

IR. F. K. LIGTENBERG
met medewerking van
A. C. VAN RIEL, H. J. VADER en IR. J. VAN LEEUWEN

ANALOGIE-MODEL TER BESTUDERING VAN KNIKVERSCHIJNSELEN IN HET ELASTO-PLASTISCHE GEBIED

U.D.C. 624.075.2

Een beschrijving wordt gegeven van een analogie-model, waarmede op betrekkelijk eenvoudige wijze een inzicht kan worden verkregen in het gedrag van centrisc en excentrisc gedrukte constructiedelen in het elasto-plastische gebied. Het model is toegepast bij een studie waarvan het resultaat is neergelegd in art. 47 van de G.B.V. 1962 (breukmethode). Een constructiedeel belast als vorenbedoeld, wordt voorgesteld door een op dezelfde wijze belast blok (het model) van licht materiaal dat drijft in een vloeistof. Aan de evenwichtstoestand, waarin het model bij de proef door gezegende belasting wordt gebracht, zijn door een eenvoudige analogie de vereiste gevolgtrekkingen ten aanzien van het beschouwde constructiedeel te ontlezen (spanningen in doorsneden, enz.).

0 Inleiding

In het vorige nummer van HERON (nr. 3/4-1962) zijn resultaten gepubliceerd van een uitvoerig onderzoek naar de sterkteberekening van gewapend betonkolommen volgens de breukmethode [1]*). Bij dit onderzoek is ook gebruik gemaakt van een model-analogie. Hoewel deze analogie reeds een aantal jaren geleden door een der auteurs was bestudeerd [2], had zich voor praktische doeleinden niet eerder een gelegenheid tot toepassing voorgedaan.

Thans echter bleken hiermede op weinig gecompliceerde wijze en met beperkte apparatuur zeer aantrekkelijke resultaten te kunnen worden verkregen. Ook bood de analogie waardevolle aspecten als steun voor beschouwingen inzake knikproblemen.

Hoewel de analogie niet slechts voor kolommen van gewapend beton, maar ook voor dergelijke constructiedelen in staal of ander materiaal bruikbaar is, is haar toepassing tot dusver tot gewapend betonkolommen beperkt gebleven; in dit artikel is dan ook in hoofdzaak de aldus opgedane ervaring beschreven, die heeft geleid tot de in de aanhef vermelde resultaten [1].

*) Cijfers tussen [] verwijzen naar de literatuuropgave, blz. 13.

1 Grondslag van het analogie-model

Een drijvend blok kan gebruikt worden om het gedrag van een doorsnede onder invloed van buiging en normaalkracht aanschouwelijk voor te stellen. Verticale krachten die op dat blok worden uitgeoefend maken dat het zóveel verder in de vloeistof wordt gedompeld, dat de op het blok uitgeoefende kracht wordt gecompenseerd door de opwaartse druk tengevolge van de waterverplaatsing.

Er bestaat een voor de hand liggende analogie tussen de opwaarts gerichte hydrostatische druk en de spanning in een doorsnede van gelijke vorm, en ook tussen de zakkingen ten opzichte van de oorspronkelijke stand van het blok en de rekken in overeenkomstige punten van de doorsnede. Om dit in te zien kan men een drijvend rechthoekig blok beschouwen (fig. 1), waarvan het bovenvlak evenwijdig aan het vloeistofoppervlak wordt gehouden.

Wordt op dit blok een kracht N' naar beneden uitgeoefend, dan zakt het blok zóveel dieper in de vloeistof weg, dat (zolang het bovenvlak het vloeistofoppervlak nog niet heeft bereikt) de zakking evenredig is met de kracht. Zodra het bovenvlak met de vloeistofspiegel samenvalt is de maximaal mogelijke waterverplaatsing – dus ook tegendruk – bereikt. Bij tegengesteld gerichte belastingen (naar boven) treedt uiteraard iets soortgelijks op.

Het last-zakkingsdiagram is in fig. 2 gegeven. De overeenkomst met het gedrag van een materiaal dat zich elastisch gedraagt en een uitgesproken vloeigrens heeft, is duidelijk.

Wordt het model vóór het beproeven zodanig belast door een initiële kracht dat het over de halve dikte m in de vloeistof is gedompeld, dan verschuift de horizontale as van fig. 2 in verticale zin en wel zodanig dat de figuur antimeetrisch wordt (zie fig. 3). Voorts kan N' uiteraard worden vervangen door de daarmee corresponderende gelijkmatig verdeelde drukspanning $\sigma' = \gamma z'$; evenzo N door $\sigma = \gamma z$. Op de assen kunnen dimensieloze grootheden worden uitgezet zoals in fig. 3 is aangegeven. Wanneer het σ - ε -diagram van staal, zoals dit is aangenomen in de G.B.V. 1962 art. 47 lid 1, eveneens dimensieloos wordt uitgezet (zie fig. 4), dan blijken de fig. 3 en 4 identiek te zijn. De zakking z' resp. de stijging z zijn analoog met de verkorting ε_a' resp. de verlenging ε_a . De halve dikte m komt overeen met de verkorting ε_e' behorende bij de stuikgrens, c.q. met de verlenging ε_e behorende bij de vloeigrens van het staal.

Op dezelfde wijze kan een σ - ε -diagram worden voorgesteld dat verloopt volgens een tweedegraads parabool. Hiertoe dient een, in verticale zin, driehoekige doorsnede van het model te worden toegepast. In fig. 5 is als voorbeeld een zodanige doorsnede op een rechthoekig grondvlak (driehoekig prisma) weergegeven. Fig. 6 geeft het verband tussen de belasting en de zakking z' resp. stijging z . Wordt vóór het beproeven op het prisma een zodanige initiële kracht aangebracht dat de onderzijde van het prisma juist de vloeistofspiegel raakt dan verschuift de horizontale as van fig. 6 zover in verticale zin dat fig. 7 ontstaat. Het verkregen diagram is dan identiek met het σ - ε -diagram

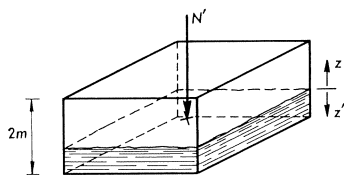


Fig. 1. Centrisch belast model.

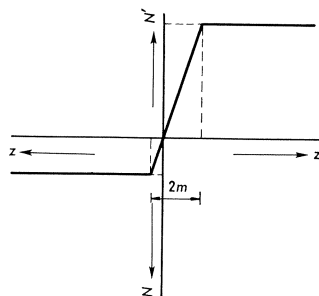


Fig. 2. Verband tussen N en z voor het model van fig. 1.

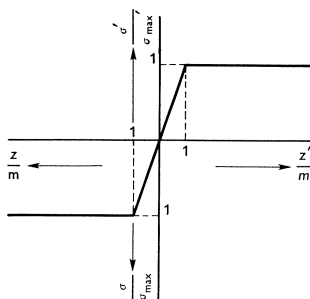


Fig. 3. Verband van fig. 2 met verschoven horizontale as (dimensieloos).

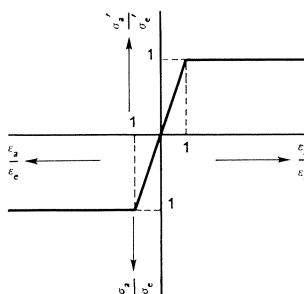


Fig. 4. σ - ϵ -diagram volgens de G.B.V. 1962 art. 47 lid 1 (dimensieloos).

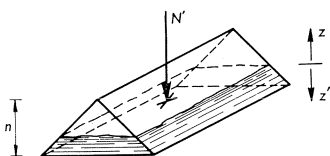


Fig. 5. Centrisch belast model.

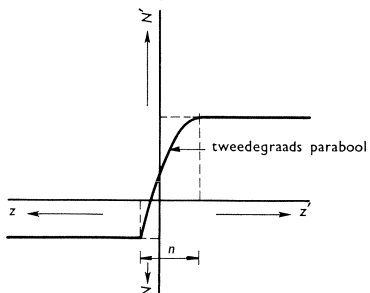


Fig. 6. Verband tussen N en z voor het model van fig. 5.

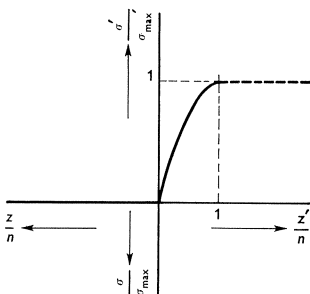


Fig. 7. Verband van fig. 6 met verschoven horizontale as (dimensieloos).

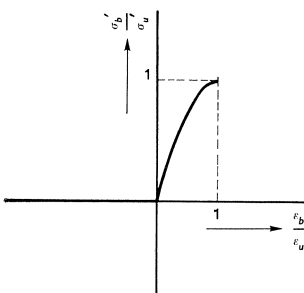


Fig. 8. σ - ϵ -diagram van beton volgens de G.B.V. 1962 art. 47 lid 1 (dimensieloos).

van beton, zoals dit in de G.B.V. 1962 art. 47 lid 1 is aangenomen – zie fig. 8 (het beton kan geen trekspanningen opnemen). De zakking z' is weer analoog met de verkorting ε_b' . De dikte n komt overeen met de maximale betonstuik $\varepsilon_u' = 3,50/00$.

Ook andere vormen van een σ - ε -diagram kunnen op soortgelijke wijze worden nagebootst.

Met een model, zoals besproken, kan het gedrag van een staal- resp. beton-doorsnede worden bepaald onder invloed van een centrische belasting als het grondvlak van het model gelijkvormig is met de te onderzoeken doorsnede.

Wanneer op het model van fig. 2 een verticale, neerwaarts gerichte kracht N' wordt uitgeoefend waarvan het aangrijpingspunt excentrisch ligt, dan zal het model een zodanig gekantelde stand innemen dat de resultante van de opwaartse druk evenwicht maakt met N' . Evenzo kan een opwaarts gerichte kracht N worden aangebracht. In fig. 9 is het model in een schuine evenwichtsstand weergegeven, waarbij van een begintoestand is uitgegaan waarin het model over de halve dikte m in de vloeistof was gedompeld. Met dit model

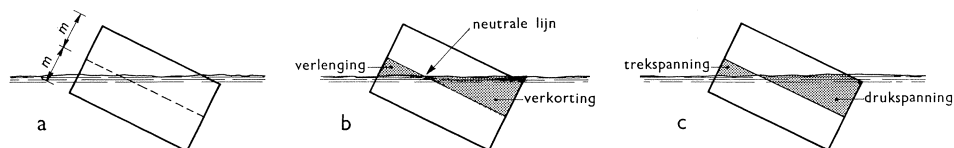


Fig. 9.

kan het gedrag van een staaldoorsnede, gelijkvormig met het grondvlak van het model, worden onderzocht onder invloed van een excentrische belasting. De volgende gegevens zijn over dit gedrag aan het model te ontleen:

- de vervormingen in elk punt van de doorsnede (= de mate van zakking of stijging) en de ligging van de neutrale lijn (zie fig. 9b);
- de kromming, weergegeven door de hoekverdraaiing van het model (zie par. 3).

In geval van staal is ook de vorm van het drukspanningsdiagram af te lezen (zie fig. 9c).

Hetzelfde geldt voor een betondoorsnede, met dien verstande dat deze tenminste één symmetrie-as moet bezitten. Het aangrijpingspunt van N' dient te zijn gelegen op deze as die tevens de buigingsrichting aangeeft. Loodrecht op deze richting heeft het model de reeds vermelde driehoekige doorsnede.

2 Model voor centrisch en excentrisch gedrukte doorsneden van gewapend beton

Voor de bepaling van de vervormingen en de spanningen bij centrisch en excentrisch gedrukte doorsneden van gewapend beton, die tenminste één symmetrie-as bezitten, is op eenvoudige wijze een model te vervaardigen uit

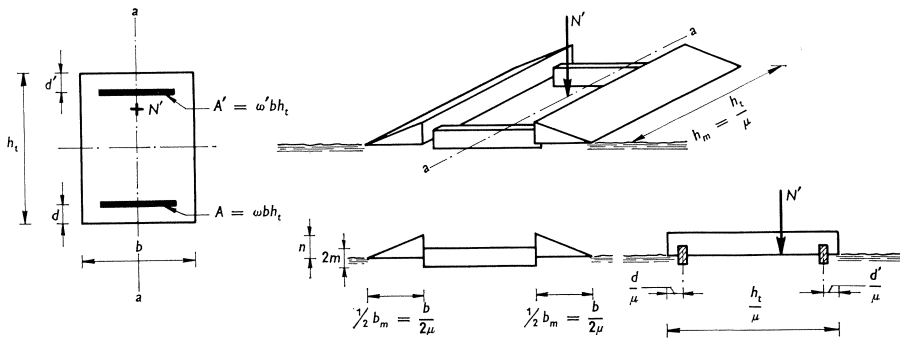


Fig. 10. Model voor een rechthoekige doorsnede van gewapend beton.

de onder 1 beschreven elementen. In fig. 10¹⁾ is een voorbeeld gegeven van een rechthoekige doorsnede ($\mu =$ schaalfactor). Op de aangegeven wijze belast zal het beton-aandeel in het model loodrecht op de as a-a een in verticale zin driehoekige doorsnede moeten bezitten. In het model is dit beton-aandeel, om model-technische redenen, in twee prisma's gesplitst. Het gezamenlijke grondvlak van de prisma's is gelijkvormig met de te onderzoeken doorsnede. De dikte n komt, zoals vermeld, overeen met de maximale betonstuik $\epsilon_{u'} = 3,50/100$. De beide verbindingsbalkjes stellen resp. de wapening A en A' voor. De plaats van de balkjes in het model komt overeen met die van de wapening in de werkelijke doorsnede. De dikte $2m$ correspondeert met de som $\epsilon_e + |\epsilon_e'|$ (voor b.v. QR 24 $\rightarrow 2 \times 1,1430/100$). Daar de elasticiteitsmodulus van staal enige malen groter is dan die van beton, zal ook de inhoud van de onderdelen die het staal voorstellen dienovereenkomstig moeten worden vergroot t.o.v. die van het beton-aandeel. Als de gewapend betonddoorsnede zodanig wordt belast dat overal een verkorting $\epsilon = \epsilon_{u'} = 3,50/100$ optreedt, dan is

$$N' = \sigma_{u'} b h_t + A \sigma_e' + A' \sigma_e'$$

of met $\omega = \frac{A}{b h_t}$ en $\omega' = \frac{A'}{b h_t}$:

$$\frac{N'}{\sigma_{u'} b h_t} = 1 + \omega \frac{\sigma_e'}{\sigma_{u'}} + \omega' \frac{\sigma_e'}{\sigma_{u'}} \dots \dots \dots (1)$$

Zijn de afmetingen van het beton-aandeel gekozen (dus $h_m = h_t/\mu$; $b_m = b/\mu$ en n) dan is de inhoud hiervan bekend. Deze inhoud wordt voorgesteld door de term 1 in verg. (1). Als de beton- en staalkwaliteit ($\sigma_{u'}$ en $\sigma_e' = |\sigma_e|$) zijn gegeven is uit het rechterlid de verhouding van de inhoud van het staal-aandeel tot die van het beton-aandeel te bepalen. Hiermede is dus de inhoud

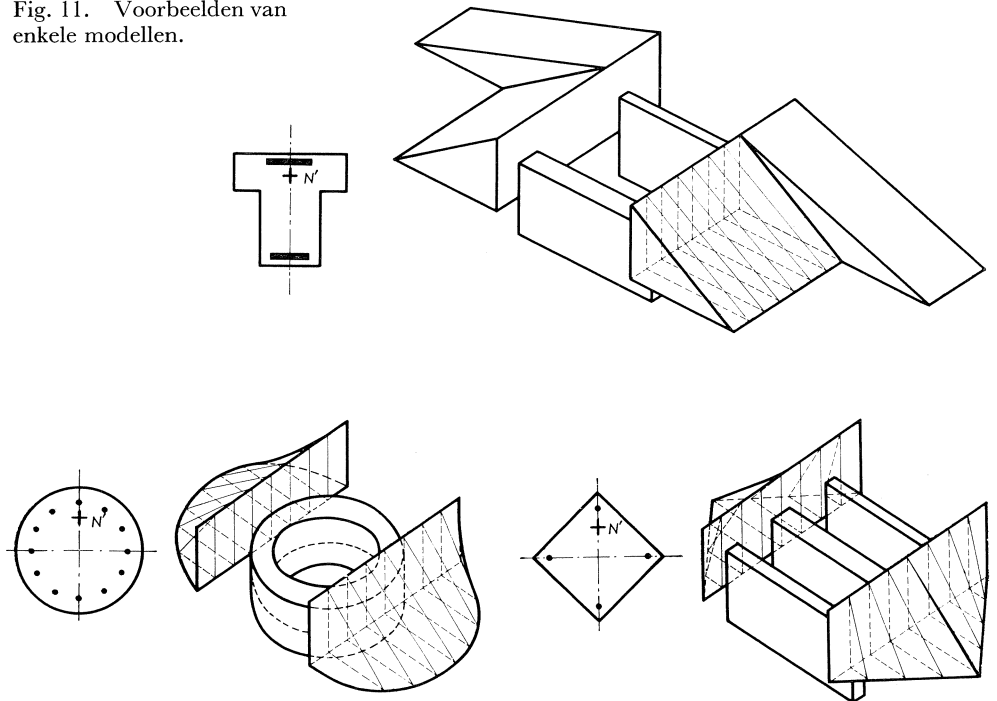
¹⁾ Waar nodig zijn de notaties van de G.B.V. 1962 aangehouden, met dien verstande dat $\omega = A/bh_t$ en niet $\omega = 100 A/bh_t\%$ zoals in de G.B.V. 1962.

van de balkjes bekend. De dikte $2m$ volgt uit de dikte n , zodat nog slechts de breedte en de lengte behoeven te worden bepaald. Om een zo juist mogelijke weergave van de werkelijkheid te verkrijgen zal de breedte van de balkjes ongeveer overeen moeten komen met de diameter van de wapening met inachtneming van de schaalfactor. Deze breedte wordt dus zo goed mogelijk aangepast, waarna de lengte is te berekenen.

Ook meer gecompliceerde gevallen zoals T -vormige, cirkelvormige, en ruitvormige doorsneden (zie fig. 11) kunnen worden onderzocht, evenals doorsneden waarbij het staal een minder uitgesproken vloeigrens bezit (zie fig. 12). Het model van een voorgespannen betondoorsnede is te vervaardigen zoals in fig. 13 is afgebeeld. De vorm van het σ - ϵ -diagram van het voorspanstaal kan overeenkomstig fig. 12 goed worden benaderd. In de onbelaste toestand bevindt de onderzijde van het beton-aandeel zich weer juist op de hoogte van de vloeistofspiegel. Het voorspannen geschiedt door het aandeel van het voorspanstaal zover verticaal opwaarts te verschuiven ten opzichte van de vloeistofspiegel als overeenkomt met de verlenging die het voorspanstaal ondergaat.

De mogelijkheid om het analogie-model uit te breiden tot niet-symmetrische doorsneden en tot het geval van scheve buiging is in principe aanwezig, doch zal in dit artikel niet worden behandeld.

Fig. 11. Voorbeelden van enkele modellen.



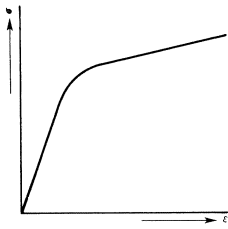


Fig. 12. Model van een staalsoort met minder gepro-
 nonceerde vloeigrens.

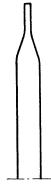
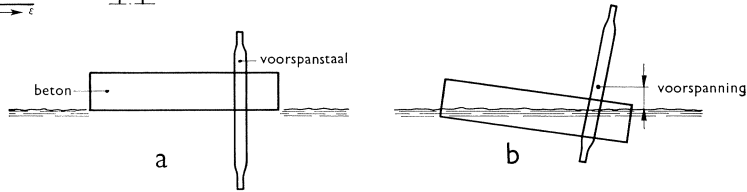


Fig. 13. Model van een voorgespannen beton-
 doorsnede.

- a. onbelast en nog niet voorgespannen;
- b. belast en voorgespannen.



3 Model voor centrish en excentrish gedrukte constructiedelen van gewapend beton

Door de uitwendige belasting N' te laten aangrijpen in het vlak door de onderzijde van het beton-aandeel wordt door het beschreven model het gedrag weergegeven van een *doorsnede*, d.w.z. dat de lengte van een constructiedeel op dit gedrag geen invloed heeft. Wanneer echter N' hoger aangrijpt zal de plaats van de resultante van de opwaartse druk in horizontale zin worden beïnvloed door de hoekverdraaiing φ_m van het model (zie fig. 14).

Voor de werkelijke doorsnede betekent dit dus een beïnvloeding van de plaats van de resultante wegens de kromming van de staafas, welke bij knikverschijnselen haar rol speelt. In het volgende wordt deze invloed behandeld.

Een constructiedeel met scharnierende einden, belast op buiging en normaalkracht, zal onder invloed van deze belasting uitbuigen volgens fig. 15. Naarmate deze belasting groter wordt zal de excentriciteit van de normaalkracht ten opzichte van de staafas toenemen (knikverschijnsel). Door een juiste keuze van de hoogte H in het model (zie fig. 14) kan overeenstemming worden bereikt tussen de verplaatsing van de resultante in het model en de toenemende excentriciteit in de werkelijkheid.

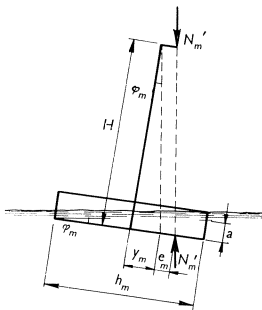


Fig. 15. Excentrish gedrukte staaf.

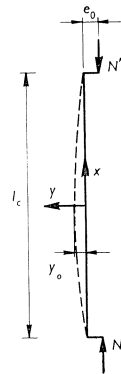


Fig. 14. Invoering van de invloed van de lengte van een constructiedeel door middel van de hoogte H in het model.

Wordt voor de uitbuiging van het constructiedeel een sinusvormig verloop aangenomen – zie [1] – dan kan voorlopig (zie ook 5b) worden gesteld (zie fig. 15):

$$y = y_0 \cos \frac{\pi x}{l_c} \dots \dots \dots (2)$$

Voor de maatgevende doorsnede $x = 0$ geldt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y_0 \frac{\pi^2}{l_c^2} \dots \dots \dots (3)$$

Voorts is ook:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{h_t} \dots \dots \dots (4)$$

waarin ε_1 en ε_2 de vervormingen van de uiterste vezels en h_t de hoogte in de buigingsrichting van de beschouwde doorsnede $x = 0$ voorstellen. Uit de verg. (3) en (4) volgt:

$$y_0 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{h_t} \cdot \frac{l_c^2}{\pi^2} \dots \dots \dots (5)$$

Nu dient de excentriciteit van de belasting in het model overeen te stemmen met die voor $x = 0$ in de werkelijkheid, dus:

$$e_0 + y_0 = \mu(e_m + y_m)$$

of (zie fig. 14):

$$e_0 = \mu e_m$$

en $y_0 = \mu y_m = \mu H \operatorname{tg} \varphi_m \dots \dots \dots (6)$

Substitutie van verg. (5) in verg. (6) leidt tot:

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{h_t} \cdot \frac{l_c^2}{\pi^2} = \mu H \operatorname{tg} \varphi_m \dots \dots \dots (7)$$

Uit fig. 14 blijkt $a = h_m \operatorname{tg} \varphi_m$. Voorts is $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = a \frac{\varepsilon_u'}{n}$ zodat:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{h_t} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\mu h_m} = \operatorname{tg} \varphi_m \frac{\varepsilon_u'}{n} \cdot \frac{1}{\mu}$$

Dit geeft aan, zoals reeds eerder vermeld, dat een hoekverdraaiing van het model overeenkomt met een kromming in de werkelijkheid. Invuld in verg. (7) geeft dit:

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{tg} \varphi_m \frac{\varepsilon_u'}{n} \cdot \frac{l_c^2}{\pi^2} = \mu H \operatorname{tg} \varphi_m$$

of

$$H = \frac{l_c^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{\varepsilon_u'}{n} \dots \dots \dots (8)$$

Bij de vervaardiging van een model kan van deze waarde van H worden uitgegaan. In verband met de niet geheel juiste onderstelling, besloten in verg. (2), dienen echter de verkregen proefresultaten achteraf te worden gecorrigeerd, hetgeen in 5b wordt besproken.

Op de aangegeven wijze is het dus mogelijk het gedrag van een kolom van gewapend beton na te gaan onder invloed van een uitwendige, centrische of excentrische belasting. Niet alleen kan de maximaal bereikbare waarde van N' (=de breukbelasting N_{br}') worden bepaald, doch ook kunnen de daarbij behorende ligging van de neutrale lijn, de vervormingen ε_1 en ε_2 in de uiterste vezels (zie fig. 5b en 5c) en de uitbuiging aanschouwelijk worden voorgesteld. Dit kan uiteraard geschieden bij elke andere waarde van N' . Met eenzelfde model kan het gedrag worden onderzocht van een serie kolommen met dezelfde dwardoorsnede, doch met verschillende waarden van de begin-excentriciteit van de belasting en met verschillende lengten. Ook het gedrag van kolommen van staal en van voorgespannen beton is op overeenkomstige wijze te onderzoeken.

In principe kunnen ook andere randvoorwaarden, zoals een verende in-klemming, in het onderzoek worden betrokken.

4 Modeltechniek

Bij de onderzochte modellen werd als vloeistof water toegepast. De modellen werden vervaardigd van een licht en een gemakkelijk te bewerken materiaal t.w. polystyreenschuim. Hoewel dit reeds weinig water opneemt bleek het toch noodzakelijk deze wateropneming te verminderen. Een behandeling van het oppervlak met was had het gewenste effect, althans zo lang de was niet was opgedroogd. Door deze behandeling bleek tevens de oppervlaktespanning tussen het modelmateriaal en het water zodanig te worden verminderd dat de invloed hiervan op het gedrag van het model nihil werd.

Bij alle modellen was de schaalfactor $\mu = 1$. Een aanvankelijk toegepaste dikte $n = 3,5$ cm van het beton-aandeel gaf aanleiding tot een niet geheel aanvaardbare onnauwkeurigheid in de maatvoering en tot een te geringe stijfheid van het beton-aandeel daar waar dit tot een dikte $= 0$ afloopt. Om deze redenen is een schaal aangehouden waarbij 2 cm overeenkwam met 1⁰/₀₀ vervorming, zodat $n = 7$ cm. Deze schaal gaf geen moeilijkheden.

Het gewicht van een model was zo gering dat het vereiste zwaartepunt resp. gewicht op eenvoudige wijze op de juiste plaats resp. juiste waarde kon worden gebracht door het aanbrengen van een gewichtje dat zich steeds onder water bevond.

Op het model werd een „brug” geplaatst, eveneens van polystyreenschuim vervaardigd, waarmee het aangrijpingspunt van de uitwendige belasting op

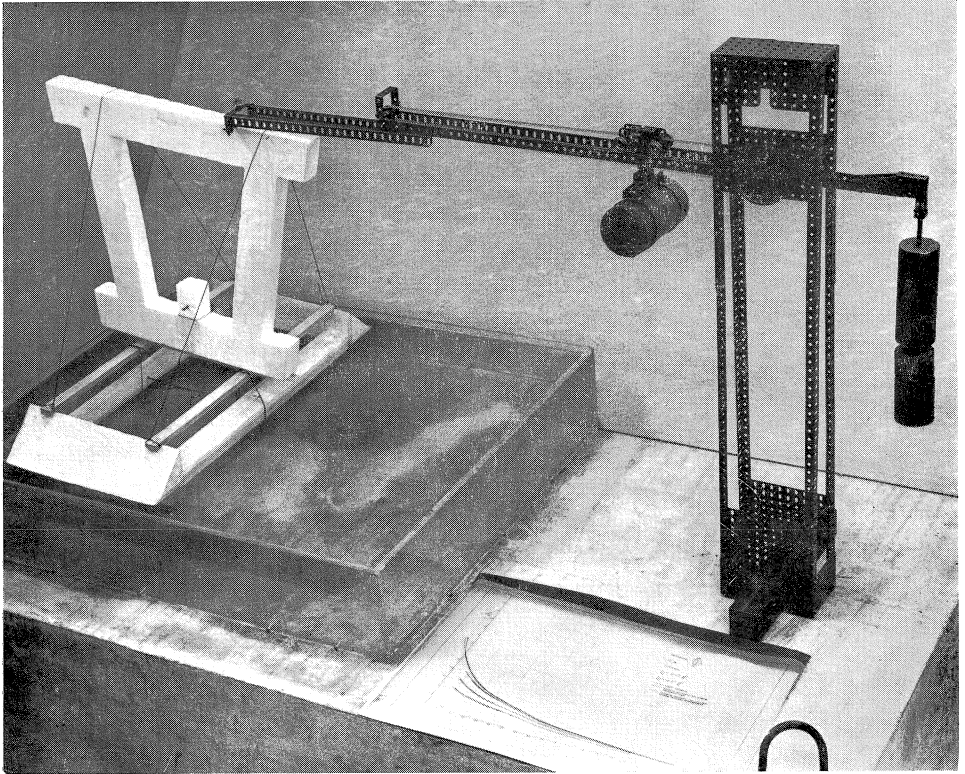
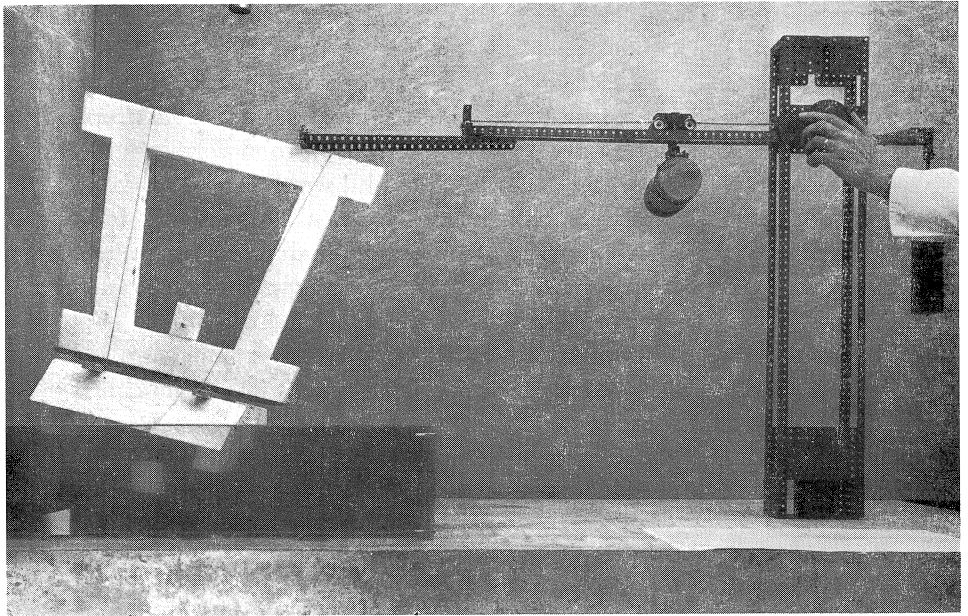


Fig. 16a en b. Overzicht van de proefopstelling.



de gewenste hoogte en plaats kon worden ingesteld. Bij $\mu = 1$ behoort volgens verg. (8) een hoogte H :

$$H = \frac{l_c^2}{\pi^2} \cdot \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{7} \approx \frac{l_c^2}{20.000}.$$

Voor een lengte $l_c = 3,00$ m is dus $H \approx 4,5$ cm en voor $l_c = 10,00$ m is $H \approx 50$ cm. Deze afmetingen zijn in een model goed te verwezenlijken. De brug werd in zijn zwaartepunt uitgebalanceerd op zodanige wijze dat, ook bij horizontale verplaatsing van het model, een verticale, opwaarts gerichte, kracht werd uitgeoefend.

Het aanbrengen van de belasting vond plaats met een hefboom waarlangs een gewicht kon worden verplaatst zonder dat de hefboom behoefde te worden aangeraakt, zodat een nauwkeurige regeling mogelijk was. De fig. 16a en b geven een overzicht van de opstelling.

Het meten van de gezochte grootheden, zoals de vervormingen van de uiterste vezels en de ligging van de neutrale lijn, geschiedde met meetlatjes. De grootte van de belasting was direct op een langs de hefboom aangebrachte maatverdeling af te lezen.

5 Modelfouten

a. Correctie van de belasting N_m' (zie fig. 17).

Wanneer het model een oneindig kleine dikte (n) zou bezitten, dan zou $\varphi_m \rightarrow 0$, $\cos \varphi_m \rightarrow 1$ en $\sin \varphi_m \rightarrow 0$. In dat geval zou gelden:

$$\Sigma M = 0 \rightarrow N_m' e_m + N_m' y_m = N_m' \cdot p_m \quad (9)$$

Het punt 0 in het model komt overeen met het zwaartepunt van de werkelijke doorsnede. Voor deze doorsnede betekent verg. (9) dat een normaalkracht N' optreedt op een afstand $p = \mu p_m$ van het zwaartepunt. Het model stelt op correcte wijze de werkelijkheid voor.

Daar het model echter een eindige dikte n bezit kan de hoekverdraaiing φ_m waarden verkrijgen die niet te verwaarlozen zijn. Voorts blijkt, daar het aangrijpingspunt s van de resultante van de opwaartse druk niet is gelegen in het vlak door de onderzijde van het beton-aandeel, dat een bijkomend moment $N_m' q_m \sin \varphi_m$ ontstaat. In dit geval is dus:

$$\begin{aligned} \Sigma M = 0 \rightarrow N_m' e_m \cos \varphi_m + N_m' y_m \cos \varphi_m = \\ = N_m' \cos \varphi_m p_m + N_m' q_m \sin \varphi_m \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

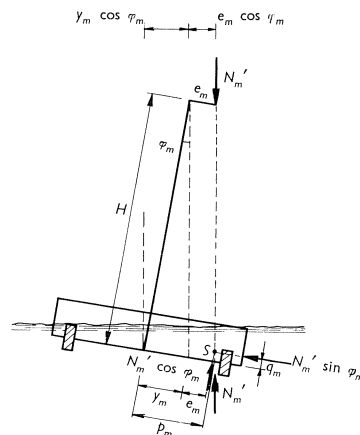


Fig. 17. Correctie van N_m'

Voor de werkelijke doorsnede betekent dit (afgezien van de kleine fout $N_m' q_m \sin \varphi_m$), dat deze op een afstand $p = \mu p_m$ van het zwaartepunt wordt belast door een normaalkracht ter grootte van $N_m' \cos \varphi_m$ in het model. D.w.z. dat de op de maatverdeling van de hefboom af te lezen kracht N_m' dient te worden gecorrigeerd met de bijbehorende waarde van $\cos \varphi_m$. Ten aanzien van de term $N_m' q_m \sin \varphi_m$ kan worden gesteld dat zowel q_m als $\sin \varphi_m$ klein zijn.

b. Correctie van de hoogte H en de begin-excentriciteit e_m (c.q. e_0).

Zoals op blz. 9 reeds is vermeld, is de onderstelling vastgelegd door verg. (2) niet geheel juist. Voor $x = 1/2 l_c$ geldt $y = e_0$ en dus $M = N'e_0$ (zie fig. 15). Uit verg. (2) volgt voor dezelfde doorsnede echter ook:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y_0 \frac{\pi^2}{l_c^2} \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

zodat $M = 0$ zou moeten zijn. Een betere benadering, zoals deze ook in [1] is aangehouden, kan worden verkregen met (zie fig. 18):

$$y = y_0 \cos \frac{\pi x}{L} = y_0 \cos \frac{\pi x \vartheta}{l_c} \dots \dots \dots (11)$$

waarin $\frac{l_c}{L} = \vartheta \leq 1$ en $y_0 = e_0 + f$.

In [1] is reeds afgeleid dat:

$$\frac{y_0}{h_t} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \vartheta^2} \left(\frac{l_c}{h_t}\right)^2 = \left(\frac{1}{\Xi} + \frac{1}{\Phi}\right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\frac{l_c}{h_t}\right)^2 \dots \dots \dots (12)$$

$$\frac{e_0}{h_t} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\Xi} \left(\frac{l_c}{h_t}\right)^2 \dots \dots \dots (13)$$

$$\frac{f}{h_t} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\Phi} \left(\frac{l_c}{h_t}\right)^2 \dots \dots \dots (14)$$

waarin ε_1 en ε_2 weer de vervormingen t.p.v. de uiterste vezels voorstellen voor $x = 0$, en Ξ en Φ uitsluitend functies zijn van ϑ - zie tabel II in [1]. Voorts geldt:

$$\frac{y_0}{h_t} = \frac{y_m}{h_m} \dots \dots \dots (12a)$$

$$\frac{e_0}{h_t} = \frac{e_m}{h_m} \dots \dots \dots (13a)$$

$$\frac{f}{h_t} = \frac{f_m}{h_m} \dots \dots \dots (14a)$$

Uit de verg. (12) en (12a) volgt:

$$\frac{y_m}{h_m} = \left(\frac{1}{\Xi} + \frac{1}{\Phi}\right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\frac{l_c}{h_t}\right)^2$$

Hierin zijn bekend l_c , h_t en h_m . Bij een bepaalde belasting op het model kunnen y_m , ε_1 en ε_2 worden gemeten. De waarde van $\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}} + \frac{1}{\bar{\phi}}\right)$ kan worden berekend, waarna ϑ kan worden bepaald met de genoemde tabel in [1]. De waarden van $\frac{1}{\bar{\varepsilon}}$ en $\frac{1}{\bar{\phi}}$ afzonderlijk zijn dan ook bekend. De bijbehorende begin-excentriciteit e_0' c.q. e_m' is volgens de verg. (13) en (13a) te bepalen. De waarde e_m' zal niet gelijk zijn aan de in het model ingestelde waarde e_m . De waarde van H wordt ten gevolge van het invoeren van verg. (11) en in afwijking van verg. (8a):

$$H' = \frac{l_c^2}{\pi^2 \vartheta^2} \cdot \frac{\varepsilon_u'}{n} \cdot \frac{1}{\mu^2} \dots \dots \dots (8a)$$

Daar de waarde van ϑ reeds bekend was zou ook de waarde van H kunnen worden gecorrigeerd.

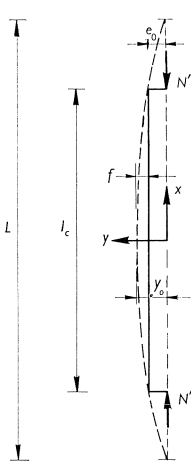
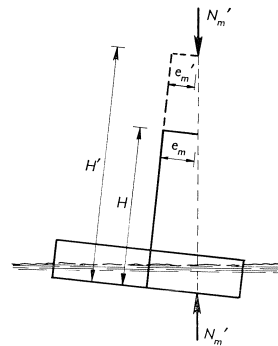


Fig. 18. Excentrisch gedrukte staaf.

Fig. 19. Correctie van H en e_m .



Resumerend kan worden gesteld dat men bij de aanvang van de proef de beschikking heeft over de hoogte H volgens verg. (8), terwijl een begin-excentriciteit e_m (c.q. e_0) wordt ingesteld. Achteraf dienen deze grootheden met de beproevingsresultaten te worden gecorrigeerd. In fig. 19 is te zien dat men inderdaad over deze graad van vrijheid beschikt. Er treedt geen wijziging op in een evenwichtstoestand als H en e_m worden vervangen door H' en e_m' .

Literatuur

1. LEEUWEN, Ir. J. VAN en A. C. VAN RIEL, De berekening van centrisc en excentrisch gedrukte constructiedelen. (Toelichting op art. 47 en 48, G.B.V. 1962). Heron 10 (1962) no. 3/4.
2. LIGTENBERG, Ir. F. K., Een analogie-model van een balkdoorsnede in het elasto-plastische gebied met enkele toepassingen. Rapport St-1, Stevinlaboratorium T.H., Delft, 1957.