezwaren niet vertoont. De vervormingen van de constructie worden hierbij met behulp van spiegeltjes waargenomen (zie fig. 1).

In sommige gevallen kan men echter door een model met de hand of een gewicht te belasten reeds een indruk van de krachtswerking of de stijfheid verkrijgen, daar de vervormingen duidelijk zichtbaar zijn. In dit laatste geval behoeven geen hoge eisen aan het materiaal en de afwerking van het model te worden gesteld, zodat men b.v. reeds tijdens een bespreking een eenvoudig

model kan laten vervaardigen, waaruit waardevolle indicaties kunnen worden verkregen. Ook voor aanschouwelijk onderricht zal men met vrucht van eenvoudige modellen gebruik kunnen maken.

In de volgende hoofdstukken worden de vervaardiging van de modellen en de eigenschappen van het materiaal besproken en wordt nader ingegaan op de meetinstrumenten en de nauwkeurigheid van de metingen. Tenslotte wordt een overzicht gegeven van de meest gebruikte modelregels en worden enkele karakteristieke modelproeven kort besproken om een indruk van de mogelijkheden te geven.

1 Polystyreenschuim

1.1 Materiaal en vervaardiging

In 1950 werd door de Badische Anilin & Sodafabrik A.G. een procédé ontwikkeld om polystyreen (synoniem: polystyrol) het vermogen tot zwellen te geven. Deze stof werd door de BASF styropor genoemd. Het materiaal wordt in korrelvorm aan de industrie geleverd. Daar worden de korrels in heetwaterbaden of door middel van stoom tot een zekere mate van expansie gebracht die afhankelijk is van de duur van de verhitting. De gedeeltelijk geëxpandeerde korrels worden vervolgens in stalen vormen gestort, waarin stoom onder overdruk wordt geblazen, waardoor de korrels verder uitzetten en aanéén kitten. Er ontstaat zo een materiaal, dat 3 tot 6 miljoen gesloten cellen per liter bevat en dat voor circa 98% uit lucht bestaat. Het volumegewicht bedraagt 15–30 kgf/m³. Het materiaal wordt voornamelijk voor isolatiedoeleinden toegepast en wordt onder verschillende handelsnamen¹⁾ aangeboden. De maximale afmetingen van de in Nederland vervaardigde blokken bedragen $3,5 \times 1 \times 0,5$ m³.

Naarmate bij het eerste procédé de korrels minder worden voorgeëxpandeerd kunnen de stalen vormen met meer materiaal worden gevuld en nemen het volumegewicht en de elasticiteitsmodulus van de vervaardigde blokken toe. De normale blokken van handelskwaliteit bezitten echter een aanzienlijke inhomogeniteit, die wordt veroorzaakt door het niet even groot zijn van de voorgeëxpandeerde korrels en door het van buitenaf inbrengen van de stoom in de stalen vormen. Slechts door geselecteerd materiaal toe te passen en grote zorg aan de vervaardiging van een blok te besteden, kan de homogeniteit zo zeer worden verbeterd, dat het materiaal als modelmateriaal geschikt is, mits de buitenste laag van de blokken niet wordt gebruikt.

1.2 Verwerking

Het materiaal kan worden gesneden, gezaagd en gefraisd. Voor de vervaardiging van modellen is de meest geschikte methode het snijden van het materiaal door middel van een weerstandsdraad van circa 0,4 mm dikte, die wordt verwarmd door een stroomsterkte van 4 à 5 A bij een regelbaar potentiaal-

¹⁾ o.a. tempex, polycel, rhenacell, frigolit, poleuxiet.

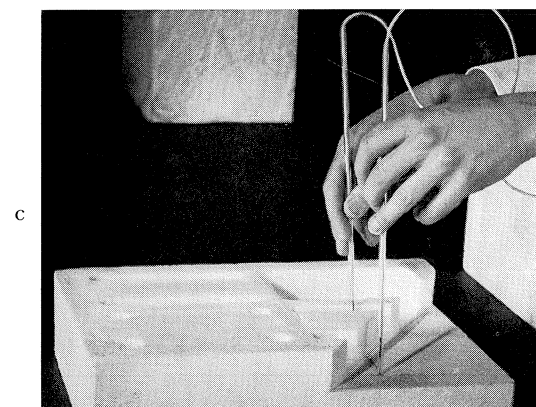
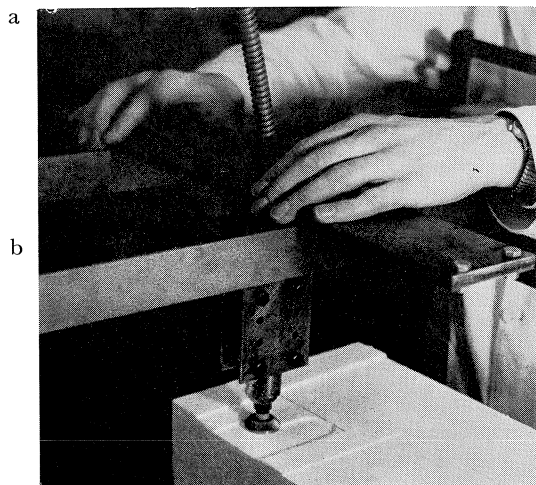
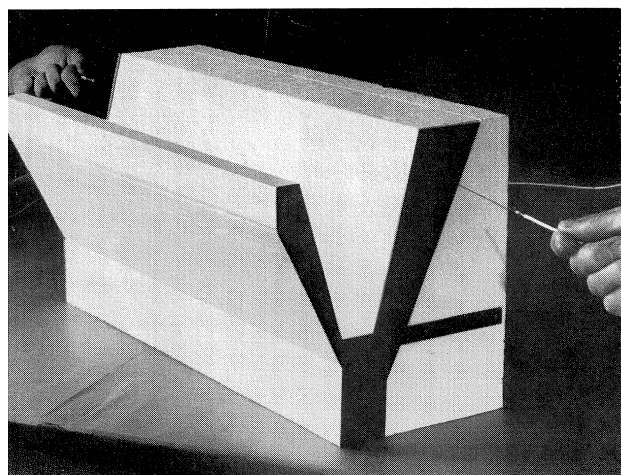


Fig. 2. Bewerken van het polystyreenschuim.
a. Snijden met een weerstandsdraad. b. Fraisen. c. Snijden via glazen buisjes.

verschil, dat circa 20 V per m' weerstandsdraad bedraagt. Door deze draad langs twee mallen of rijen met constante snelheid voort te bewegen, smelt het materiaal en verkrijgt men een snede van ongeveer 1 mm (zie fig. 2a). Op deze wijze zijn zeer snel modellen of gedeelten van modellen te vervaardigen met een ingewikkelde dwarsdoorsnede, die constant blijft over de lengte (zie b.v. fig. 30 en 33).

Gaten en sleuven in een model kunnen door fraisen worden verkregen, terwijl op deze wijze ook platen zeer vlak kunnen worden afgewerkt (zie fig. 2b). Ingewikkelde modellen, zoals in fig. 31, die men uit één stuk wil vervaardigen, verkrijgt men door eerst enkele gaten tot de juiste diepte te boren en vervolgens de weerstandsdraad via glazen buisjes te geleiden (zie fig. 2c).

Door gebruik te maken van een weerstandsdraad kunnen ook op eenvoudige wijze regelvlakken worden vervaardigd. Om een constante dikte te verkrijgen is echter grote nauwkeurigheid vereist. De dikte van de regelvlakken zal minstens 4 mm moeten bedragen (zie b.v. fig. 35).

In het algemeen zal men het model niet uit één stuk kunnen vervaardigen, zodat men de verschillende onderdelen aan elkaar moet bevestigen. Vrijwel alle in de handel verkrijgbare lijmsoor-

ten blijken echter ongeschikt te zijn. Sommige lijmnaden laten grote vervormingen toe bij belasting, andere bezitten een te grote stijfheid of lossen het polystyrenschuim op.

Het meest geschikte verbindingsmiddel blijkt te bestaan uit minerale was, die in vloeibare vorm tussen de samen te stellen delen wordt aangebracht en na afkoeling een hechte verbinding vormt. Deze wasnaad is bij belasting vrijwel niet onderhevig aan kruip, terwijl breuk van de proefstukken buiten de wasnaad optreedt. Met een föhn kan warme lucht op het model worden geblazen, waardoor de overtollige was smelt en gemakkelijk kan worden verwijderd. De samengevoegde delen kunnen op dezelfde wijze zonder beschadiging weer worden losgemaakt.

1.3 Eigenschappen van het polystyrenschuim en de minerale wassoorten

Het globale verband tussen de elasticiteitsmodulus en het volumegewicht van polystyrenschuim is weergegeven in fig. 3. In fig. 4 is het σ - ϵ -diagram weergegeven van polystyrenschuim met een volumegewicht $\gamma = 27 \text{ kgf/m}^3$. Dit diagram is bepaald met behulp van een vierpuntsbuigproef; het verband tussen σ en ϵ blijkt tot een spanning van $0,2$ à $0,3 \text{ kg/cm}^2$ vrijwel rechtlijnig te zijn; ook bij hogere spanningen zijn de afwijkingen echter gering. Uit trek- en wringproeven volgt eveneens een

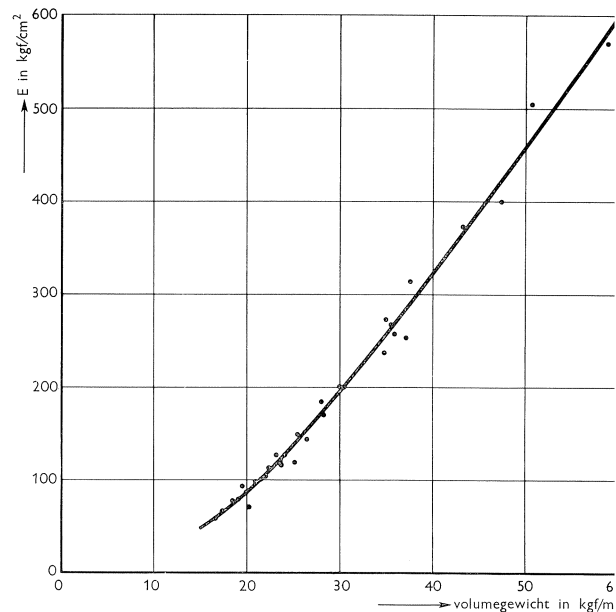
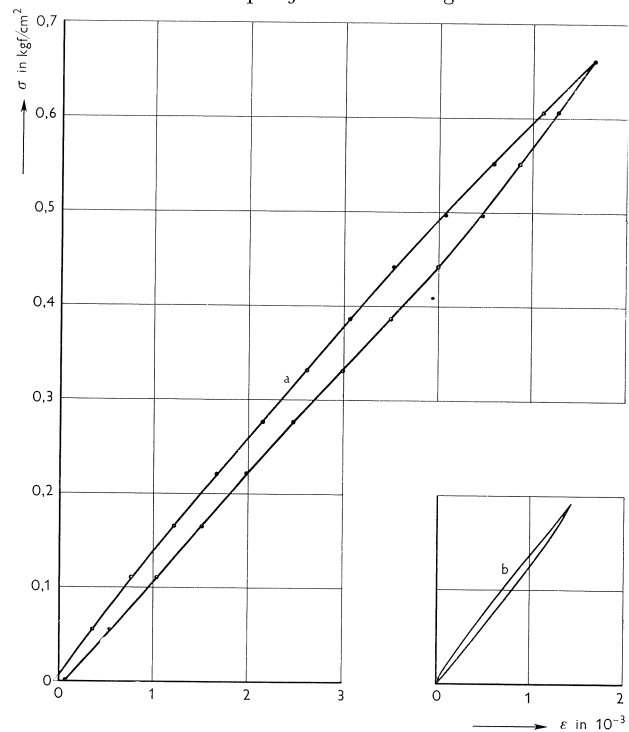


Fig. 3. Elasticiteitsmodulus van polystyrenschuim als functie van het volumegewicht.

Fig. 4. σ - ϵ -diagram van polystyrenschuim.
a. verloop bij éénmaal belasten en ontlasten;
b. verloop bij wisselbelasting.



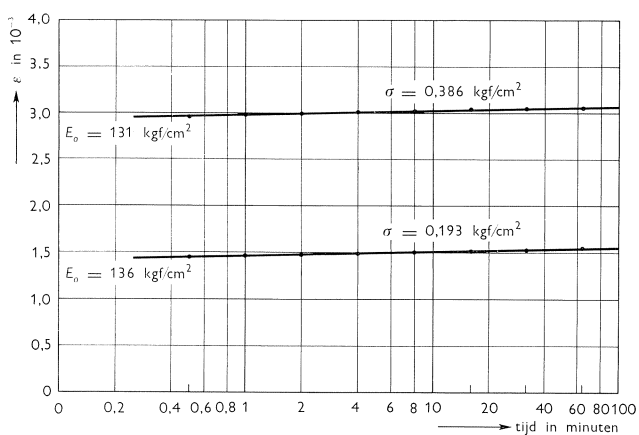


Fig. 5. Toeneming van de vervorming van het polystyreenschuim bij constante belasting.

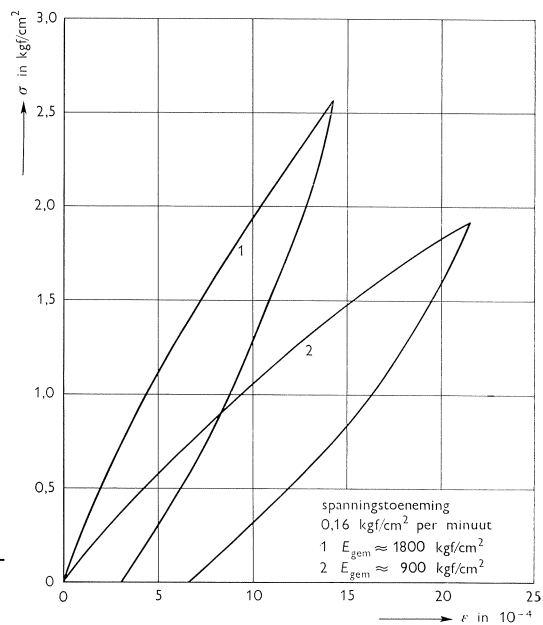


Fig. 6. σ - ϵ -diagrammen van twee minerale wassoorten. (1. witte was; 2. gele was).

vrijwel volkomen rechtlijnig verband bij niet te hoge spanningen. Indien men een dergelijk balkje één of tweemaal voorbelast, blijkt het diagram de volgende malen steeds dezelfde hysteresislus van fig. 4b te doorlopen. De waarde van de contractiecoëfficiënt varieert nogal bij verschillende proefbalkjes en -plaatjes en ligt tussen 0,20 en 0,38. In fig. 5 is het verloop van de rek weergegeven bij constante belasting als functie van de logaritme van de tijd; dit verband is praktisch rechtlijnig.

In fig. 6 zijn ter illustratie de globale σ - ϵ -diagrammen van 2 minerale wassoorten weergegeven. De plastische vervormingen zijn aanzienlijk. In fig. 7 is de vervorming van de was bij constante belasting als functie van de tijd weergegeven; de kruip blijkt eveneens aanzienlijk te zijn. Ter vergelijking is ook een van de kruiplijnen van het polystyreenschuim ingetekend ($\sigma = 0,193 \text{ kgf/cm}^2$).

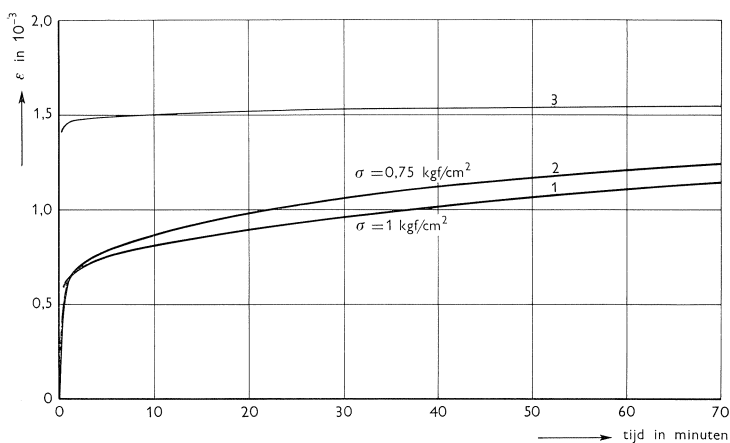


Fig. 7. Toeneming van de vervorming van de minerale wassoorten bij constante belasting.
1. witte was.
2. gele was.
3. polystyreenschuim.

De elasticiteitsmoduli en de kruip van de beide wassoorten zijn dus aanzienlijk groter dan die van het polystyreenschuim. Een dunne wasnaad tussen het polystyreenschuim blijkt de vervormingen echter vrijwel niet te beïnvloeden.

De smeltpunten van de wassoorten bedragen 76 °C voor de witte was en 66 °C voor de gele was. Bij het verwerken dient men er rekening mede te houden, dat het polystyreenschuim niet bestand is tegen hogere temperaturen dan ca. 75 °C (kortstondig ca. 100 °C). Verder wordt polystyreenschuim aangetaast door minerale oliën, benzine, benzol, terpentijn, ether, chloorkoolwaterstoffen en esters. Het polystyreenschuim verouderd niet en blijkt ongevoelig voor kleine temperatuurverschillen tijdens een proef. Bij onderdompeling in water vertoont het polystyreenschuim geen volumeverandering; de wateropneming bedraagt i.h.a. minder dan 2 volume-procent.

Als laatste punt dient de homogeniteit van het materiaal te worden besproken. Ondanks de grote vooruitgang die reeds is verkregen, komen toch steeds weer blokken voor die te grote afwijkingen vertonen. Aan de verkrijging van een meer constante kwaliteit wordt gewerkt. Het is echter noodzakelijk steeds voldoende steekproeven te nemen, hetgeen zeer eenvoudig kan geschieden door enkele extra platen uit te snijden, welke zich direct naast gedeelten hebben bevonden, waaruit het model is opgebouwd. In extreme gevallen kan men dus een verlopende elasticiteitsmodulus invoeren.

2 Meetmethodiek

2.1 Algemeen

Zoals reeds vermeld kunnen de gebruikelijke meetmethoden voor polystyreenschuim niet worden toegepast. De afneembare mechanische rek- en krommingsmeters moeten door de waarnemer op het model worden geplaatst waardoor grote vervormingen in het materiaal ontstaan die de meetresultaten vertroebelen. De vaste rek- en krommingsmeters belemmeren het materiaal sterk in de vervorming of bezitten een te grote meetlengte. Rekstrookjes zijn onbruikbaar daar het polystyreenschuim te veel wordt verstijfd door de papieren drager van het rekstrookje. Bovendien tasten de gebruikelijke rekstrookjes-lijmsoorten het polystyreenschuim aan. Elektrische krommingsmeters zijn niet toe te passen, daar het materiaal geen hard en volkomen vlak oppervlak bezit. De moirémethode is dus eveneens niet mogelijk.

Springlakken, b.v. van gedistilleerd colofonium, zijn in principe wel mogelijk; het verkrijgen van een goede springlak van constante kwaliteit levert nog moeilijkheden op.

Bij modellen van polystyreenschuim wordt derhalve gebruik gemaakt van de spiegelreflectiemethode. De krommingen worden afgeleid uit de hoekverdraaiingen van de constructie die met behulp van spiegeltjes worden gemeten. De lengteveranderingen worden gemeten met behulp van speciaal ontwikkelde spiegelrekmetertjes, waarbij rekken worden omgezet in hoekverdraaiingen.

Het principe om hoekverdraaiingen en lengteveranderingen langs optische weg te meten, is uiteraard reeds lang in diverse meetinstrumenten toegepast. Het typerende van de spiegelreflectiemethode – gebaseerd op de aligneer methode van VAN HEEL ¹⁾ – is echter, dat het snijpunt van een lichtstraal met een scherm nauwkeurig kan worden vastgelegd door gebruik te maken van een puntvormige lichtbron en een speciaal soort spiegel tjes (zoneplaatjes) zonder verdere optische hulpmiddelen. Bij de gebruikelijke optische apparatuur daarentegen wordt de lichtstraal gefixeerd door middel van een kijker met kruisdraad, waardoor men via een spiegel tje een schaalverdeling moet aflezen met alle nadelen van dien (scherpstellen van de kijker, beperkte grootte van de hoekverdraaiing, die liefst alleen in één bepaalde richting moet optreden, gevoelig voor verplaatsingen van de kijker).

De spiegelreflectiemethode berust op een interferentieverschijnsel van het licht.²⁾ Om dit toe te lichten, kan het gemakkelijkst worden uitgegaan van de proef van Young (zie fig. 8a). Een puntvormige lichtbron A beschijnt een vrij

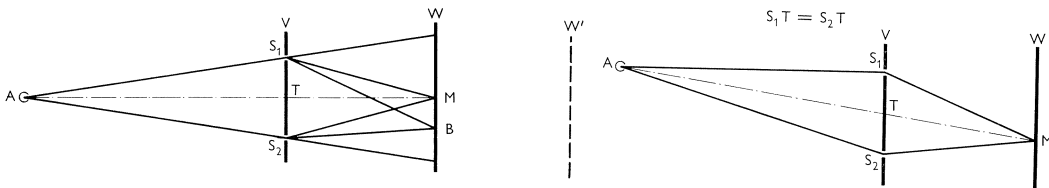


Fig. 8a.

Interferentie van het licht.

Fig. 8b.

ver verwijderd scherm V met twee smalle spleten S. Volgens het principe van HUYGENS kan elke spleet weer als een nieuwe coherente ³⁾ lichtbron worden beschouwd. Deze bronnen zijn volkomen in fase als $AS_1 = AS_2$ dus $AT \perp V$. In punt B van vlak W komen lichtgolven samen die een faseverschil hebben, dat overeenkomt met het verschil in weglengte tussen S_1B en S_2B . De lichtgolven versterken elkaar indien het verschil in weglengte gelijk is aan een geheel aantal golflengten, en verzwakken elkaar indien dit verschil een oneven aantal halve golflengten bedraagt. Er ontstaat zo een systeem van donkere en lichte banden bij monochromatisch licht en van gekleurde banden bij gebruik van wit licht. Alleen in punt M is de band wit daar hier voor alle golflengten versterking optreedt. In het algemene geval zullen de secundaire lichtbronnen S_1 en S_2 niet in fase zijn maar wel coherent; alleen voor punt M zijn de optische lichtwegen gelijk, zodat hier weer een witte band ontstaat (zie fig. 8b).

¹⁾ VAN HEEL, A.C.S., Modern alignment devices. Progress in optics, vol. 1. North Holland Publishing Company, Amsterdam 1961.

²⁾ Zie b.v. LIEM, S. H., Optische precisie metingen op civiel- en werktuigkundig gebied in de praktijk. De Ingenieur no. 8 februari 1961.

³⁾ Lichtbronnen heten coherent indien het uitgezonden licht op overeenkomstige tijdstippen dezelfde fase en amplitude heeft; de beide lichtbronnen moeten dus getrouwe copieën van elkaar zijn. Dit is slechts te bereiken door uit te gaan van één lichtbron en hiervan met optische hulpmiddelen twee of meer fictieve lichtbronnen te vormen.

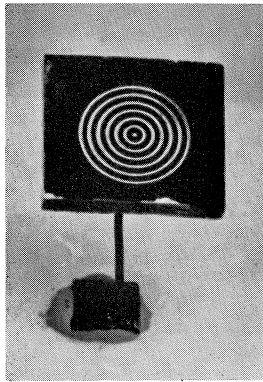
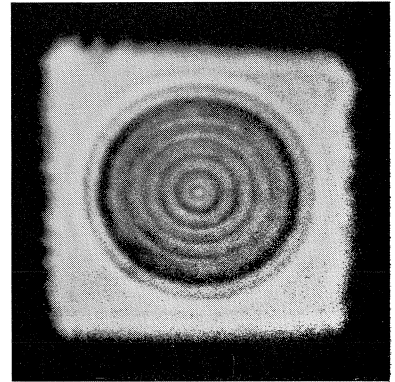


Fig. 9. Zoneplaatje.

Afbeelding op
het scherm.

Wijze van
bevestigen.



Het voorgaande geldt slechts exact als $AT = TM$. Indien $AT \neq TM$ geldt dit echter met goede benadering, daar deze beide afstanden veel groter zijn dan de afstand S_1S_2 tussen de spleten. In de praktijk blijkt de ligging van het interferentiecentrum ongevoelig te zijn voor verdraaiing van vlak V . In plaats van twee rechte spleten kan men ook meerdere cirkelvormige spleten gebruiken (zoneplaat) en de enkele spleet A vervangen door een klein cirkelvormig gaatje. Bij gebruik van wit licht ontstaat een wit centrum met een aantal gekleurde concentrische ringen. Vervangt men de cirkelvormige spleten nu door spiegellende ringen, dan treedt precies hetzelfde verschijnsel op, maar ontstaat het beeld op het vlak W' aan dezelfde zijde van de zoneplaat als de puntvormige lichtbron. Plaast men hier een matglazen scherm dan kan het centrum van het interferentieverschijnsel nauwkeurig worden aangetekend (zie fig. 9 en 11).

Als lichtbron kan gebruik worden gemaakt van een spiegelcondensorlamp, die een ellipsoïdevormige reflector bezit welke een vrij scherp brandpunt vormt. In dit brandpunt wordt een diafragma geplaatst met een diameter van 1 mm, hetgeen klein genoeg is om voldoende coherent licht te verkrijgen. Een aanmerkelijk grotere helderheid wordt verkregen door een kwiklamp toe te passen en een brandpunt te formeren door middel van een condensor.

Als zoneplaatjes worden glasplaatjes gebruikt waarin aequidistante cirkels zijn geslepen. Deze plaatjes worden aan de voorzijde veraluminiseerd. De geslepen zones verstrooien het licht, de onbewerkte zones weerspiegelen het licht en vervullen dus de functie van de spleten. In het vervolg zullen de zoneplaatjes steeds als spiegeltjes worden aangeduid (zie fig. 9). De spiegeltjes worden instelbaar gemaakt door deze via een dun koperdraadje van ca. 3 cm lengte aan een klein koperen plaatje te bevestigen. Deze koperen plaatjes worden met behulp van gips of was op het model bevestigd. Het draadje wordt nu zodanig verbogen, dat de teruggekaatste lichtstraal op het scherm valt.

Ondergaat het model een hoekverdraaiing φ dan zal het spiegeltje eveneens

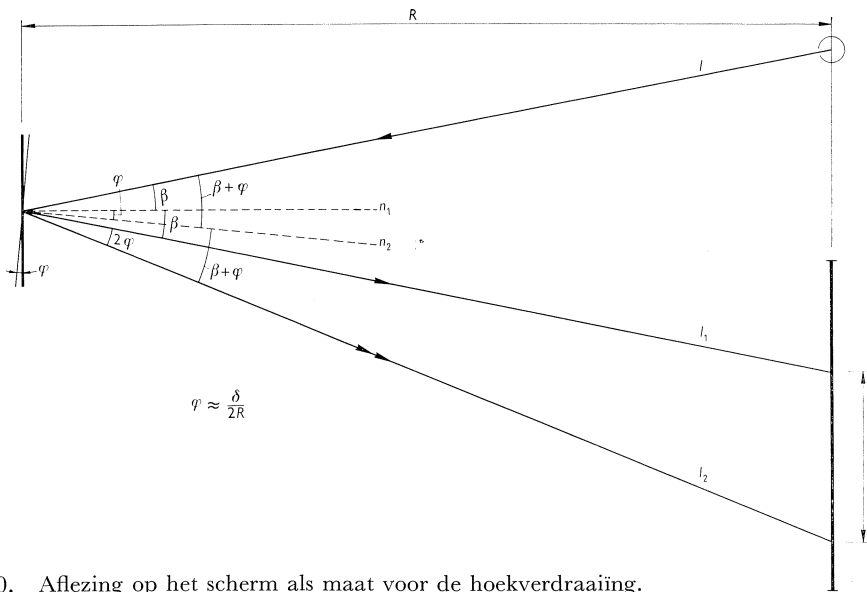


Fig. 10. Aflezing op het scherm als maat voor de hoekverdraaiing.

over deze hoek φ verdraaien. Uit fig. 10 volgt dat de teruggekaatste lichtstraal dan over een hoek 2φ is verdraaid. Indien de hoek, die deze teruggekaatste lichtstraal maakt met het scherm, niet te veel afwijkt van 90° kan men met goede benadering schrijven:

$$\delta = 2\varphi R \quad \text{of wel} \quad \varphi = \frac{\delta}{2R} \quad \dots \dots \dots (1) \text{ en } (1')$$

De ligging van twee corresponderende punten op het scherm geeft dus een maat voor de grootte en de richting van de hoekverdraaiing.

Bij het meten kunnen twee methoden worden gevolgd:

- a. Voor de lichtbron wordt een smalle buis geplaatst zodanig, dat de uit-tredende lichtkegel ter plaatse van het model een iets grotere doorsnede heeft dan het oppervlak van een spiegeltje. Via een richtmechanisme wordt deze buis door een meettechnicus zodanig verdraaid, dat de spie-geltjes achtereenvolgens worden beschenen. De waarnemer tekent de punten met hun nummer aan op het scherm. Na dit in onbelaste en belaste toestand te hebben gedaan, worden de coördinaatverschillen van de overeenkomstige punten opgemeten (zie fig. 12). Het aantekenen van de punten geschiedt door geofende waarnemers zeer snel, ca. 200–400 meet-punten per uur, afhankelijk van de plaatsing; het noteren van de coördi-naatverschillen in het meetboek neemt meer tijd in beslag, evenals het richten van de spiegeltjes op het scherm.
- b. Heeft men betrekkelijk weinig meetpunten maar b.v. meerdere belastings-stappen, dan worden alle spiegeltjes tegelijk beschenen en achtereenvolgens aangetekend (zie fig. 11). Bij toepassing van een kwiklamp kan men het

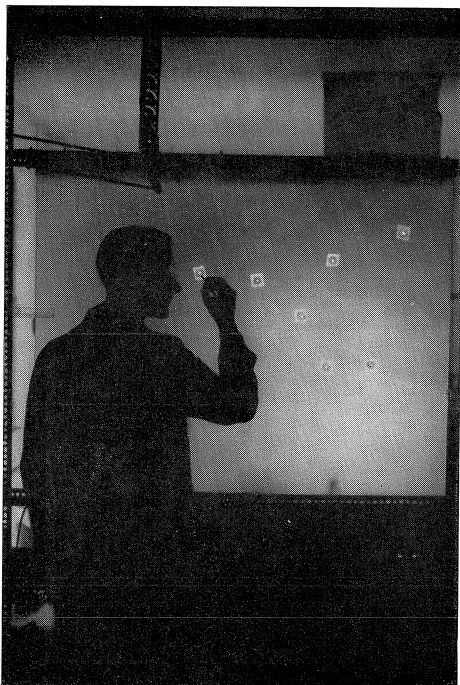


Fig. 11. Het aantekenen van de waarnemingspunten.

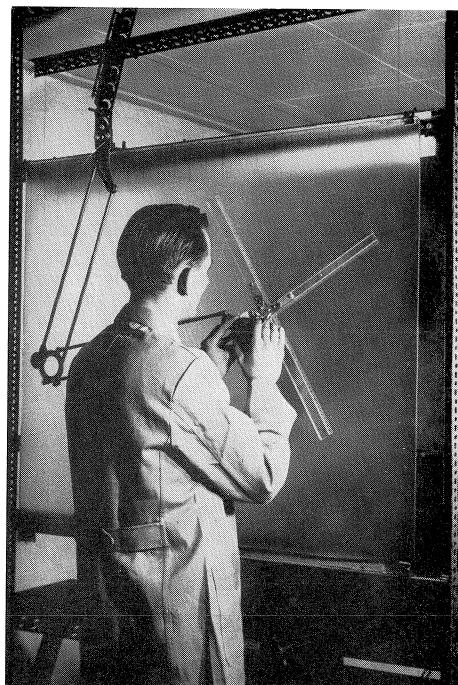


Fig. 12. Het opmeten van de verplaatsingen op het scherm in radiale en tangentiële richting.

beeld van de spiegel-tjes op het scherm zowel in onbelaste als belaste toestand van het model fotografisch vastleggen op hetzelfde negatief. Het is eveneens mogelijk de interferentiepatronen van de spiegel-tjes direct op lichtgevoelig papier te laten inwerken. Het voordeel van de fotografische methoden bestaat hierin dat de invloed van de kruip van het polystyreen-schuim sterk kan worden beperkt.

Daar de spiegel-tjes zeer gemakkelijk in resonantie geraken dienen tijdens een meting trillingen te worden vermeden, ook al zijn deze nauwelijks hoorbaar of voelbaar.

2.2 Nauwkeurigheid van de meting

Om een indruk te verkrijgen in hoeverre de hoekverdraaiing juist wordt weergegeven door de waarde $\delta/2R$ beschouwe men fig. 13, waarbij is aangenomen dat het spiegel-tje draait om een as die loodrecht staat op het vlak van tekening, terwijl de geschetste lichtstralen in het vlak van tekening liggen. Formule (2) van fig. 13 is in deze vorm niet bruikbaar, maar kan op verschillende wijzen worden vereenvoudigd.

Om na te gaan, welke invloed de horizontale en verticale verplaatsingen van het spiegel-tje op de aflezing uitoefenen kan men in formule (2) in eerste

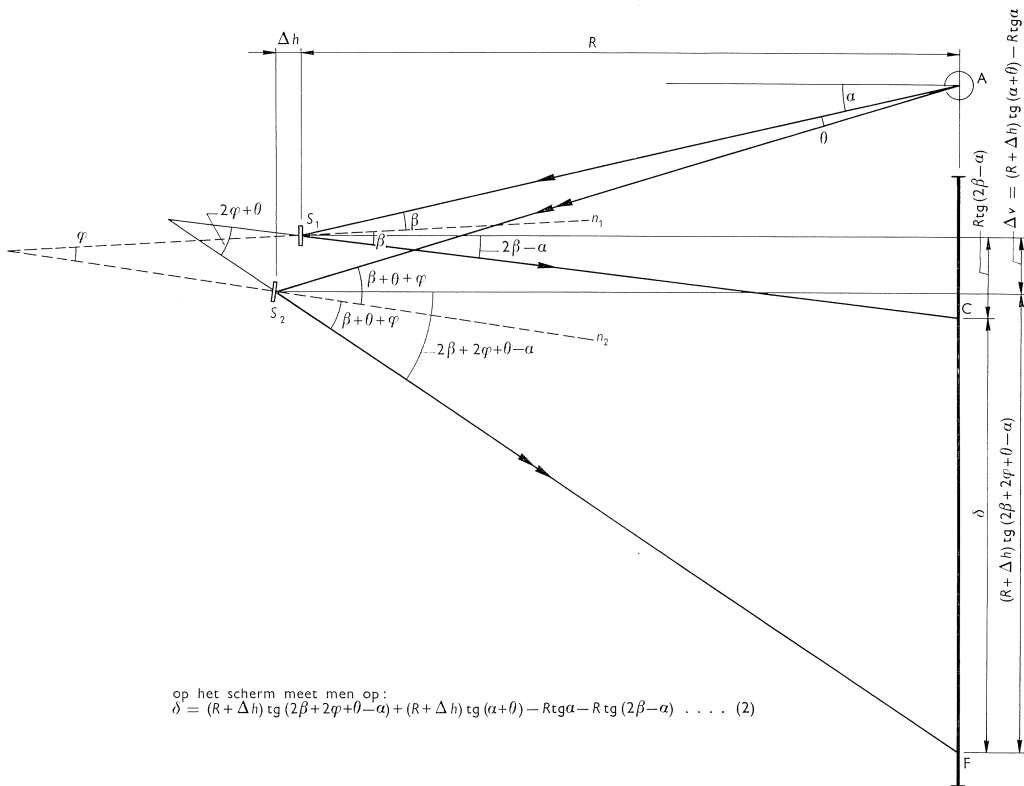


Fig. 13. Aflezing op het scherm als functie van de verdraaiing en de verplaatsing van het spiegeltje.

instantie de tangens van een hoek vervangen door de hoek zelf. Bij een schermhoogte van 1 m en een afstand $R \geq 6$ m bedraagt de maximale afwijking door deze benadering 0,8%. Formule (2) gaat dan over in:

$$\delta = 2\varphi(R + \Delta h) + 2\theta(R + \Delta h) + 2\beta\Delta h \dots (3)$$

Stelt men $R + \Delta h = R'$ dan is

$$\delta = 2\varphi R' + 2\theta R' + 2\beta\Delta h = 2\varphi R' + 2\Delta v + 2\beta\Delta h \dots (3')$$

Men meet dus behalve de waarde $2\varphi R'$ tevens $2 \times$ de verticale verplaatsing en maximaal $1/3 \times$ de horizontale verplaatsing daar $\beta_{\max} = 1/6$.

Het is dus noodzakelijk de opstelling zodanig te maken dat een verplaatsing Δv wordt vermeden, daar men anders de aflezings op het scherm met de zakkingen van de constructie moet corrigeren.

Een opstelling als in fig. 14a is derhalve niet aanbevelenswaardig; beter is een opstelling volgens fig. 14b. Het nadeel is dat de belasting met hefbomen of via kogellagers moet worden aangebracht; bij de opstellingswijze van fig. 14c is ook dit bezwaar ondervangen (zie ook fig. 1).

Fig. 14a. Ongunstige opstelling. Δv beïnvloedt de aflezing voor φ .

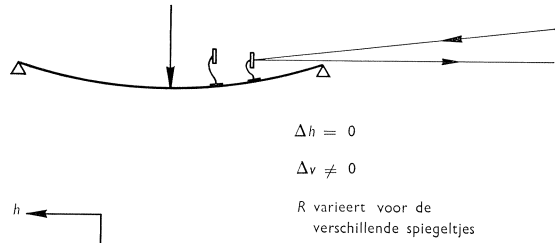


Fig. 14b. De invloed van Δh op φ is aanmerkelijk kleiner dan van Δv . De krachten moeten echter veelal door middel van hefboomen worden aangebracht.

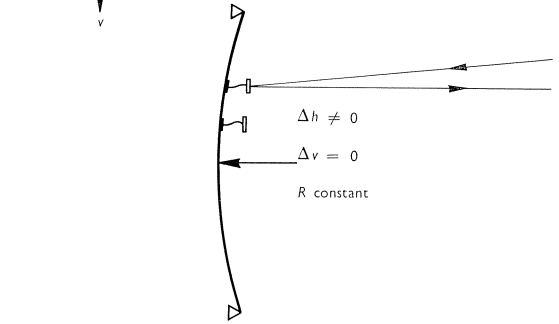


Fig. 14c. Grote spiegel onder 45° . De invloed van Δh is nog enigszins kleiner dan in fig. 14b daar $R_c > R_b$. De belasting kan direct door middel van gewichten worden aangebracht.

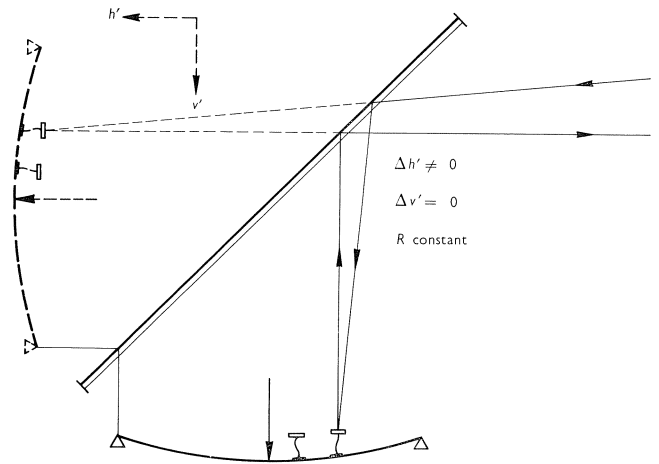


Fig. 14. Wijze van opstellen van het model.

In vele gevallen is $\Delta v = 0$ en $\Delta h \approx 0$ waardoor formule (2) overgaat in:

$$\delta = R\{\text{tg}(2\varphi + 2\beta - \alpha) - \text{tg}(2\beta - \alpha)\} = R\text{tg}2\varphi\{1 + \text{tg}(2\varphi + 2\beta - \alpha)\text{tg}(2\beta - \alpha)\} \dots \dots \dots (4)$$

Als φ klein is, kan hiervoor met goede benadering worden geschreven:

$$\delta = 2\varphi R\{1 + \text{tg}^2(2\beta - \alpha)\} \dots \dots \dots (4')$$

De term $\text{tg}^2(2\beta - \alpha)$ is gelijk aan nul voor $2\beta = \alpha$, d.w.z. indien de teruggekaatste straal loodrecht op het scherm staat. Voor een schermhoogte van 1 m en een afstand $R \geq 6$ m, bedraagt de maximaal mogelijke fout $f = (1/6)^2 =$

= 2,8%. Door de spiegeltjes met enige zorg te richten, kan deze fout worden teruggebracht tot minder dan 1%.

Bij een willekeurige verdraaiing van het spiegeltje zal de gereflecteerde lichtstraal S_2F van fig. 13 niet meer in het vlak van tekening liggen. Om dit geval te kunnen onderzoeken, wordt de verdraaiing Φ van het spiegeltje ontbonden in drie loodrecht op elkaar staande richtingen. Hiervoor zijn gekozen (zie fig. 15):

- Φ_1 loodrecht op V_1 , waarin V_1 het vlak voorstelt door de invallende lichtstraal en de normaal op het spiegeltje;
- Φ_2 loodrecht op V_2 , waarin V_2 het vlak van het spiegeltje voorstelt en
- Φ_3 loodrecht op Φ_1 en Φ_2 , dus eveneens loodrecht op V_3 .

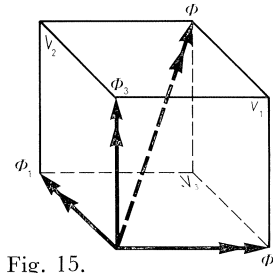


Fig. 15.

De verdraaiing Φ_1 van het spiegeltje is reeds in fig. 13 behandeld. De verdraaiing Φ_2 heeft geen invloed op de teruggekaatste lichtstraal. De invloed van de verdraaiing Φ_3 is nagegaan in fig. 16, waar ter vereenvoudiging alle sinus- en tangenswaarden door de hoek zelf zijn vervangen. Is het model niet belast dan volgt de lichtstraal de weg A-S-C en snijdt het scherm in H' . Na verdraaiing van het spiegeltje wordt de invallende straal AS weerkaatst volgens SF en snijdt het scherm in F' . Voor punt L' geldt dat de „verticale” verplaatsing van punt H' gelijk is aan nul en de „horizontale” verplaatsing gelijk aan $2R'\psi$, zodat men hieruit de correctietermen $f_{v\psi}$ en $f_{h\psi}$ kan berekenen. Ondergaat het spiegeltje tevens een verdraaiing φ loodrecht op V_1 , zoals geschetst is in fig. 13, dan volgt uit (4) dat:

$$\delta = 2\varphi R\{1 + (2\beta - \alpha)(2\varphi + 2\beta - \alpha)\}$$

Uit een vergelijking van fig. 13 met fig. 16 volgt dat $\alpha = \beta - \eta$, zodat men uiteindelijk als correctietermen vindt:

$$f_{h\psi} = 2\psi R(\psi^2 + \varphi\lambda + \frac{1}{2}\beta\eta) \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$f_{v\psi} = 2\psi R(\beta\psi + \beta\lambda) \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$f_{v\varphi} = 2\varphi R(\beta + \eta)(\beta + \eta + 2\varphi) \quad \dots \dots \dots (4'')$$

Om een indruk van de orde van grootte van de afwijkingen te verkrijgen, kunnen in de vormen tussen haakjes waarden voor de hoeken worden ingevuld die slechts zelden zullen worden overschreden. Gesteld is $\psi = \varphi = 0,03$ en $\beta = \eta = \lambda = 0,08$. Men vindt dan:

$$f_{h\psi} = 2\psi R (0,0065)$$

$$f_{v\psi} = 2\psi R (0,0088)$$

$$f_{v\varphi} = 2\varphi R (0,0352)$$

Indien ψ en φ even groot zijn, kan de fout in de „verticale” aflezing dus bij de veronderstelde ongunstige omstandigheden tot 4,4% oplopen. Resumerend

kan echter worden gezegd, dat bij een juiste opstelling en met enige zorg richten van de spiegeltjes de formule $\varphi = \delta/2R$ geen grotere afwijking vertoont dan 2%. De nauwkeurigheid van aantekenen en aflezen op het scherm, zoals aangegeven in de fig. 11 en 12, bedraagt bij nauwkeurig werk $\pm 0,5$ mm. Bij de fotografische methoden is deze nauwkeurigheid tot $\pm 0,2$ mm op te voeren.¹⁾

2.3 Bepaling van de hoekverdraaiing bij een willekeurige stand van het onderzochte vlak

Om het weerkaatste beeld van de lichtstraal op het scherm te doen vallen, moeten de spiegeltjes ongeveer evenwijdig met het scherm worden opgesteld; uit het voorgaande blijkt dat kleine afwijkingen vrijwel geen invloed hebben op de meetresultaten. De formule $\varphi = \delta/2R$ is echter alleen juist als het onderzochte vlak zich eveneens evenwijdig aan het scherm bevindt. Staat de normaal van het onderzochte vlak niet loodrecht op het scherm, dan moeten correcties worden aangebracht die als volgt kunnen worden bepaald. De verdraaiing van het onderzochte vlak kan worden gekarakteriseerd door de vector v , die men weer kan ontbinden in de onderling loodrecht op elkaar staande vectoren x, y en z . De vectoren x en y worden naar believen in het beschouwde vlak gekozen; z staat dus loodrecht op dit vlak. De verdraaiing van het onderzochte vlak veroorzaakt een zelfde verdraaiing van het spiegeltje dat vrijwel evenwijdig met het scherm staat opgesteld. De verdraaiing van het spiegeltje wordt ontbonden in de onderling loodrechte vectoren x', y' en z' . De vectoren x' en y' worden b.v. horizontaal en verticaal gekozen, evenwijdig met het vlak van het scherm, zodat z' loodrecht staat op het vlak van het scherm. De stand van beide assenkruisen $OXYZ$ en $OX'Y'Z'$ ten opzichte van elkaar wordt bepaald door de richtingscosinussen van de hoeken, die deze assen onderling met elkaar maken. Onderstaande tabel geeft hiervan een overzicht.

	X	Y	Z
X'	a_1	b_1	c_1
Y'	a_2	b_2	c_2
Z'	a_3	b_3	c_3

Drukt men de oude coördinaten x, y, z uit in de nieuwe coördinaten x', y', z' dan vindt men:

$$x = a_1x' + a_2y' + a_3z' \quad \dots \quad (7a)$$

$$y = b_1x' + b_2y' + b_3z' \quad \dots \quad (7b)$$

$$z = c_1x' + c_2y' + c_3z' \quad \dots \quad (7c)$$

¹⁾ Zie ook noot 1, pag. 87.

Fig. 16. Aflezingen op het scherm als de normaal van het spiegelkje na verdraaiing niet meer in het vlak van tekening ligt.

Het spiegelkje verdraait vanuit stand V_2 over een hoek ψ tot stand V_2' . Vlak W_2 is evenwijdig aan V_2 . De normaal SB van het spiegelkje V_2 zal in het algemeen niet loodrecht staan op het vlak W_2' van het scherm. De hoek χ tussen W_2' en W_2 kan worden afgeleid uit de grootte van $\angle C'BC = \eta$ en $\angle D'BD = \lambda$ en bedraagt $\chi = \sqrt{\eta^2 + \lambda^2}$. De afstand R tussen spiegelkje en scherm wordt bepaald door de loodlijn SK op W_2' neergelaten. Het blijkt, dat $R \approx R'$, aangezien $\cos \chi \approx 1$.

Vóór de verdraaiing van het spiegelkje volgt de lichtstraal de weg ASC en na de verdraaiing de weg ASF. De vlakken door deze lichtstralen zijn links onder in de tekening nogmaals apart weergegeven teneinde de ligging van de verschillende punten duidelijker aan te tonen.

Bij benadering geldt:

$$\frac{f_{h\psi}}{GE'} = \frac{1/2 EC}{R'} = \psi \text{ en } \frac{f'_{v\psi}}{GE'} = \frac{BC}{R'} = \beta$$

Voorts is

$$GE' = 2D'D + 2DD' + CC' = (2R'\psi^2 + 2R'\psi\lambda + R'\beta\eta)$$

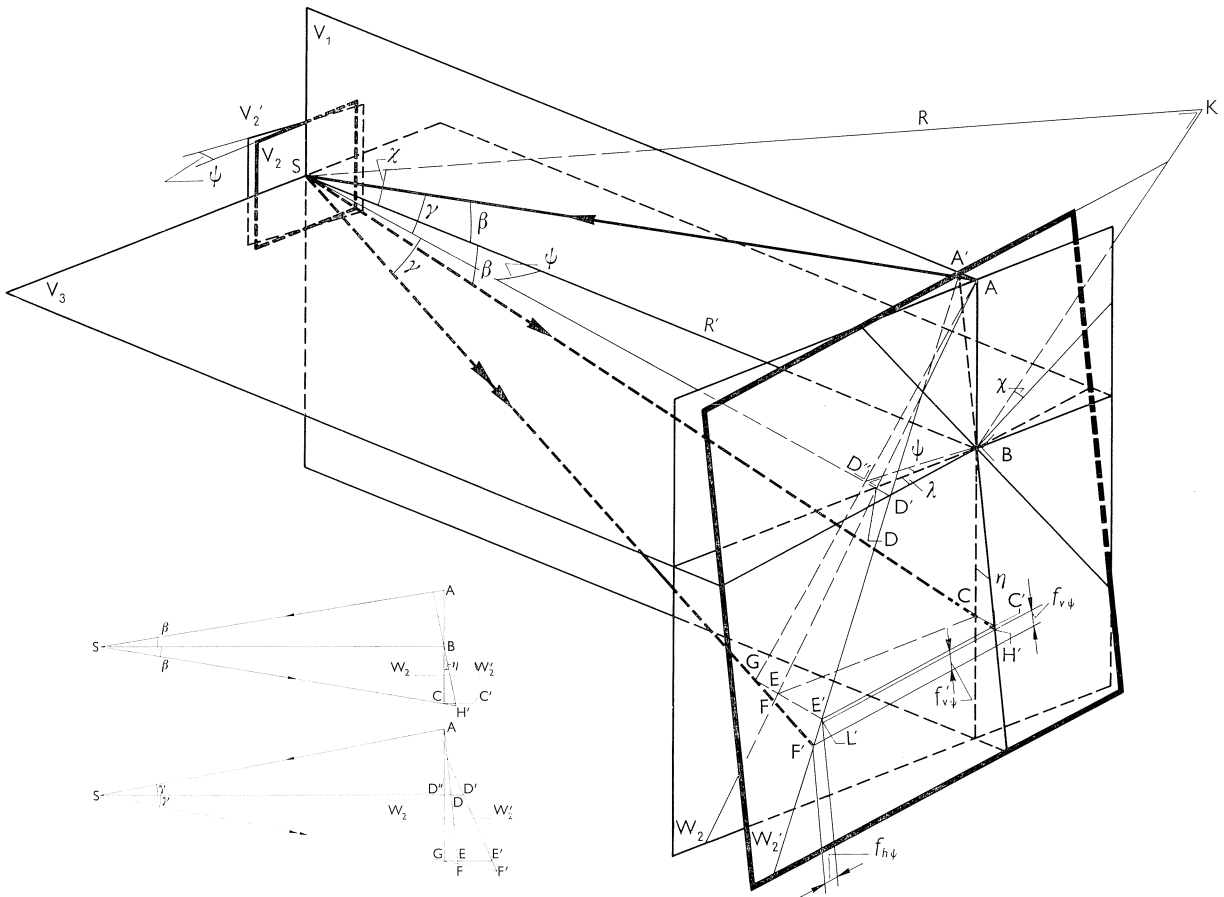
$$R' = R\sqrt{1 + \lambda^2 + \eta^2} \approx R(1 + 1/2\lambda^2 + 1/2\eta^2) \approx R$$

$$C'H' = R'\eta\beta^2, \\ f_{v\psi} = f'_{v\psi} - C'H'$$

zodat men vindt:

$$f_{h\psi} = 2R\psi(\psi^2 + \psi\lambda + 1/2\beta\eta) \quad \dots (5)$$

$$f_{v\psi} = 2R\beta(\psi^2 + \psi\lambda) \quad \dots (6)$$



Dit wil zeggen dat de gezochte vectoren x en y (dus de verdraaiingen van het beschouwde vlak) zijn uitgedrukt in de op het scherm opgemeten vectoren x' en y' en in de niet te meten vector z' . Daar echter vrijwel altijd de vector z gelijk aan nul zal zijn – het onderzochte vlak draait dan niet om een as loodrecht op dit vlak – kan uit de laatste betrekking z' worden uitgedrukt in x' en y' , zodat ook x en y alleen functies zijn van x' en y' . De uitdrukkingen (7a) en (7b) gaan dan over in:

$$x = \left(a_1 - \frac{a_3}{c_3} c_1\right) x' + \left(a_2 - \frac{a_3}{c_3} c_2\right) y' \dots \dots \dots (8a)$$

$$y = \left(b_1 - \frac{b_3}{c_3} c_1\right) x' + \left(b_2 - \frac{b_3}{c_3} c_2\right) y' \dots \dots \dots (8b)$$

Hierin stellen dus x en y de hoekverdraaiingen van het onderzochte vlak voor en x' en y' de hoekverdraaiingen die men uit de aflezingen op het scherm berekent. De uitdrukkingen (8a) en (8b) worden zeer eenvoudig indien één stel vectoren evenwijdig is; zijn b.v. x' en x evenwijdig dan vindt men:

$$x = x' \dots \dots \dots (8a')$$

$$y = \frac{1}{b_2} y' \dots \dots \dots (8b')$$

Indien de vector z van het onderzochte vlak niet gelijk is aan nul kan deze worden gevonden door in een punt twee spiegeltjes aan te brengen. Het ene spiegeltje leest men af via de grote spiegel onder 45° (zie fig. 14c), zodat men de vectoren x' en y' kan bepalen. Het tweede spiegeltje leest men direct af (zie fig. 14a), zodat men hieruit de vectoren x' en z' kan vinden. De verdraaiingen van het onderzochte vlak volgen dan uit (7a) tot en met (7c).

2.4 *Werking van de spiegelrekmetertjes*

Voor het bepalen van de lengteveranderingen wordt een portaalconstructie van zeer dun messing toegepast volgens fig. 17. Indien dit portaaltes op het model wordt bevestigd, zal bij vervorming van het model ook het portaaltes vervormen. De vervormingen van het portaaltes zijn zowel afhankelijk van de hoekverdraaiing als van de verplaatsing van de voetpunten A en B ten opzichte van elkaar. Er zijn echter twee symmetrisch gelegen punten A' en B' op het portaaltes te bepalen waarvan

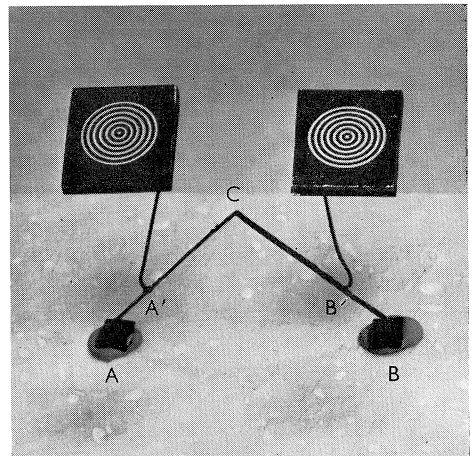


Fig. 17. Spiegelrekmetertje. $AB = 4$ cm. Bij een schermafstand $R = 7,50$ m geeft een verlenging van $\frac{1}{1000}$ mm van de afstand A–B een aflezing van 1 mm op het scherm.

het verschil in hoekverdraaiing uitsluitend afhankelijk is van de horizontale verplaatsing Δh tussen A en B en onafhankelijk van de hoekverdraaiing van deze punten. Brengt men in A' en B' spiegeltjes aan dan bedraagt de specifieke lengteverandering tussen A en B:

$$\varepsilon_h = \frac{3}{8}\Delta\varphi \dots \dots \dots (13)$$

waarin $\Delta\varphi$ het verschil in hoekverdraaiing voorstelt tussen A' en B'. In fig. 20 is de berekening van een spiegelrekmetertje weergegeven bij symmetrische vervorming. De portaalvorm van fig. 20 is de meest eenvoudige en ruimtebesparende, bovendien is bij deze vorm de grootte van $\Delta\varphi$ weinig gevoelig voor kleine afwijkingen in de plaats van de spiegeltjes. Het is echter ook mogelijk een rechthoekig portaalte toe te passen.

In het algemeen zal het moment over de afstand AB niet constant zijn en zullen de benen AC en BC niet symmetrisch vervormen ten opzichte van de lijn CD. Ook in dit geval wordt de specifieke lengteverandering weergegeven door $\varepsilon_h = \frac{3}{8}\Delta\varphi$ zoals in fig. 21 wordt aangetoond.

Bij zuivere buiging, al dan niet gecombineerd met normaalkracht, is het gemiddelde van de hoekverdraaiingen van A' en B' gelijk aan de hoekverdraaiing van punt D en kan men een rij rekmetertjes zowel gebruiken voor de bepaling van de rek als de kromming. Bij een sterk verlopend moment worden de afwijkingen echter groot en dient men tevens krommingsspiegeltjes toe te passen (zie fig. 22).

In fig. 23 is nagegaan welke tegenwerkende krachten de rekmetertjes uitoefenen bij buiging en normaalkracht. Deze krachten zijn uitgezet als functie van de plaatdikte. Bij een gegeven kromming of rek van de plaat levert het rekmetertje een tegengesteld gericht moment resp. kracht. Voor de normaal gebruikelijke rekmetertjes is in fig. 24 de verhouding weergegeven tussen het moment (resp. de normaalkracht) van twee aan weerszijden van de plaat gelegen rekmetertjes en het moment (resp. de normaalkracht) in de plaat. De afstand van de rekmetertjes loodrecht op de richting van de verlenging is hierbij gelijk gesteld aan l' . In fig. 25 zijn de tegenwerkende momenten tengevolge van de verwringing van een rekmetertje berekend. Bij dunne platen is het dus noodzakelijk rekmetertjes van zeer lichte constructie toe te passen, zie fig. 24 en 25. De werkelijk optredende krachten zullen iets kleiner zijn dan de berekende krachten, daar het polystyreenschuim onder de punten A en B plaatselijk zal kunnen vervormen, zonder dat dit echter veel invloed heeft op het verschil van de aflezings dat de specifieke lengteverandering bepaalt.

2.5 Beschrijving van de spiegeldynamometer

Meestal zal men op het model een belasting aanbrengen en daarna de vervormingen meten. Soms kan het echter wenselijk zijn een gegeven verplaatsing op te leggen en vervolgens na te gaan welke kracht bij deze verplaatsing behoort. Dit is vooral het geval indien het kracht-verplaatsingsdiagram zodanig

verloopt, dat bij toenemende vervorming alleen evenwicht mogelijk is bij een geringe vermeerdering of zelfs vermindering van de kracht. Vooral stabiliteitsverschijnselen, zoals knik en doorslag, behoren tot de laatstgenoemde categorie.

Daar bij modellen van polystyreenschuim slechts geringe krachten optreden, zijn de gebruikelijke krachtmeters minder geschikt; het ligt bovendien voor de hand deze metingen eveneens met behulp van de spiegelreflectiemethode uit te voeren, zodat met hetzelfde procédé zowel de op de constructie werkende krachten als de vervormingen hiervan kunnen worden gemeten. Het is uiteraard niet mogelijk krachten te meten zonder dat het meetinstrument vervormt; er is echter naar gestreefd de vervorming in de richting van de kracht gering te houden. In fig. 18 is een schets van een dergelijke krachtmeter gegeven. De krachten werken in de richting A_1-A_2 en veroorzaken een geringe lengteverandering δ_1 in deze richting. De lengteverandering δ_1 wordt vergroot in de richting B_1-B_2 en bedraagt daar $\delta_2 = \delta_1 \cotg \beta$. De lengteverandering δ_2 veroorzaakt weer buiging in het portaaltje C_1-C_2 , die met behulp van 2 spiegel-tjes kan worden gemeten. In fig. 26 is dit in formule uitgewerkt. In fig. 19 is een afbeelding van het prototype van de spiegeldynamometer gegeven. Het portaaltje C_1-C_2 is hierbij 90° gedraaid om gemakkelijker te kunnen aflezen. In fig. 27 is zowel de kracht als de verplaatsing van het metertje volgens fig. 19 als functie van de hoekverdraaiing van de spiegel-tjes uitgezet. Als men dus punt A_1 in fig. 18 een verplaatsing oplegt, is uit de aflezingen van de spiegel-tjes zowel de verplaatsing van punt A_2 als de veroorzaakte kracht bekend. Het verschil in verplaatsing tussen A_1 en A_2 is dermate gering ten opzichte van de op te leggen verplaatsingen dat het onderzochte verschijnsel hiervan geen hinder ondervindt.

Fig. 18. Schets van de spiegeldynamometer.

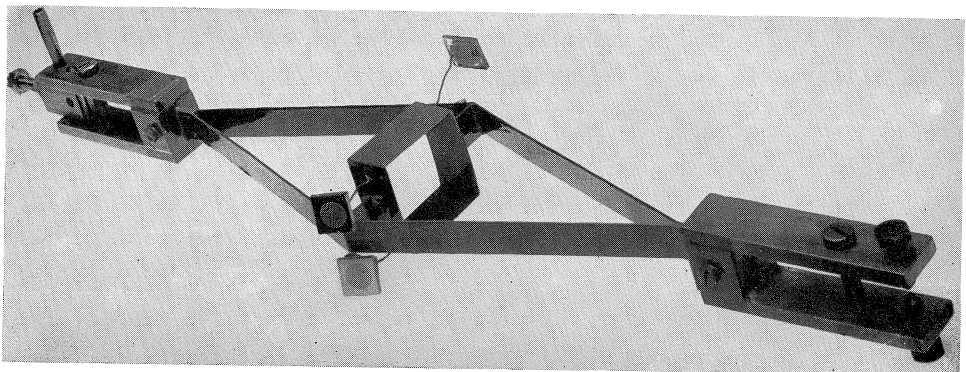
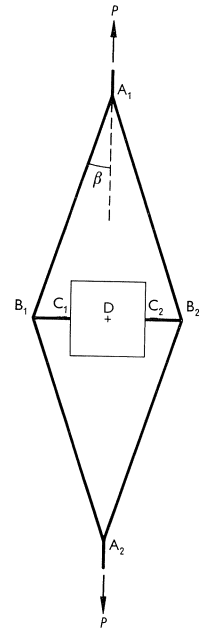
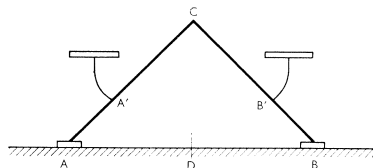


Fig. 19. Prototype van de spiegeldynamometer.

2.6 Berekeningen

Fig. 20. Werking van een spiegelrekmetertje bij symmetrische vervorming.

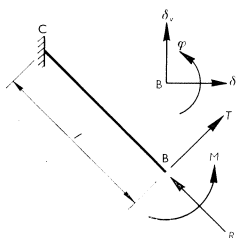


Indien CA en CB symmetrisch vervormen ten opzichte van de lijn CD kan men CB ingeklemd denken in C met de hieronder aangegeven reacties in B.

De vervormingen φ en δ_h bedragen dan:

$$\varphi = \frac{1}{EI} \left(Ml + \frac{1}{2} Tl^2 \right) \dots \dots (9)$$

$$\delta_h = \frac{l\sqrt{2}}{EI} \left(\frac{1}{4} Ml + \frac{1}{6} Tl^2 \right) \dots \dots (10)$$



momentenverloop tgv M en T

Ondergaat B alleen een hoekverdraaiing en geen verplaatsing dan volgt uit:

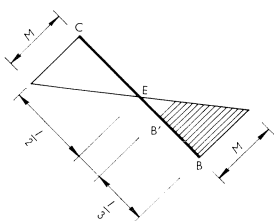
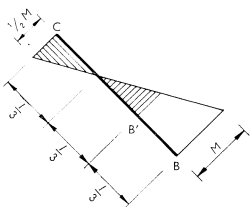
$$\delta_h = 0 \rightarrow T = -\frac{3M}{2l}$$

Men vindt dan de hiernaast geschetste momentenlijn, waaruit volgt dat in B' op een afstand $\frac{2}{3}l$ vanuit C de hoekverdraaiing ten opzichte van C nul is. (Oppervlakte momentenvlak van C tot B' is gelijk aan nul.) Geeft men vervolgens B alleen een horizontale verplaatsing, dan volgt uit:

$$\varphi = 0 \rightarrow T = -2\frac{M}{l}$$

Men vindt dan de hiernaast geschetste momentenlijn. De verplaatsing δ_h van B volgt uit (10) en bedraagt:

$$\delta_h = -\frac{1}{12} \frac{Ml^2\sqrt{2}}{EI} \dots \dots \dots (10')$$



De hoekverdraaiing van B' ten opzichte van C of B bedraagt:

$$\varphi_{B'} = -\frac{2}{9} \frac{Ml}{EI} \dots \dots \dots (11)$$

$$\left(\varphi_E = -\frac{1}{4} \frac{Ml}{EI}, \text{ dus } \varphi_{B'} = \frac{8}{9} \varphi_E = \frac{8}{9} \varphi_{\max} \right)$$

Voor het gehele portaaltje geldt:

$$\Delta h = 2\delta_h = -\frac{1}{6} \frac{Ml^2\sqrt{2}}{EI} \text{ en } \Delta\varphi = 2\varphi_{B'} = -\frac{4}{9} \frac{Ml}{EI}$$

zodat
$$\Delta h = \frac{3}{8} l\sqrt{2}\Delta\varphi, \text{ en } \dots \dots \dots (12)$$

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h}{l\sqrt{2}} = \frac{3}{8} \Delta\varphi \dots \dots \dots (13)$$

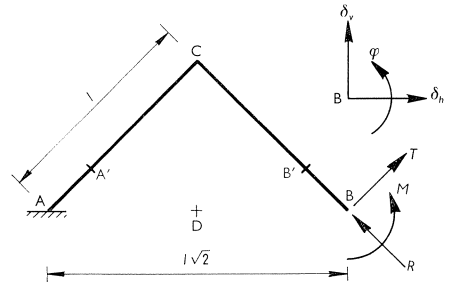
Fig. 21. Werking van een spiegelrekmetertje bij asymmetrische vervorming.

Denk de constructie in A ingeklemd, terwijl in B de geschetste reacties aangrijpen. De vervormingen bedragen:

$$\varphi = \frac{l}{12EI} (24M + 18Tl + 6Rl) \dots (14)$$

$$\delta_v = \frac{l^2\sqrt{2}}{12EI} (12M + 11Tl + 5Rl) \dots (15)$$

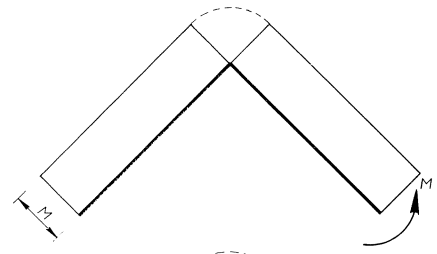
$$\delta_h = \frac{l^2\sqrt{2}}{12EI} (6M + 5Tl + Rl) \dots (16)$$



De hoekverdraaiingen van A' en B' bedragen (AA' = BB' = 1/3 l):

$$\varphi_{A'} = \frac{l}{18EI} (6M + 6Tl + 5Rl) \dots (17)$$

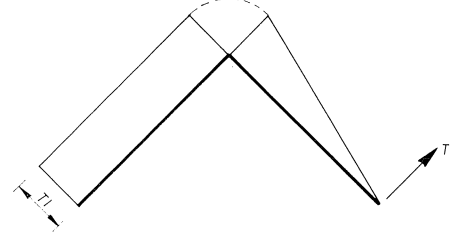
$$\varphi_{B'} = \frac{l}{18EI} (30M + 26Tl + 9Rl) \dots (18)$$



Het verschil in hoekverdraaiing bedraagt:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_{B'} - \varphi_{A'} = \frac{4l}{18EI} (6M + 5Tl + Rl) = \\ &= \frac{8}{3} \frac{\delta_h}{l\sqrt{2}} \end{aligned}$$

en is dus onafhankelijk van φ en δ_v , zie formule (16).



Men kan omgekeerd uit de formules (14), (15) en (16) ook R, T en M uitdrukken in φ , δ_v en δ_h - formules (27) t/m (29) - zodat $\varphi_{A'}$ en $\varphi_{B'}$ als functies van φ , δ_v en δ_h zijn weer te geven.

Ondergaat A tevens nog een hoekverdraaiing Φ (B dus een hoekverdraaiing $\Phi + \varphi$) dan worden de uitdrukkingen voor $\varphi_{A'}$ en $\varphi_{B'}$:

$$\varphi_{A'} = \Phi + \frac{1}{12}\varphi + \frac{5}{6} \frac{\delta_v}{l\sqrt{2}} - \frac{4}{3} \frac{\delta_h}{l\sqrt{2}} \dots (19)$$

$$\varphi_{B'} = \Phi + \frac{1}{12}\varphi + \frac{5}{6} \frac{\delta_v}{l\sqrt{2}} + \frac{4}{3} \frac{\delta_h}{l\sqrt{2}} \dots (20)$$

Ook in dit geval is dus:

$$\Delta\varphi = \varphi_{B'} - \varphi_{A'} = \frac{8}{3} \frac{\delta_h}{l\sqrt{2}} = \frac{8}{3} \varepsilon_h$$

Fig. 22. Gemiddelde waarde van de hoekverdraaiingen van de spiegeltjes van een rekmetertje.

De gemiddelde waarde van beide aflezingen volgt uit (19) en (20) en bedraagt:

$$\varphi_{\text{gem}} = \frac{\varphi_{B'} + \varphi_{A'}}{2} = \Phi + \frac{1}{12}\varphi + \frac{5}{6} \frac{\delta_v}{l\sqrt{2}} \quad (21)$$

Deze gemiddelde waarde is alleen gelijk aan de hoekverdraaiing van D bij een zuiver buigend moment of indien de vervormingen symmetrisch zijn t.o.v. D.

Het eerste is als volgt in te zien. Gaat men uit van een gelijkmatig verdeelde belasting dan geldt:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (22)$$

Integratie van (22) en substitutie van de randvoorwaarden

$$y = 0 \text{ voor } x = 0; \quad y = \delta_v \text{ voor } x = l\sqrt{2};$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ voor } x = 0 \text{ en } \frac{dy}{dx} = \varphi \text{ voor } x = l\sqrt{2}$$

levert als vergelijking van de elastische lijn:

$$y = \frac{x^4}{24}(x-l\sqrt{2})^2 \frac{q}{EI} + \frac{x^2}{2l^2}(x-l\sqrt{2})\varphi + \frac{x^2}{2l^3}(3l-x\sqrt{2})\delta_v \quad (23)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{12}(x-l\sqrt{2})(2x-l\sqrt{2}) \frac{q}{EI} + \frac{x}{2l^2}(3x-2l\sqrt{2})\varphi + \frac{3x}{2l^3}(2l-x\sqrt{2})\delta_v \quad (24)$$

De hoekverdraaiing van D vindt men door in (24) de waarde $x = \frac{1}{2}l\sqrt{2}$ te substitueren. Ondergaat A tevens een hoekverdraaiing Φ dan wordt:

$$\varphi_D = \Phi - \frac{\varphi}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4l} \delta_v \quad (25)$$

Deze waarde is dus niet gelijk aan de waarde van formule (21). Slechts bij een zuiver buigend moment gaan (21) en (25) in elkaar over, immers dan geldt

$$q = 0 \text{ en } D = EI \frac{d^3y}{dx^3} = 0, \text{ waaruit volgt } \delta_v = \frac{\varphi l\sqrt{2}}{2}, \text{ zodat:}$$

$$\varphi_D = \varphi_{\text{gem}} = \Phi + \frac{1}{2}\varphi \quad (26)$$

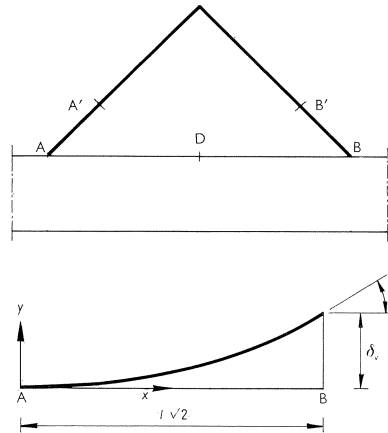


Fig. 23. Kracht in een rekmetertje als functie van de vervorming.

Uitgaande van de vervormingen, die zijn uitgedrukt in de krachten volgens de formules (14), (15) en (16) kan men omgekeerd ook de krachten in de vervormingen uitdrukken. Deze formules luiden:

$$R = \frac{EI\sqrt{2}}{4l^3}(3\varphi l\sqrt{2} + 6\delta_v - 24\delta_h) \quad (27)$$

$$T = \frac{EI\sqrt{2}}{4l^3}(-9\varphi l\sqrt{2} + 6\delta_v + 24\delta_h) \quad (28)$$

$$M = \frac{EI\sqrt{2}}{4l^2}(+7\varphi l\sqrt{2} - 6\delta_v - 12\delta_h) \quad (29)$$

Bij zuivere buiging geldt voor de vervorming van de neutrale lijn van de plaat:

$$y = \frac{\delta}{2l^2} x^2, \text{ zodat} \dots \dots \dots (30)$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_x = \frac{\delta}{l^2} x \text{ en} \dots \dots \dots (31)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = \frac{\delta}{l^2} \dots \dots \dots (32)$$

De lengteverandering Δ_b van de buitenste vezel van de plaat volgt uit $\frac{\Delta_b}{\frac{1}{2}d} = \frac{l\sqrt{2}}{\varrho}$, zodat men door substitutie van (32) vindt:

$$\Delta_b = \frac{\delta d \sqrt{2}}{2l} \dots \dots \dots (33)$$

Uit (30), (31) en (33) volgen de vervormingen van punt B van het portaal (zie ook fig. 21):

$$\delta_h = -\frac{\delta d \sqrt{2}}{2l} \dots \dots \dots (34)$$

$$\delta_v = +\delta \dots \dots \dots (35)$$

$$\varphi = +\frac{\delta \sqrt{2}}{l} \dots \dots \dots (36)$$

Substitutie van deze waarden in (27) tot en met (29) levert:

$$R = \frac{3EI\delta\sqrt{2}}{l^4} (l+d\sqrt{2}) \dots \dots (27')$$

$$T = -\frac{3EI\delta\sqrt{2}}{l^4} (l+d\sqrt{2}) \dots \dots (28')$$

$$M = \frac{EI\delta\sqrt{2}}{4l^3} (8l+6d\sqrt{2}) \dots \dots (29')$$

Uit (27') en (28') volgt dat de resulterende kracht horizontaal gericht is met een grootte:

$$H = -\frac{6EI\delta}{l^4} (l+d\sqrt{2}) \dots \dots (37)$$

De kracht per eenheid van lengteverandering bedraagt dan:

$$H_1 = \frac{H}{\Delta_b} = -\frac{6EI}{l^3} \frac{l\sqrt{2}+2d}{d} \dots \dots \dots (37')$$

Het moment per eenheid van lengteverandering bedraagt

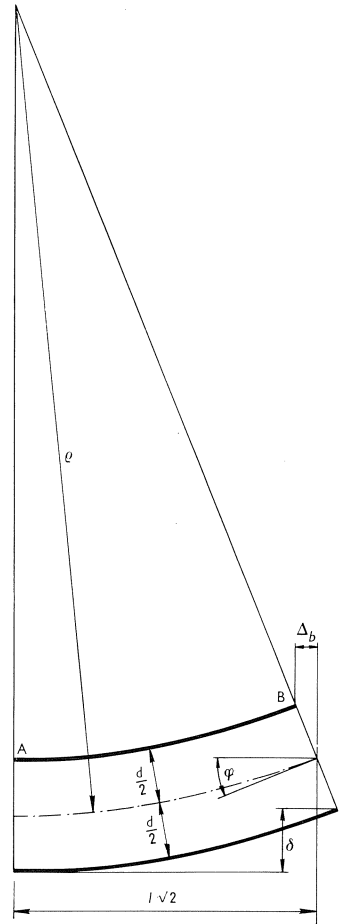
$$M_1 = \frac{EI}{l^2} \frac{4l+3d\sqrt{2}}{d} \dots \dots \dots (29'')$$

Indien uitsluitend een normaalkracht op de plaat werkt, zijn de vervormingen van punt B van het portaal gelijk aan:

$$\delta_h = \Delta_n \dots \dots \dots (38)$$

$$\delta_v = 0 \dots \dots \dots (39)$$

$$\varphi = 0 \dots \dots \dots (40)$$



Substitutie van deze waarden in (27) en (28) levert:

$$R = -\frac{6EI\Delta_n\sqrt{2}}{l^3} \dots \dots \dots (27'')$$

$$T = +\frac{6EI\Delta_n\sqrt{2}}{l^3}, \text{ zodat } \dots \dots \dots (28'')$$

$$H = +\frac{12EI\Delta_n}{l^3} \dots \dots \dots (41)$$

De kracht per eenheid van lengteverandering bedraagt dan:

$$H_1 = \frac{12EI}{l^3} \dots (41')$$

Horizontale kracht H die een rekmetertje uitoefent per eenheid van lengteverandering als functie van de plaatdikte.

1. bij zuivere buiging . . . (37')
2. bij normaalkracht (41')

(Waar nodig zijn de indices r en p toegevoegd die resp. betrekking hebben op het rekmetertje en het polystyreenschuim.)

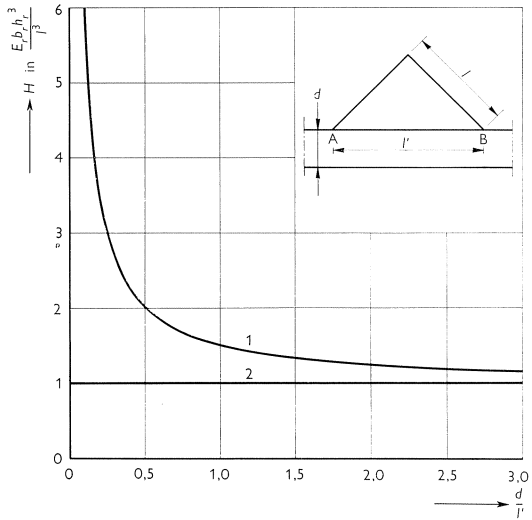


Fig. 24. Vergelijking van de krachten in een rekmetertje en in het polystyreenschuim.

De krachten, welke door de vervorming van het rekmetertje ontstaan, dienen klein te zijn ten opzichte van de krachten die in het polystyreenschuim optreden. Uit formule (32) volgt het buigend moment in de plaat:

$$-\frac{M_p}{E_p I_p} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\delta}{l^2} \dots \dots \dots (42)$$

Substitutie van (33) in (42) levert:

$$M_p = -E_p I_p \frac{\Delta b \sqrt{2}}{ld} \dots \dots \dots (43)$$

zodat het moment per eenheid van lengteverandering van de buitenste vezel gelijk is aan:

$$M_{p1} = -E_p I_p \frac{\sqrt{2}}{ld} \dots \dots \dots (43')$$

Plaatst men ter weerszijden van de plaat een rekmetertje, dan volgt uit de formules (37') en (29'') een tegenwerkend moment ter grootte:

$$M_1' = H_1 d + 2M_1 = \frac{2E_r I_r}{l^2} \left(\frac{3l\sqrt{2} + 6d}{l} + \frac{4l + 3d\sqrt{2}}{d} \right) \dots \dots \dots (44)$$

De verhouding tussen het moment, geleverd door beide rekmetertjes, en het moment in het polystyreenschuim bedraagt:

$$\frac{M_1'}{M_{p1}} = \frac{E_r b_r}{E_p b_p} \cdot h_r^3 \frac{\sqrt{2}}{ld^2} \left(\frac{3l\sqrt{2} + 6d}{l} + \frac{4l + 3d\sqrt{2}}{d} \right) \dots \dots \dots (45)$$

Bij vervorming uitsluitend tengevolge van normaalkracht bedraagt de kracht per eenheid van lengteverandering in het polystyreenschuim:

$$K_{p_1} = \frac{E_p F_p}{l} = \frac{E_p b_p d}{l} \dots \dots \dots (46)$$

Twee rekmetertjes leveren een kracht:

$$K_1' = \frac{24 E_r I_r}{l^3} \dots \dots \dots (41'')$$

De verhouding tussen de kracht in de rekmetertjes en de kracht in het polystyreenschuim bedraagt:

$$\frac{K_1'}{K_{p_1}} = 2 \frac{E_r}{E_p} \frac{b_r}{b_p} h_r^3 \frac{1}{d l^2} \dots \dots \dots (47)$$

Percentage van het moment en de normaalkracht dat door twee rekmetertjes van de gegeven afmetingen wordt opgenomen, als functie van de plaatdikte. Stelt men $b_p = l'$ en $d = \alpha l'$ dan gaan de formules (45) en (47) over in:

1. en 2. Moment:

$$\begin{aligned} \frac{M_1'}{M_{p_1}} &= \frac{E_r}{E_p} b_r h_r^3 \frac{4\sqrt{2}}{l'^4} \frac{3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{\alpha^3} = \\ &= C_1 \frac{3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{\alpha^3} \dots \dots \dots (45') \end{aligned}$$

3. Normaalkracht:

$$\frac{K_1'}{K_{p_1}} = \frac{E_r}{E_p} b_r \cdot h_r^3 \frac{4}{l'^4} \cdot \frac{1}{\alpha} = C_2 \frac{1}{\alpha} \dots \dots (47')$$

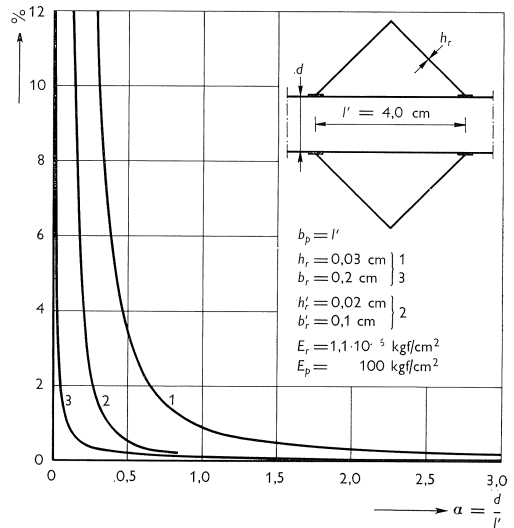


Fig. 25. Invloed van de verwringing van een rekmetertje.

Beschouwt men het op blz. 105 geschetste plaatgedeelte dan kan de verdraaiing Φ van B t.o.v. A worden ontbonden in de vectoren Φ_1 , Φ_2 en Φ_3 . De invloed van de vector Φ_1 is in de voorgaande figuren behandeld; de vector Φ_2 is slechts zeer klein en kan worden verwaarloosd; de vector Φ_3 veroorzaakt een verwringing van de plaat. Deze verwringing veroorzaakt een keersymmetrische vervorming van het portaaltje zodat men dit weer in C ingeklemd kan denken. De verdraaiing van B t.o.v. C bedraagt $1/2 \Phi_3 = \psi$. De hoekverdraaiing ψ wordt ontbonden in ψ_r en ψ_t ; ψ_r veroorzaakt een verwringing van CB , ψ_t een buiging in breedterichting van CB . De verdraaiing van punt B' op een afstand $1/3 l$ vanaf B bedraagt $2/3 \psi$ en heeft geen invloed op de aflezing voor de rek.

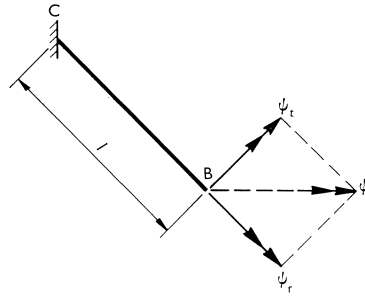
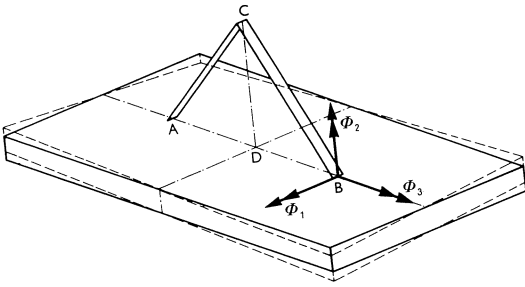
Men dient echter na te gaan of de tegenwerkende momenten van het rekmetertje niet te groot zijn t.o.v. de wringende momenten in het polystyreenschuim. Het wringende moment in het polystyreenschuim bedraagt:

$$M_w = \beta_p G_p b_p d^3 \theta_1 \quad (\beta_p = 0,333 \text{ daar } b_p \gg d) \dots \dots \dots (48)$$

Daar de specifieke hoekverdraaiing $\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{l} \psi$ vindt men:

$$M_w = 0,333 \sqrt{2} G_p \frac{b_p d^3}{l} \psi \dots \dots \dots (48')$$

Voor het rekmetertje geldt $\psi_r = \psi_t = 1/2 \psi \sqrt{2}$.



Het wringende moment in CB bedraagt:

$$M_w' = \beta_r G_r b_r h_r^3 \theta_1' = \frac{1}{2} \sqrt{2} \beta_r G_r \frac{b_r h_r^3}{l} \psi \quad (49)$$

(β_r hangt af van de verhouding b_r/h_r).

Het buigend moment in CB bedraagt:

$$M_b' = \frac{E_r I_r}{l} \varphi' = \frac{1}{24} \sqrt{2} \frac{E_r h_r b_r^3}{l} \psi \quad (50)$$

Men vindt nu de volgende verhoudingen tussen de momenten:

$$\frac{M_w'}{M_w} = \frac{\beta_r G_r b_r h_r^3}{0,666 G_p b_p d^3} \quad (51)$$

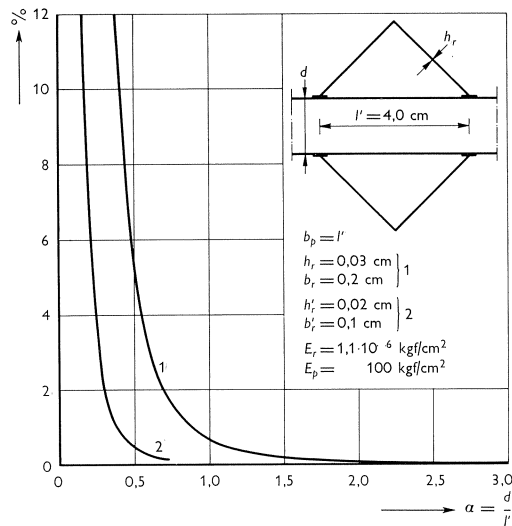
$$\frac{M_b'}{M_w} = \frac{1}{8} \frac{E_r h_r b_r^3}{G_p b_p d^3} \quad (52)$$

Percentage van het moment dat door twee rektmetertjes van de gegeven afmetingen wordt opgenomen bij verwringing van de plaat. Stelt men $d = \alpha l'$, $b_p = l'^1$ en $\nu_r = \nu_p = 0,3$ dan gaan de formules (51) en (52) over in:

$$\frac{M_w'}{M_w} = 3\beta_r \frac{E_r b_r h_r^3}{E_p l'^4} \frac{1}{\alpha^3} = \frac{C_3}{\alpha^3} \quad (51')$$

$$\frac{M_b'}{M_w} = 0,65 \frac{E_r h_r b_r^3}{E_p l'^4} \frac{1}{\alpha^3} = \frac{C_4}{\alpha^3} \quad (52')$$

Verder blijkt dat $C_3/C_4 \approx 0$.



¹⁾ met $b_p = l'$ wordt bedoeld dat de afstand van de rektmetertjes gelijk is aan l' , zodat ook bij variërende α de waarde $\beta_p = 0,333$ constant blijft.

Fig. 26. Berekening van de spiegeldynamometer.

Bij de berekening kan men volstaan met het beschouwen van een kwart gedeelte van de dynamometer. De horizontale verplaatsing van B_1 ten opzichte van A_1D bedraagt:

$$\delta_h = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} Ha^2c + \frac{1}{6} Pabc + \frac{1}{2} Mac \right) \dots (53)$$

Het portaal tje C_1-C_2 werkt als een veer, zodat:

$$H = -\kappa \delta_h \dots (54)$$

De veerconstante κ volgt uit de afmetingen van het portaal tje.

Uit symmetrie-overwegingen is de hoekverdraaiing van B_1 gelijk aan nul, zodat:

$$\varphi = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} Hac + \frac{1}{4} Pbc + Mc \right) = 0 \dots (55)$$

waaruit volgt

$$M = -\frac{1}{4} Ha - \frac{1}{4} Pb \dots (55')$$

Substitutie van (54) in (55') in (53) levert:

$$-\frac{H}{\kappa} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24} Ha^2c + \frac{1}{24} Pabc \right) \dots (56)$$

Stelt men:

$$\frac{EI}{\kappa} = \beta \dots (57)$$

dan vindt men:

$$H = -\frac{abc}{a^2c + 24\beta} P \dots (58)$$

Bepaling van de veerconstante van het portaal tje.

De enige voorwaarde voor het portaal tje is dat φ in C_1 gelijk is aan nul of wel:

$$\varphi = \frac{1}{EI'} \left\{ \frac{1}{4} Hs(s+2t) + M'(s+t) \right\} = 0 \dots (59)$$

zodat

$$M' = -\frac{1}{4} Hs \frac{s+2t}{s+t} \dots (59')$$

De horizontale verplaatsing δ_h van punt C_1 bedraagt:

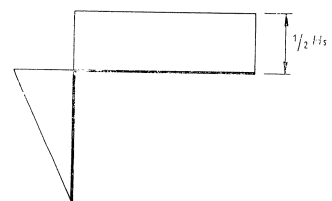
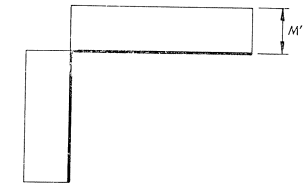
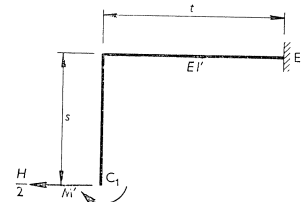
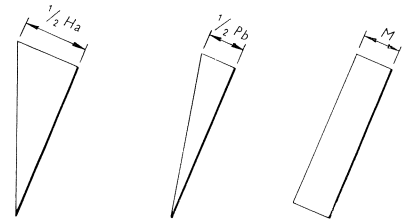
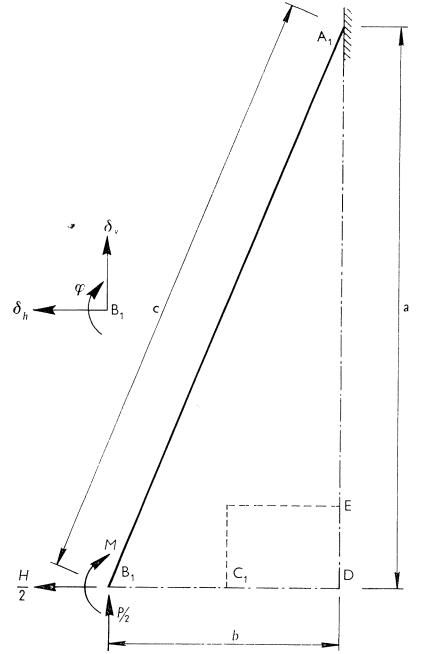
$$\delta_h = \frac{1}{EI'} \left\{ \frac{1}{6} Hs^2(s+3t) + \frac{1}{2} M's(s+2t) \right\} \dots (60)$$

Substitutie van (59') in (60) levert:

$$\begin{aligned} \delta_h &= \frac{1}{EI'} \left\{ \frac{1}{6} Hs^2(s+3t) - \frac{1}{8} Hs^2 \frac{(s+2t)^2}{(s+t)} \right\} = \\ &= \frac{1}{24EI'} Hs^3 \frac{s+4t}{s+t} \dots (61) \end{aligned}$$

De veerconstante κ wordt in dit geval bepaald door:

$$H = +\kappa \delta_h \dots (54')$$

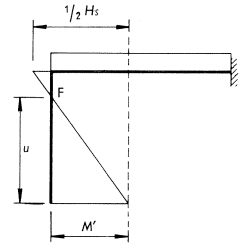


Substitutie van (54') en (61) in (57) geeft voor β :

$$\beta = \frac{EI}{\kappa} = \frac{s^3 s + 4t EI}{24 s + t EI} \dots \dots \dots (62)$$

Uit (58) volgt dan de waarde van H :

$$H = - \frac{abc}{a^2c + s^3 \frac{s+4t}{s+t} \frac{I}{I'}} P \dots \dots \dots (63)$$



Tenslotte dient nog onderzocht te worden, waar de spiegeltjes op het portaalje C_1-C_2 moeten worden geplaatst om een maximale hoekverdraaiing te verkrijgen.

Uit formule (59') volgt dat deze punten gelegen zijn op een afstand $u = \frac{s+2t}{2s+2t} s$ vanaf C .

Daar de spiegeltjes in de krommingsnulpunten van het portaalje zijn geplaatst, hebben onnauwkeurigheden in de afstand u hier de minste invloed. De grootte van de hoekverdraaiing in F bedraagt:

$$\varphi_F = \frac{1}{2} \frac{M'}{EI'} u = \frac{1}{16} \frac{H}{EI'} \left(s \frac{s+2t}{s+t} \right)^2 \dots \dots \dots (64)$$

Op het scherm leest men af $\Delta\varphi = 2\varphi_F$, zodat:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{8} \frac{s^2(s+2t)^2}{s+t} \frac{abc}{a^2c(s+t)EI' + s^3(s+4t)EI} P \dots \dots \dots (65)$$

waarmede de kracht is uitgedrukt in de gemeten hoekverdraaiing.

De verticale verplaatsing van B_1 bedraagt: $\delta_v = \frac{b}{a} \delta_h$

De verplaatsing van A_1 ten opzichte van A_2 is gelijk:

$$\delta_v' = \frac{2b}{a} \delta_h \dots \dots \dots (66)$$

Substitutie van (61) en (63) in (66) geeft:

$$\delta_v' = \frac{1}{12} s^3(s+4t) \frac{b^2c}{a^2c(s+t)EI' + s^3(s+4t)EI} P \dots \dots \dots (67)$$

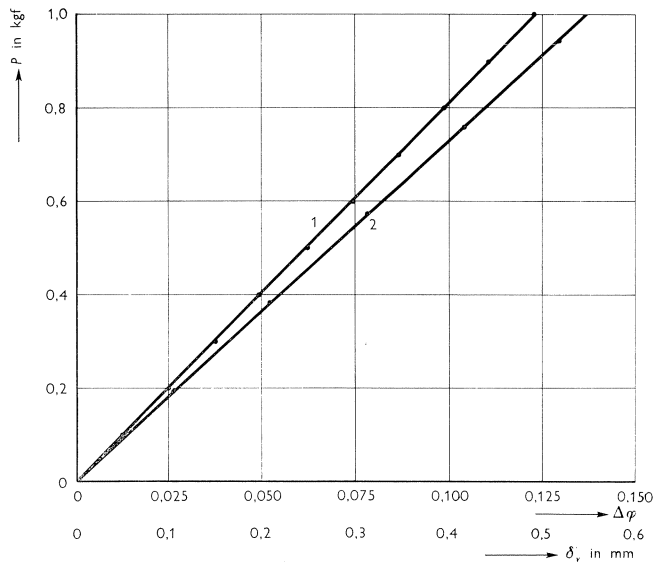


Fig. 27. Ijkgrafiek voor het prototype van de spiegdynamometer.

1. Verband tussen de kracht en de hoekverdraaiing.
2. Verband tussen de kracht en de verplaatsing in de richting van de kracht.

Bij een schermafstand van 6 m veroorzaakt een kracht van 1 gf dus een aflezing δ ter grootte van 1,5 mm.

3 Uitgevoerde proeven

3.1 Modelregels

Het model en de belasting moeten aan bepaalde voorwaarden voldoen, wil men de verkregen meetresultaten kunnen omwerken tot bruikbare gegevens voor de werkelijkheid. Deze voorwaarden kunnen gemakkelijk worden bepaald volgens de door Buckingham ontwikkelde methode van de „dimensional analysis”¹⁾. Uitgaande van een geometrisch verkleind model waar de belasting op dezelfde wijze wordt aangebracht als bij de werkelijke constructie komt het hierop neer, dat men de grootheden dient te bepalen die het gedrag van de constructie karakteriseren. Is de differentiaalvergelijking die het probleem beheerst bekend, dan kunnen hieruit de benodigde gegevens worden verkregen; in de overige gevallen moet men trachten deze grootheden op andere wijze te bepalen.

De materiaaleigenschappen zijn vastgelegd door de elasticiteitsmodulus E , de contractiecoëfficiënt ν en het volumegewicht γ . Bij sommige constructies wordt de krachtsverdeling eveneens beïnvloed door de ondergrond. Dit gedrag kan bij benadering worden gekarakteriseerd door een tegendrukcoëfficiënt k . Voor de meting van bovenstaande grootheden zijn slechts 2 grondeenheden nodig, namelijk een kracht P en een lengte l , waarmee de belasting en de schaal van de constructie kunnen worden gekarakteriseerd. Met behulp van deze grondeenheden kan men de volgende onafhankelijke dimensieloze groepen vormen:

$$\frac{P}{El^2}, \frac{kl}{E}, \frac{\gamma l}{E}, \nu, \dots \dots \dots (68)$$

Andere groepen bestaan uit produkten van bovenstaande grootheden en zijn dus niet onafhankelijk. De grootheden, die men wenst te bepalen, worden nu eveneens in dimensieloze groepen ondergebracht, b.v. $\frac{\sigma l^2}{P}, \frac{\delta}{l}, \varepsilon, \varphi, \frac{R}{P}$, resp. voor de spanning σ , de verplaatsing δ , de rek ε , de hoekverdraaiing φ en de oplegreactie R .

De spanning in een punt kan nu als volgt worden uitgedrukt als functie van de belasting en de eigenschappen van constructie en ondergrond:

$$\frac{\sigma l^2}{P} = f_1 \left(\frac{P}{El^2}, \frac{kl}{E}, \frac{\gamma l}{E}, \nu, \dots \right) \dots \dots \dots (69)$$

Hierin stelt f_1 een functie voor, waarvan de mathematische vorm veelal niet te bepalen is; de functie is echter voor elk geval eenduidig bepaald; het model

¹⁾ Zie voor een uitvoeriger beschrijving: GOODIER, J. N., Dimensional analysis. Handbook of experimental stress analysis. HETÉNYI, M., appendix II, John Wiley & Sons, New York 1950 of: IBC-mededelingen 3 (1955) no. 4.

moet te hulp worden geroepen om dit verband vast te leggen. Voor de overige grootheden vindt men evenzo:

$$\frac{\delta}{l} = f_2(\dots); \quad \varepsilon = f_3(\dots) \text{ enz.}$$

Daar de bovenstaande uitdrukkingen dimensieloos zijn, gelden zij voor alle systemen van eenheden en zijn zij zowel voor het model als voor de werkelijke constructie toe te passen. Zorgt men nu dat de grootte van de onafhankelijke dimensieloze groepen in model en werkelijkheid dezelfde zijn, dan zijn eveneens de dimensieloze groepen voor de gelijktokens dezelfde, waarin dus de te onderzoeken grootheden zijn verwerkt. Geeft men de modelgrootheden aan met een index m en de grootheden van de werkelijke constructie met een index w en stelt men $l_w/l_m = \mu$, dan volgen uit de groepen (68) onderstaande voorwaarden:

$$P_m = \frac{E_m}{E_w} \frac{1}{\mu^2} P_w \dots \dots \dots (70)$$

$$k_m = \frac{E_m}{E_w} \mu k_w \dots \dots \dots (71)$$

$$\gamma_m = \frac{E_m}{E_w} \mu \gamma_w \dots \dots \dots (72)$$

$$\nu_m = \nu_w \dots \dots \dots (73)$$

Voor de te onderzoeken grootheden geldt dan:

$$\sigma_m = \frac{P_m}{P_w} \mu^2 \sigma_w = \frac{E_m}{E_w} \sigma_w \dots \dots \dots (74)$$

$$\delta_m = \frac{1}{\mu} \delta_w \dots \dots \dots (75)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_w \dots \dots \dots (76)$$

$$\varphi_m = \varphi_w \dots \dots \dots (77)$$

$$R_m = \frac{P_m}{P_w} R_w = \frac{E_m}{E_w} \frac{1}{\mu^2} R_w \dots \dots \dots (78)$$

Is dus aan (70) tot en met (73) voldaan, dan zijn de waarden van ε en φ in model en werkelijkheid aan elkaar gelijk. De overige grootheden moeten worden omgerekend. De spanningen bij de werkelijke constructie kunnen uiteraard ook rechtstreeks worden bepaald uit $\sigma_w = E_w \varepsilon$.

In de voorgaande beschouwingen is aangenomen dat de elasticiteitsmodulus E en de tegendrukcoëfficiënt k constante grootheden zijn.

Dit is echter geenszins noodzakelijk; in plaats van $\frac{\sigma}{E} = \varepsilon$ kan men bij een niet rechtlijnig verlopend σ - ε -diagram schrijven:

$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon - F_1(\varepsilon) \dots \dots \dots (79)$$

waarin $F_1(0) = 0$ zodat E de tangentmodulus in de oorsprong voorstelt.

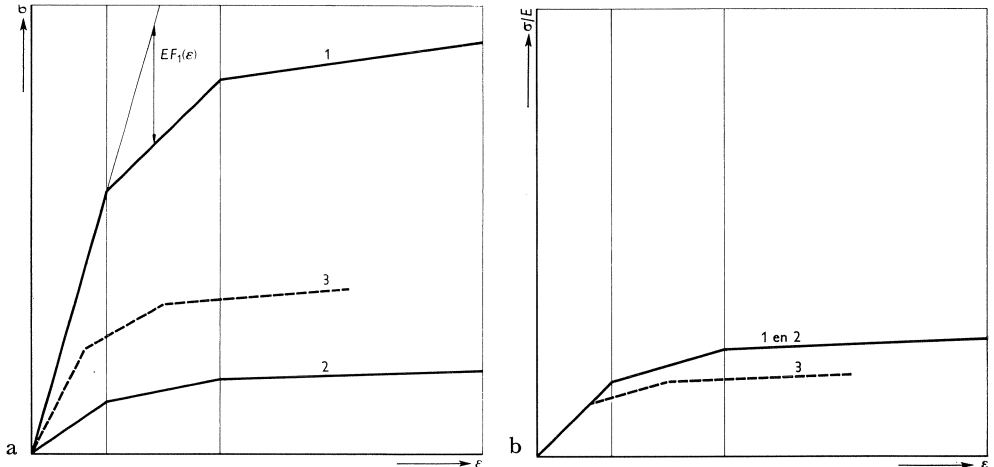


Fig. 28. a. Niet lineair verlopende σ - ε -diagrammen.
 b. De diagrammen van fig. 28a uitgezet als dimensieloze betrekking.
 1 en 2 voldoen aan (79); 3 voldoet aan (80); $c_1 = 10/7$.

Ook deze betrekking is weer dimensieloos. Het σ - ε -diagram van het modelmateriaal moet een affiene transformatie zijn van dat van het werkelijke materiaal, zodat bij het modelmateriaal vergelijking (79) ook de volgende gedaante mag aannemen:

$$\frac{\sigma}{E} = c_1 \varepsilon - F_1(c_1 \varepsilon) \dots \dots \dots (80)$$

De tangentmodulus wordt nu voorgesteld door $c_1 E$ waarin c_1 constant is (zie fig. 28).

Voor de tegendrukcoëfficiënt kan men eveneens een dergelijke dimensieloze betrekking opstellen:

$$\frac{\sigma'}{kl} = \frac{c_1 \delta - F_2(c_1 \delta)}{l} \dots \dots \dots (81)$$

waarin σ' de spanning in de ondergrond voorstelt en waarin $F_2(0) = 0$.

Om in het model analoge verschijnselen te verkrijgen als in de werkelijke constructie is het nu niet meer mogelijk de grootte van de dimensieloze groepen bij model en werkelijkheid gelijk te houden. Uit fig. 28b volgt dat de modelbelastingen met een factor $1/c_1$ moeten worden vermenigvuldigd zodat de voorwaarden (70) en (72) overgaan in:

$$P_m = \frac{1}{c_1} \frac{E_m}{E_w} \frac{1}{\mu^2} P_w \dots \dots \dots (70')$$

$$\gamma_m = \frac{1}{c_1} \frac{E_m}{E_w} \mu \gamma_w \dots \dots \dots (72')$$

De voorwaarden (71) en (73) blijven onveranderd.

Alle vervormingen en spanningen in het model worden dan eveneens vermenigvuldigd met de factor $1/c_1$ zodat de uitdrukkingen (74) t/m (78) overgaan in:

$$\sigma_m = \frac{1}{c_1} \frac{E_m}{E_w} \sigma_w \dots \dots \dots (74')$$

$$\delta_m = \frac{1}{c_1} \frac{1}{\mu} \delta_w \dots \dots \dots (75')$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{c_1} \varepsilon_w \dots \dots \dots (76')$$

$$\varphi_m = \frac{1}{c_1} \varphi_w \dots \dots \dots (77')$$

$$R_m = \frac{1}{c_1} \frac{E_m}{E_w} \frac{1}{\mu^2} R_w \dots \dots \dots (78')$$

Het niet gelijk houden van de dimensieloze groepen in model en werkelijkheid legt echter ook beperkingen op. Men kan nl. de volgende constructie-typen onderscheiden:

- a. Het meest voorkomende type waarbij de vervormingen recht evenredig zijn met de belastingen, indien het σ - ε -diagram van het materiaal voldoet aan de Wet van HOOKE. Een eventuele wijziging in de spanningsverdeling kan alleen worden veroorzaakt door het niet rechtlijnig verlopen van het σ - ε -diagram.
- b. Het type waarbij de vervormingen niet evenredig zijn met de belastingen ook al voldoet het σ - ε -diagram van het materiaal aan de Wet van HOOKE. De spanningsverdeling is steeds afhankelijk van de grootte van de belasting, zoals b.v. bij een excentrisch gedrukte of getrokken staaf.

Bij een willekeurige waarde van c_1 kunnen alleen de onder a genoemde problemen worden onderzocht. Bij de onder b genoemde problemen dient $c_1 = 1$ te zijn. Voldoet het materiaal tevens aan de Wet van Hooke, dus $F_1(\varepsilon) = 0$, dan behoeft men bij de onder a genoemde problemen niet meer te voldoen aan voorwaarde (70); brengt men immers een belasting λP_m aan dan worden de vervormingen eveneens $\lambda \times$ vergroot, zodat formule (70) dan alleen geldt voor het bepalen van de factor λ . Voorwaarde (71) is alleen van belang als de ondergrond de spanningsverdeling beïnvloedt. Past men in een dergelijk geval een modelmateriaal toe waarvan het σ - ε -diagram voldoet aan (80) dan moet het σ' - δ -diagram van de ondergrond bij het model zowel voldoen aan (71) als aan (81), waarbij de faktor c_1 in (80) en (81) gelijk moet zijn.

Voorwaarde (72) is alleen van belang als de belastingen door volumegewichten worden gevormd. Indien de vervormingen evenredig zijn met de belasting kan men de invloeden van het volumegewicht en van de nuttige belasting afzonderlijk onderzoeken, tenzij men de volumegewichten vervangt door belastingen op het oppervlak.

Wordt de belasting gevormd door korrelachtige materialen, zoals erts of granen, dan speelt behalve het volumegewicht ook de samenhang van het materiaal een rol. Deze samenhang bepaalt men door middel van celproeven of triaxiaalproeven. Uitgaande van een

constante hoofdspanning σ_1 bepaalt men de waarde $\sigma_2 = \sigma_3$ van de beide andere hoofdspanningen, waarbij het materiaal gaat afschuiven. De omhullende van Mohr van deze spanningscirkels wordt als karakteristiek voor het betreffende materiaal beschouwd (zie fig. 29). Deze omhullende moet bij verkleining van schaal geldig blijven, dus zowel de hoek van inwendige wrijving als de verhouding tussen σ en τ moet constant blijven. Bedenkt men dat de spanningen ontstaan door het volumegewicht van het materiaal, dus $\sigma_v = \gamma l$, dan levert dit de volgende voorwaarden:

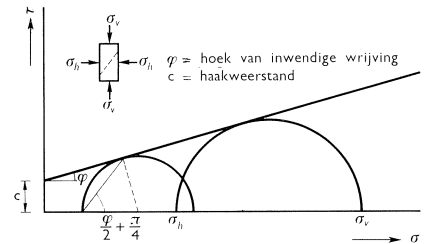


Fig. 29. Omhullende van Mohr voor een korrelachtig materiaal.

$$\varphi_m = \varphi_w \dots \dots \dots (82)$$

$$c_m = \frac{\gamma_m}{\gamma_w} \frac{1}{\mu} c_w \dots \dots \dots (83)$$

Uit (83) volgt dat men bij het model i.h.a. niet hetzelfde korrelmateriaal kan toepassen als bij de werkelijke constructie, daar de haakweerstand dan de factor μ te groot is, waardoor foutieve uitkomsten kunnen optreden. Indien men niet aan (83) kan voldoen, zal men moeten trachten een materiaal te vinden waarvan de haakweerstand vrijwel gelijk is aan nul, aangezien bij de werkelijke constructie de haakweerstand klein is ten opzichte van de optredende spanningen.

Veelal zal het niet mogelijk zijn aan voorwaarde (73) te voldoen. Een verschil in dwarscontractiecoëfficiënt voor het materiaal van de werkelijke constructie en het model heeft i.h.a. echter weinig invloed op de vervormingen. In vele gevallen is men ondanks dit verschil toch in staat uit de modelresultaten de juiste spanningsverdeling in de werkelijke constructie te berekenen. In de gevallen dat dit niet mogelijk is blijven de verschillen gering.

Heeft men tenslotte reden om aan te nemen dat bepaalde groepen weinig invloed hebben dan kan men deze laten vervallen.

3.2 Enkele uitgevoerde modelproeven

3.2.1 Ertsbunker

De bunker volgens fig. 30 is moeilijk te berekenen, enerzijds door de ingewikkelde vorm, anderzijds omdat niet bekend is op welke wijze de druk van het erts op de schuine vlakken van de constructie verloopt. Door in het model een overeenkomstige „erts”-belasting aan te brengen, kunnen de hierdoor veroorzaakte vervormingen in het model worden gemeten, hoewel de juiste drukverdeling nog steeds onbekend is. Bij de gebruikelijke modelmaterialen

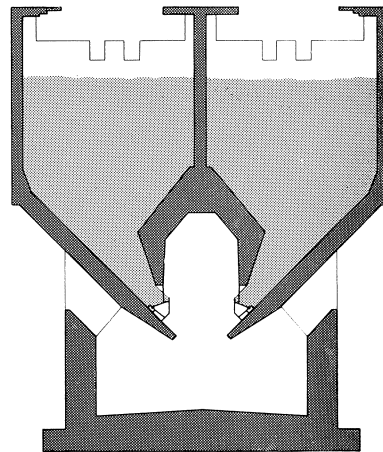
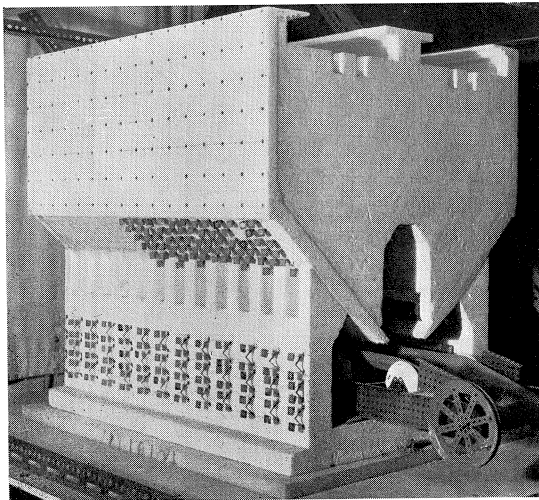


Fig. 30. Ertsbunker.

zijn bij de geringe druk die het „modelerts” opwekt, geen vervormingen te meten. Daar zowel buigspannings- als vlakspanningstoestanden in de wanden optreden, is het ook niet mogelijk de wanden uiterst dun uit te voeren, daar hierdoor de verhouding tussen de buigstijfheid en de rekstijfheid wordt verstoord. In feite is dit onderzoek aanleiding geworden tot het toepassen van polystyreenschuim. Er moest immers een materiaal worden gevonden met een uiterst lage elasticiteitsmodulus. Proeven met lithargel¹⁾ bleken niet tot een hanteerbaar model te leiden tengevolge van de grote vervormingen door het eigen gewicht van het model. Een extra moeilijkheid werd veroorzaakt door het zoeken naar een geschikt vulmateriaal dat het erts zou kunnen vervangen.

3.2.2 Machinefundament

In de zware metaalindustrie wordt dikwijls gebruik gemaakt van verrijdbare machines om werkstukken te fraisen of te kotten. De toleranties in de hoekverdraaiing zijn uiterst klein, t.w. ca. 0,01 à 0,02 mm/m'. Het is dan be-

¹⁾ Lithargel is een samenstelling van loodglit, glycerine, gelatine en water. Het materiaal heeft een hoog volumegewicht en een zeer lage elasticiteitsmodulus; het maakt een indruk als zacht vlakgom.

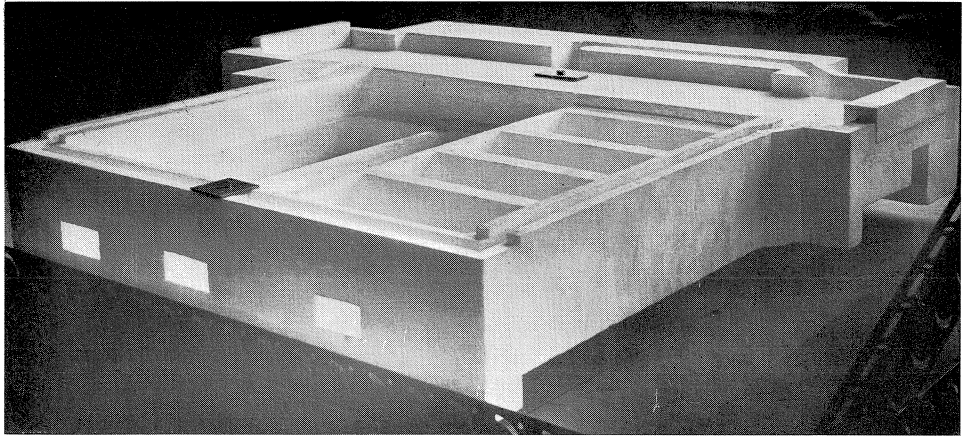


Fig. 31. Machinefundament.

langrijk dat het fundament waarover de machine beweegt en de aangrenzende steltafel voor de werkstukken niet ten opzichte van elkaar verdraaien of verplaatsen als de machine verrijdt. Behalve de vorm van de betonconstructie speelt ook de gesteldheid van de ondergrond en de wijze van funderen een grote rol.

In fig. 31 is een model van een dergelijk fundament weergegeven. Bij het model meet men de hoekverdraaiingen, waaruit men met behulp van een stangenkromme zeer nauwkeurig de zakkingslijn kan bepalen. Daar de vervormingen in werkelijkheid zeer klein zijn, zal de constructie zich elastisch gedragen. In het model kunnen deze vervormingen sterk worden vergroot. Blijkt de stijfheid van de constructie onvoldoende, dan kan men het model wijzigen en vervolgens nagaan of de vervormingen binnen de gestelde eisen blijven.

Een moeilijkheid wordt geleverd door de tegendruk van de grond die slechts bij benadering bekend is. Uitgaande van diepsonderingen zal men een zekere k -waarde kunnen aanhouden. De tegendruk van de ondergrond of van palen kan in het model worden gerealiseerd door blokjes schuimrubber toe te passen. Dikte en oppervlakte hiervan kunnen zodanig worden gevarieerd, dat aan voorwaarde (71) wordt voldaan. Het variëren van de k -waarde als functie van de tijd en de belasting is echter vrijwel niet te verwezenlijken. Men kan dan slechts stapsgewijs werken en de ondergrond in het model geheel of gedeeltelijk vervangen door een laag schuimrubber die een andere k -waarde bezit. Vloeiverschijnselen van de grond zou men kunnen verwezenlijken door het toepassen van schuimplastic, daar dit een duidelijk „vloegebied” bezit. Men is dan echter niet meer vrij in de keuze van de grootte van de modelbelasting.

De invloed van de temperatuur tenslotte is in een zodanig model niet na te gaan. In de werkelijke constructie zal men plaatselijke verwarming door bijvoorbeeld invallend zonlicht in het algemeen moeten vermijden.

3.2.3 Hoge wand met openingen

Bij hoogbouw zijn voor het afvoeren van de windkrachten in een bepaalde richting dikwijls slechts wanden met muuropeningen aanwezig. Men zal de windkrachten over de diverse wanden verdelen naar verhouding van hun wandstijfheid. Muren met onregelmatige openingen zoals in fig. 32 zijn moeilijk te berekenen, maar daarentegen uiterst eenvoudig in een model te verwezenlijken en naar keuze te variëren. Uit de vervormingen, gemeten met krommingsspiegeltjes, kan men globaal de spanningen in de wanddelen berekenen. Uiteraard is het eveneens mogelijk deze direct met rekmetertjes op te meten.

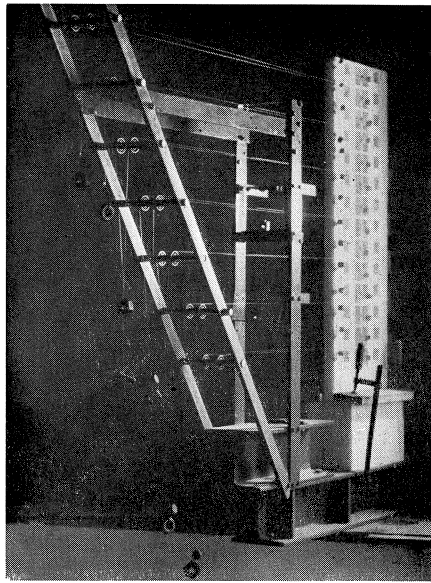
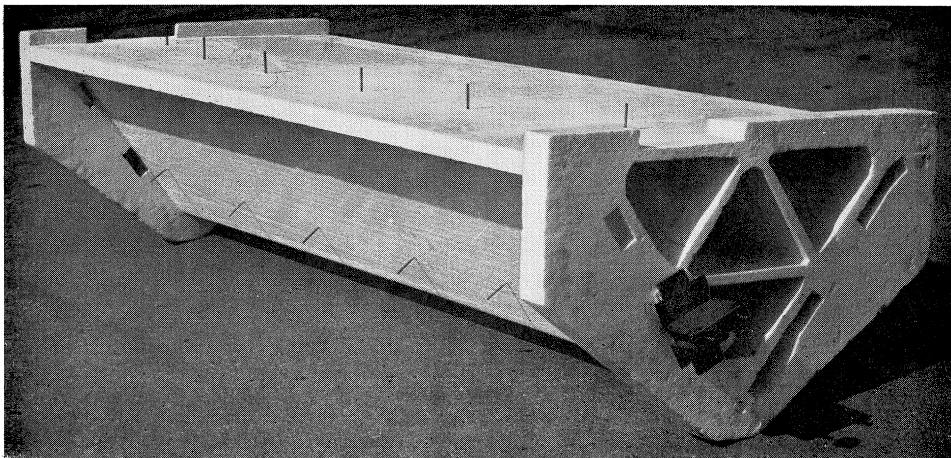


Fig. 32. Hoge wand met openingen.

3.2.4 Stuw in het Haringvliet

Nabla-ligger (zie fig. 33). Dit elastische model is vervaardigd om de invloed van de voorspanning op de momenten in dwarsrichting na te gaan, daar dit bij het betonnen model op moeilijkheden stuitte. De voorspanning is ter weerszijden van de wanden aangebracht door staaldraden via stalen staafjes – met gips in de wand bevestigd – te geleiden. De grootte van de voorspanning werd gemeten door de lengteverandering van een veer. Door de grote spiegel onder een bepaalde hoek te stellen konden steeds twee vlakken gelijktijdig worden gemeten (vandaar de afwijkende vorm van de eindschotten ten opzichte van de werkelijkheid).

Fig. 33. Nabla-ligger.



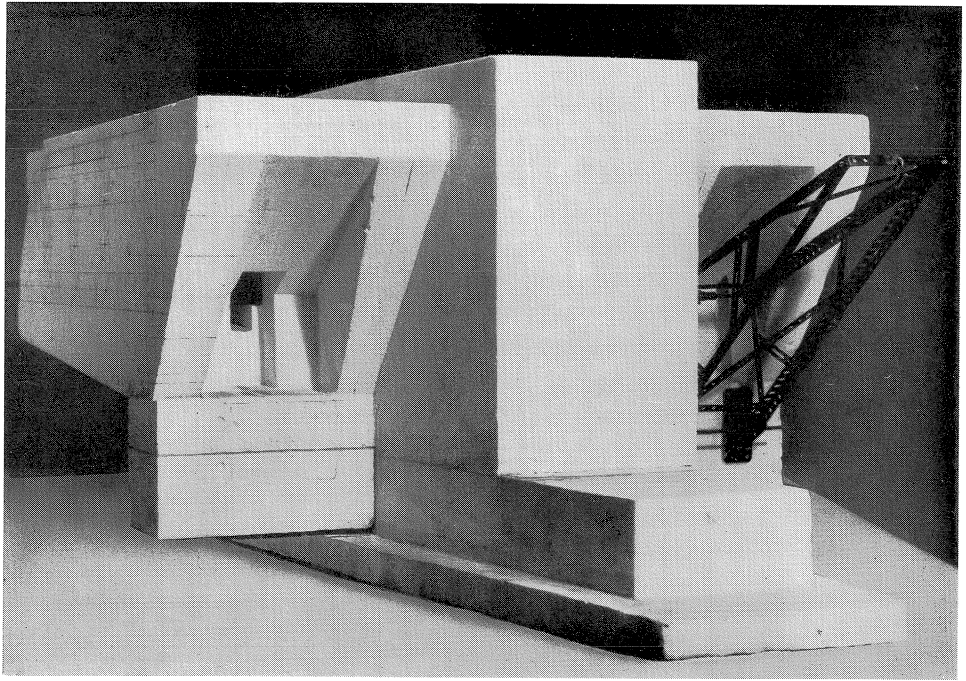
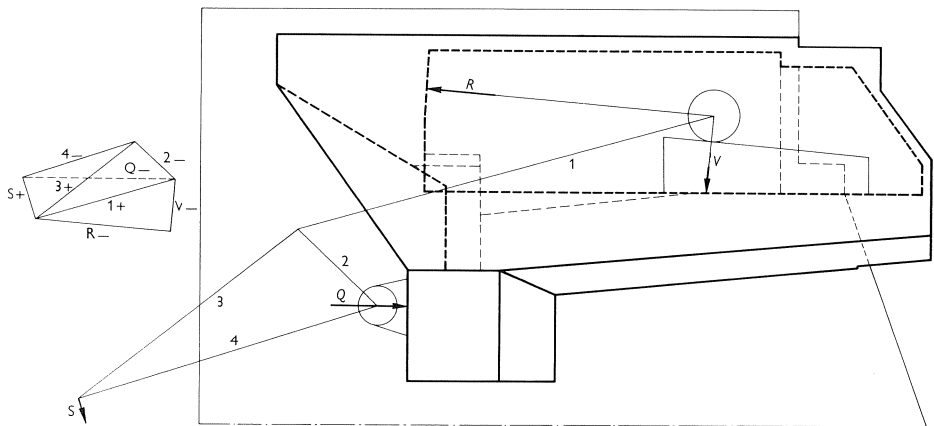


Fig. 34a. Machinekamer spuisluis Haringvliet.

Fig. 34b. Doorsnede.



Machinekamer De bewegingswerktuigen voor het heffen van de segment-schuiven van de stuw zijn ondergebracht in machinekamers volgens fig. 34.¹⁾ Bij het heffen van de schuiven wordt de constructie op gecompliceerde wijze belast (zie fig. 34b). De wanden en het dak moeten zeer grote trekkrachten overbrengen. In de massieve delen treden grote buigende en wringende momenten op. Slechts door zeer uitvoerige metingen kan men een redelijke indruk van de krachtsverdeling krijgen, temeer daar de krachtsverdeling afhangt van de hoogte waartoe de schuiven worden geheven.

¹⁾ Zie ook fig. 1 in Heron 9 (1961) no. 2. BOON, J. en A. G. VAN RIEL, Modelonderzoek van de Nabla-ligger.

3.2.5 Hypparschalen

Het model volgens fig. 35 is vervaardigd om de vervormingen van de constructie te kunnen nagaan bij asymmetrische belasting (wind en ophopingen van sneeuw). Voorts kan op eenvoudige wijze worden nagegaan, wat de invloed is van de plaats en het aantal van eventuele verstijvingsliggers. Deze paddestoelvormige hypparschaal maakt deel uit van een groot complex. Tussen de diverse „paddestoelen” bevinden zich lichtkappen. De grootte van de windbelasting kan slechts door middel van windtunnelproeven worden onderzocht (uitgevoerd door het Nat. Luchtvaartlaboratorium). Men kan dan niet volstaan met één „paddestoel” maar moet het gehele complex nabootsen, daar de omgeving grote invloed op de resultaten heeft. Dit complex is weergegeven in fig. 36. Drie „paddestoelen” en enkele lichtkappen zijn van hout vervaardigd, aangezien gemeten moet worden met pitotbuisjes die door het materiaal heen tot aan het oppervlak van de constructie reiken. Het polystyreenschuim is te zacht om hierin deze buisjes te kunnen aanbrengen. Voor de omgeving kan dit materiaal echter uitstekend worden gebruikt daar de vervaardiging van deze blokjes met een bovenzvlak volgens een hyperbolische paraboloide aanmerkelijk sneller kan geschieden van polystyreenschuim dan van hout.

Fig. 35.
Hypparschaal.

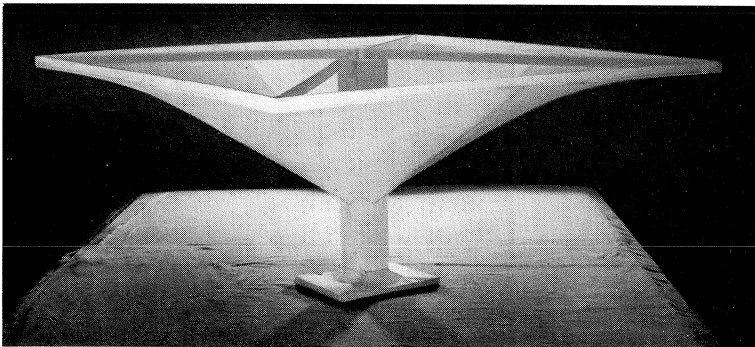
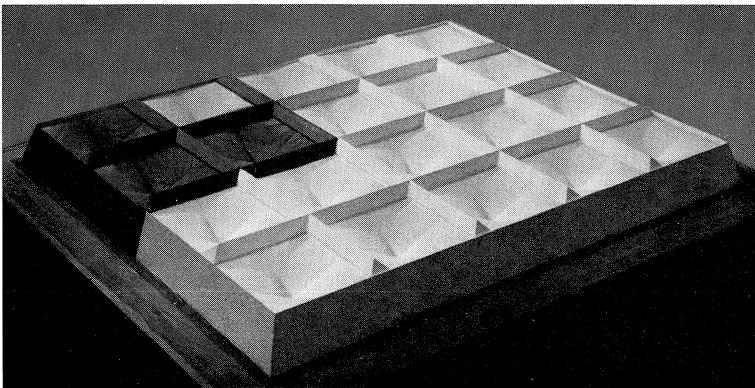


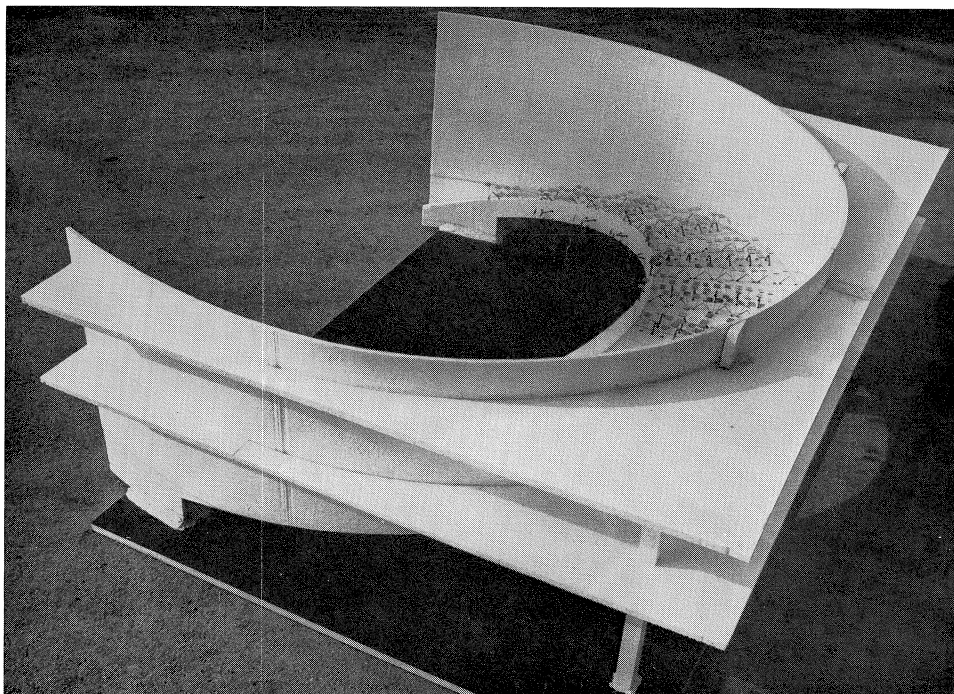
Fig. 36.
Complex
hypparschalen
voor beproeving
in de wind-
tunnel.



3.2.6 Balkon

Het balkon en de achterwand volgens fig. 37 hebben beide de vorm van een regelvlak. Alle vormen worden direct uit grote blokken gesneden en passen aan elkaar. Het onderzoek geeft een inzicht in de krachswerking en de vervormingen. Men heeft in dit geval zowel plaat-, als schaalwerking. Door langs de buitenomtrek van de wand voorspanning ter hoogte van het balkon aan te brengen, kan ook het effect van deze voorspanning worden onderzocht.

Fig. 37. Vrijdragend balkon.



3.2.7 Oplegconstructie

De constructie volgens fig. 38 wordt geprefabriceerd en dient als oplegging voor een voorgespannen brug in moeilijk toegankelijk gebied. Deze oplegconstructies laat men om de in aanbouw zijnde pijlers zakken; na het op hoogte komen van de pijlers worden de oplegconstructies omhoog gehesen en d.m.v. voorspanning vast met de pijlers verbonden.

De ongunstigste krachtsverdeling in de oplegconstructie treedt op bij het ophijsen t.g.v. de werking van het eigen gewicht. Het voornemen bestaat in het model een overeenkomstige maar tegengesteld gerichte belasting als door het eigen gewicht aan te brengen door het model in een vloeistof onder te dompelen. Door de opwaartse druk van de vloeistof neemt het schijnbare

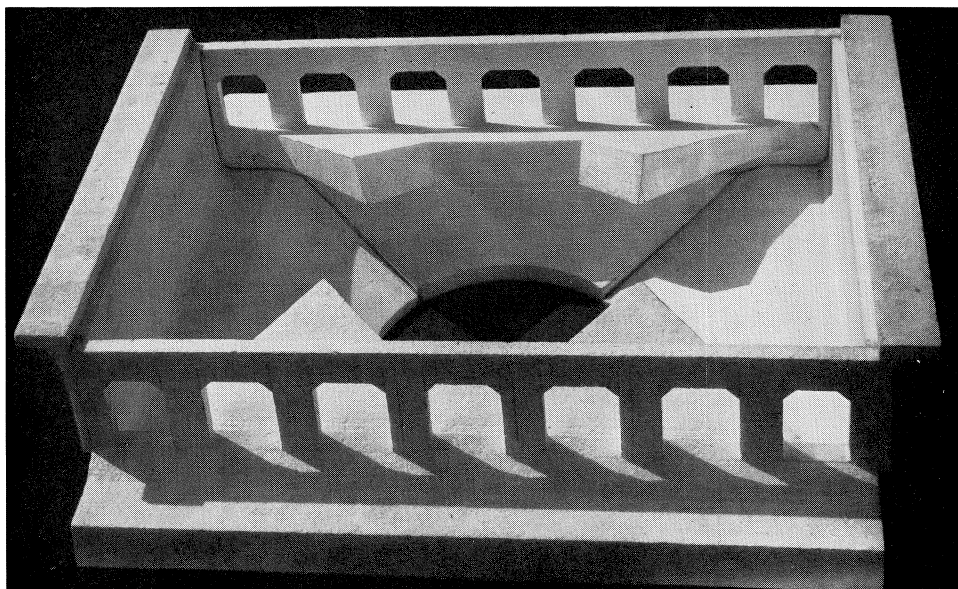


Fig. 38. Oplegconstructie.

volume gewicht sterk toe zodat grote vervormingen optreden. Het model is in een doorzichtige bak geplaatst zodat de van een beschermlaag voorziene spiegel tjes zowel rechtstreeks als via de grote spiegel kunnen worden afgelezen. De invloed van de straalbreking is te verwaarlozen daar de invalshoek vrijwel gelijk is aan nul.