

THEORETISCH EN EXPERIMENTEEL ONDERZOEK NAAR HET GEDRAG VAN EEN VOORGESPANNEN TONSCHAAL

U.D.C. 624.074.4

Het artikel betreft de berekening en een experimenteel onderzoek van een voorgespannen tonschaal. Doel van het onderzoek was na te gaan in hoeverre de berekende spanningsverdeling overeenstemde met de metingen die aan een klein plastic model gedaan zijn. Daarna is getracht voor de optredende afwijkingen tussen metingen en theorie een verklaring te geven. Hierdoor is een nader inzicht verkregen in factoren die deze overeenstemming ongunstig beïnvloeden.

Voorts is de krachtwerking bij toepassing van gebogen kabels theoretisch onderzocht. De resultaten van verschillende berekeningswijzen zijn vergeleken. Tevens is getracht het gebruik van een eenvoudige berekening te rechtvaardigen.

0 Inleiding

De spanningsverdeling in een schaaldak, voorgespannen met rechte kabels, kan met behulp van rekenschema's met de D.K.J.-methode berekend worden.¹⁾ Daarbij rijst de vraag in hoeverre de berekende spanningsverdeling overeen zal stemmen met de werkelijkheid. Wanneer blijkt, dat afwijkingen te verwachten zijn kan men zich afvragen, waarvan deze het gevolg zijn en of men er bij het ontwerpen rekening mee moet houden. Deze vragen hebben geleid tot een experimenteel onderzoek van een plastic model op kleine schaal.

Experimenteel onderzoek van schaaldaken op ware grootte leidt tot zeer hoge kosten. Bij onderzoekingen gericht op het gedrag van het materiaal gewapend beton voor een schaaldak kan men gewapend microbeton als modelmateriaal gebruiken. Zo komt men tot een verkleining in de orde van 1 : 8.²⁾ Wanneer het onderzoek niet in de eerste plaats gericht is op de materiaal-eigenschappen, is het aantrekkelijk een modelmateriaal te kiezen, dat een nog meer geprononceerde verkleiningsfactor toelaat, met onder meer als gevolg ruimtebesparing en een eenvoudiger te verwezenlijken belastingstoestand. Na te gaan in hoeverre de door ons gebruikte plasticsoort (Trovidur) zich hiervoor leent was mede het doel van het onderzoek. Als schaalfactor is 1 : 35 aangehouden.

Onderzocht is een cirkelcilindrische tonschaal opgelegd op eindschotten (fig. 1). De gebruikelijke randbalken, die op vrij complexe wijze het gedrag van een schaal beïnvloeden, zijn achterwege gelaten. Daardoor is de invloed van andere factoren zuiverder te onderkennen geweest.

¹⁾ I.B.C.-mededelingen 4 (1956) no. 2.

²⁾ I.B.C.-mededelingen 7 (1959) no. 2/3.

De berekening van de spanningsverdeling in een tonschaal onder invloed van gebogen voorspankabels wordt wel vereenvoudigd door de kabels 'recht' te veronderstellen en naar de (rechte) schaalrand te verplaatsen.¹⁾

Men kan ook een begrekenin opzetten, waarbij met het werkelijke verloop van de kabel en het daarbij behorende wederkerige krachten spel tussen schaal en kabel rekening wordt gehouden. Voor de beschouwde tonschaal zijn beide wijzen van berekenen vergeleken en is nagegaan in hoeverre de eerder bedoelde vereenvoudiging gerechtvaardigd is.

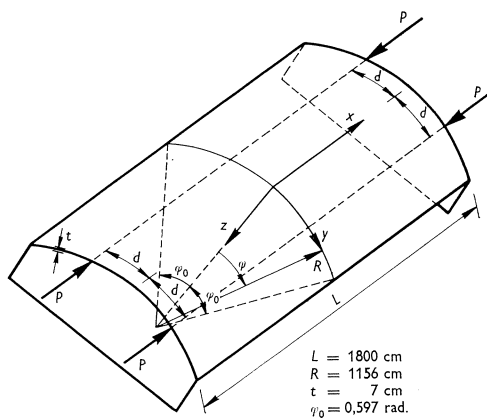


Fig. 1. Schema tonschaal.

1 Berekening met rechte voorspankabels

De berekeningen van de schaal zijn gebaseerd op de onderstellingen van DONNELL. Zonder de belastingstermen en onder verwaarlozing van de invloed van de dwarscontractie heeft men dan de differentiaalvergelijking: ²⁾

$$\Delta^{\text{IV}}w + \frac{12}{R^2 t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$$

Men veronderstelt hierbij onder meer, dat de schaal bestaat uit een homogeen, elastisch, isotroop materiaal, dat aan de wet van HOOKE voldoet, met een dwarscontractie-coëfficiënt $\nu = 0$. De werking van een rechte voorspankabel wordt voorts vervangen gedacht door 2 (tegengestelde gelijke puntlasten) met gemeenschappelijke werklijn, aangrijpend op de gekromde randen.

De werklijnen van deze lasten P liggen steeds paarsgewijs symmetrisch ten opzichte van de topbeschrijvende van de schaal en zijn hieraan evenwijdig. De plaats van de werklijnen wordt gedefinieerd door hun over het schaaloppervlak gemeten afstand d tot de top. De lasten P zijn ontwikkeld in een FOURIERreeks:

$$p(y) = \frac{2P}{R\varphi_0} \sum_0^{\infty} \cos \alpha_n d \cdot \cos \alpha_n y$$

$$\text{met } \alpha_n = \frac{(2n+1)\pi}{2R\varphi_0} \quad (n = 0, 1, 2 \dots)$$

¹⁾ W.G.S.-mededelingen 2 (1954) no. 2.

²⁾ I.B.C.-mededelingen 4 (1956) no. 2.

Lijst van gebruikte notaties

d	(cm)	afstand van de beschrijvende, waarop de verankeringen van een voorspankabel liggen, tot de top van de schaal.
e	(cm)	excentriciteit van een voorspankabel.
E	(kgf/cm ²)	elasticiteitsmodulus.
f	(cm)	de pijl van een parabool.
F	(cm ²)	oppervlakte van de doorsnede van een ligger.
k_y en k_x		krommingen in y - en x -richting.
K	(kgfcm)	$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ (buigingsstijfheid).
L	(cm)	lengte van de schaal.
m		index die de membraancomponent aanduidt.
M_x, M_y	(kgf)	momenten per eenheid van lengte.
N_x, N_y, N_{xy} en N_{yx}	(kgf/cm)	langs- en schuifkrachten per eenheid van lengte (spanningskrachten).
o		index die een randgrootheid aanduidt.
$p(y), p(x)$	(kgf/cm)	lijnlasten die samengesteld zijn uit een aantal termen van de reeks waarin de voorspankracht P ontwikkeld wordt.
P	(kgf)	voorspankracht
P_x, P_y	(kgf)	componenten van de voorspankracht in x - resp. y -richting.
Q	(kgf/cm)	kracht per lengte-eenheid die de voorspankabel op de ligger uitoefent.
r_α	(cm)	kromtestraal van het schaaloppervlak in een vlak dat een hoek α maakt met de x -richting.
r_1	(cm)	kromtestraal van het schaaloppervlak in een vlak dat door de as van de cilinder gaat.
r_2	(cm)	kromtestraal van het schaaloppervlak in een vlak loodrecht op de as van de cilinder.
R	(cm)	straal van de cilinder, gemeten tot het middenvlak.
R_y	(kgf/cm)	statisch equivalent van dwarskracht en wringend moment.
t	(cm)	dikte van de schaal.
v	(cm)	verplaatsing van een punt van de schaal in y -richting.
V	(kgf/cm)	verticale component van Q .
w	(cm)	verplaatsing van een punt van de schaal in z -richting.
x	(cm)	coördinaat langs de beschrijvende.
y	(cm)	coördinaat langs oppervlak loodrecht op beschrijvende
\bar{y}	(cm)	idem met $\bar{y} = y - d$.
Y_p	(kgf/cm)	belasting die de kabel in y -richting op de schaal uitoefent.
z	(cm)	coördinaat loodrecht op het oppervlak.
z_p	(kgf/cm ²)	belasting per oppervlakte-eenheid die de kabel in x -richting op de schaal uitoefent (benadering van Z_p).
Z_p	(kgfcm)	belasting die de kabel in z -richting op de schaal uitoefent.
α	(rad)	hoek die de kabel met de x -richting maakt.
α_n	(rad)	$\frac{(2n+1)\pi}{2R\varphi_0}$ ($n = 0, 1, 2 \dots$).
Δ		$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$		specifieke rekken van het middenvlak in x - resp. y -richting.
ν		contractiecoëfficiënt van Poisson.
K_x, K_y	(cm ⁻¹)	krommingen van het middenvlak in x - resp. y -richting.
σ_x	(kgf/cm ²)	N_x/t .
φ	(rad)	y/R .
φ_0	(rad)	halve openingshoek.

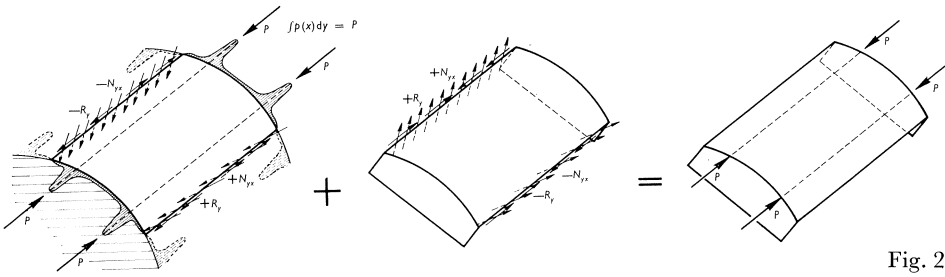


Fig. 2.

In fig. 2 is de berekening schematisch weergegeven. Eerst is een in y -richting oneindig uitgestrekte schaal berekend.

Op de gekromde randen werkt een lijnlast van periodiek variërende grootte (waarbij de beschrijvende voor $\varphi = \pm\varphi_0$ antisymmetrielijnen zijn), samengesteld uit een aantal termen van de reeksontwikkeling van P . Voor ieder van die termen wordt de oneindig lange schaal berekend. Langs de gekromde randen zijn daarbij de volgende randvoorwaarden gesteld: $w = 0$ (verplaatsing in z -richting) en $v = 0$ (verplaatsing in y -richting, omdat het eindschot in zijn vlak oneindig stijf is verondersteld). Verder moet $M_x = 0$ zijn, wegens de aanname, dat het schot loodrecht op zijn vlak oneindig slap is. Tenslotte moeten de langsspanningskrachten N_x langs de gekromde rand gelijk zijn aan de beschouwde term van de reeksontwikkeling van P . Omdat de belasting in y -richting periodiek is gemaakt worden om redenen van keersymmetrie langs de rechte randen $M_y = 0$ en $N_y = 0$.

Wel ontstaan daar N_{xy} -schuifspanningskrachten en aandelen R_y .*) Deze N_{xy} - en R_y -verdelingen moeten in tegengestelde richting op de rechte randen aangebracht worden om deze weer vrij zwevend te maken. Zij zijn ieder ontwikkeld in een FOURIER-reeks, waarvan de termen nu in x -richting periodiek verlopen, met $2L$ als periode van de eerste harmonische. Door deze periodiciteit wordt voldaan aan de eerder vermelde randvoorwaarden langs de gekromde randen: $w = 0$, $v = 0$, $M_x = 0$ en $N_x = 0$. Nu kunnen de randvoorwaarden langs de rechte randen in rekening gebracht worden. R_y en N_{xy} worden gelijkgesteld aan de beschouwde termen van de R_y - en N_{xy} -reeksontwikkelingen, terwijl $N_y = 0$ en $M_y = 0$ moeten zijn. Door superpositie van de uitkomsten wordt tenslotte de gezochte spanningsverdeling in de tonschaal ten gevolge van de puntlasten P verkregen. De totale berekening is uitgevoerd voor elk der 4 gevallen: $d = 0$, $d = 1/2 R\varphi_0$, $d = 5/6 R\varphi_0$ en $d = R\varphi_0$.

De bewerkelijkheid van deze berekening neemt toe naarmate hierin meer termen betrokken worden van de reeksen, waarin de lasten P en de randkrachtverdelingen van R_y en N_{xy} zijn ontwikkeld.

Ter wille van de nauwkeurigheid zijn voor de berekeningen in dit artikel

*) R_y = statisch equivalent van wringing + dwarskracht, zoals dat ook bij de plaattheorie wordt ingevoerd.

11 termen van P en van R_y en N_{xy} ieder 6 termen genomen, wat neerkomt op 23 D.K.J.-berekningen per belastingsgeval. Voor het belastingsgeval waarbij $d = R\varphi_0$ is de invloed op de spanningsverdeling nagegaan van het aantal termen van de reeks waarin P ontwikkeld is. Bij dit belastingsgeval is P ontwikkeld in N_{xy} -harmonischen langs de rechte randen:

$$p(x) = [N_{yx}]_{y = +\varphi R_0} = \frac{4P}{L} \sum_0^k \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} \cdot x \quad (n=0, 1, 2 \dots k)$$

De schaal is uitgerekend voor $k = 0, k = 2, k = 4$ en $k = 10$. In fig. 3 zijn de uitkomsten van de berekeningen voor $k = 0, k = 2$ en $k = 4$ weergegeven. De spanningslijnen met $k = 10$ zijn niet getekend omdat deze, met uitzondering van de randvoorwaarde voor N_{yx} , geen zichtbaar verschil tonen met die met $k = 4$. De randvoorwaarde voor N_{yx} bij de oplegging wordt bij 11 termen ($k = 10$) $11/5 \times$ zo groot als bij 5 termen ($k = 4$) en bij een oneindig aantal termen zelfs oneindig.

Uit fig. 3 blijkt dat men in het algemeen zeker voldoende nauwkeurig rekt wanneer de eerste drie harmonischen ($k = 2$) in de berekening betrokken worden. Wanneer de lasten inderdaad in de hoekpunten aangrijpen ($d = R\varphi_0$) is een berekening van de schaal met de eerste harmonische voldoende.

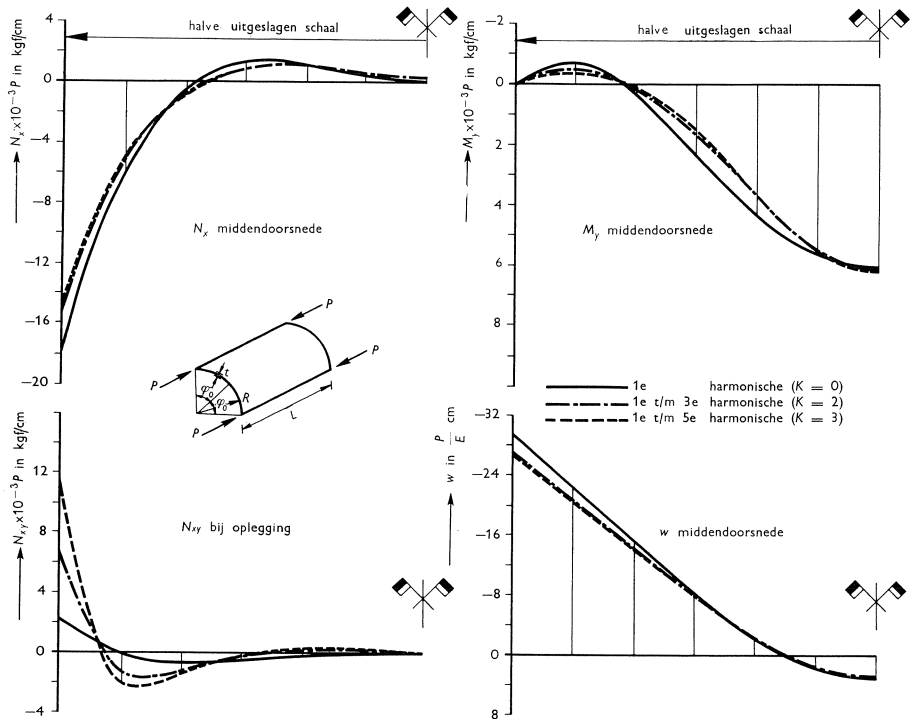


Fig. 3. Invloed van het aantal in de berekening betrokken harmonischen, voor $d = R\varphi_0$; $L = 1800$ cm; $R = 1156$ cm; $t = 7$ cm; $\varphi_0 = 0,597$ rad.

2 Modelproeven

Van de berekende tonschaal is een model op schaal 1 : 35 gemaakt van Trovidur (een polyvinylchloride). De afmetingen waren:

	ware grootte	model 1 : 35
L	1800 cm	51,4 cm
R	1156 cm	33,0 cm
t	7 cm	0,2 cm
φ_0	0,597 rad	0,597 rad

Een plaat Trovidur is na verwarming in een oven gebogen tot een cirkelcilinderboog en vertoonde na geleidelijke afkoeling geen neiging om in zijn oorspronkelijke vlakke gedaante terug te keren. De eindschotten zijn uit een plaat Trovidur gezaagd die aan dezelfde ovenbehandeling als de gebogen plaat onderworpen was geweest. Daarna zijn zij tegen de gebogen plaat vastgekit.

Op het model werden ter plaatse van drie dwarsdoorsneden rekstrookjes geplakt nl.:

$$x = 0 \text{ (middendoorsnede),}$$

$$x = \frac{1}{4}L,$$

$$x = \frac{5}{12}L \text{ (doorsnede nabij de gebogen rand).}$$

Bij iedere doorsnede zijn aan boven- en onderzijde van de schaal op onderling gelijke afstanden 2×13 rekstrookjes in x -(lengte-)richting en 2×12 rekstrookjes in y -(dwars-)richting geplakt.

De schaal is op de volgende wijze belast (zie fig. 4a, b en c). De eindschotten zijn met slappe meccanostripjes aan een rechthoekig stuk meubelplaat verbonden, dat op rollen op een hexagonframe is opgelegd. Het geheel kan dus vrij in de richting van P bewegen, terwijl de schaal nagenoeg vrij ten opzichte van het stuk meubelplaat kan bewegen in de richting van de last. De schaal is in B' via een asje op het frame gelegd, en steekt hier 1 mm buiten het eindschot, om te voorkomen, dat het asje het eindschot raakt. In B grijpt de last P aan.

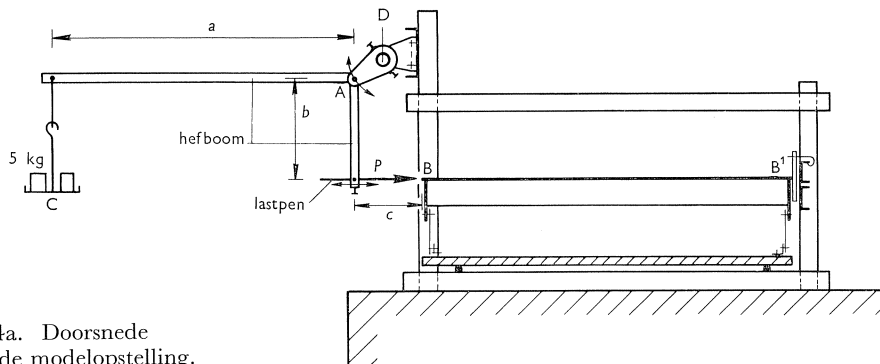


Fig. 4a. Doorsnede over de modelopstelling.

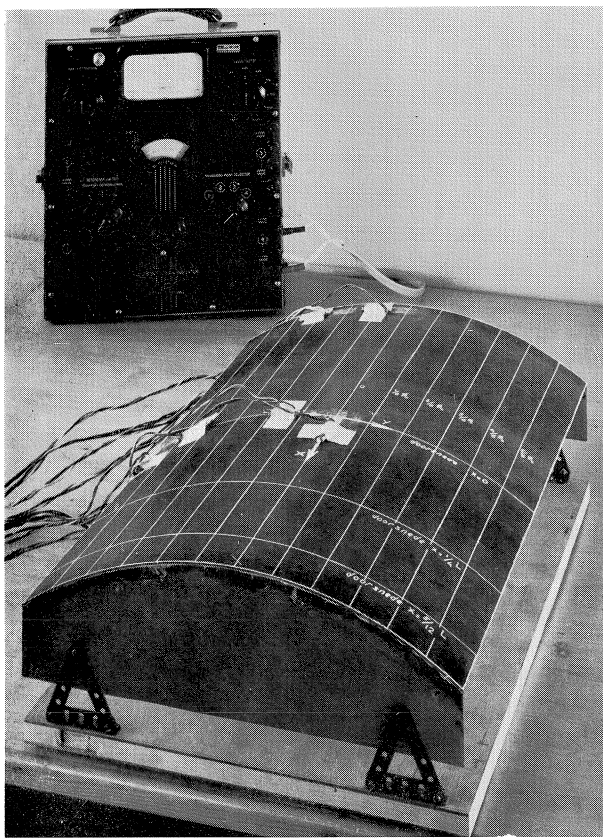
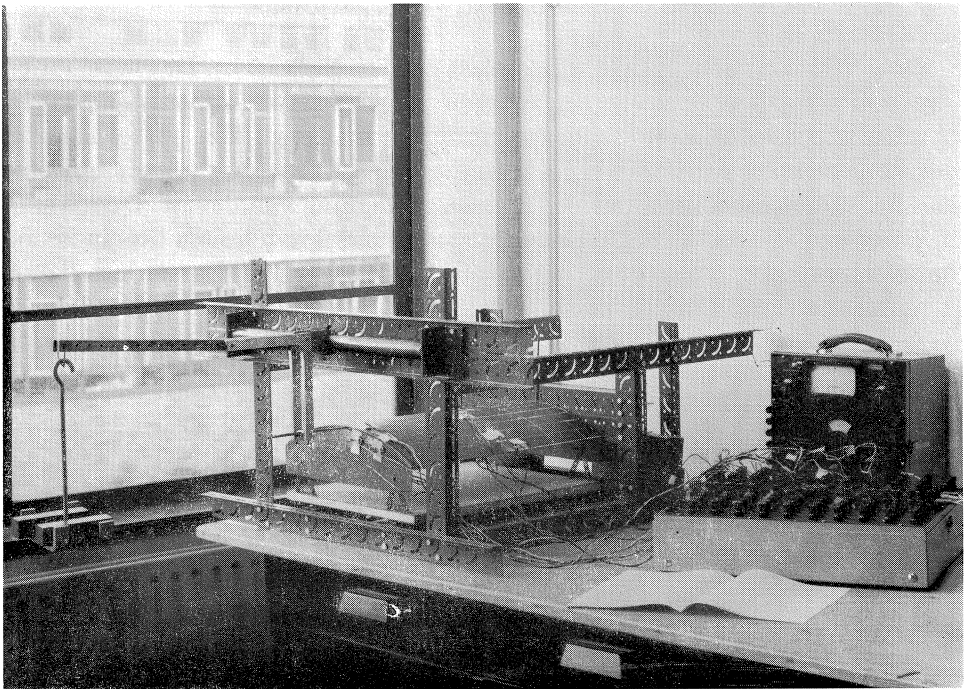


Fig. 4b.
Model met meetapparatuur.

Fig. 4c.
Modelopstelling.



De horizontale stand van P kan verzekerd worden door de lengte c en de hoogte van A juist te stellen. A kan draaien om de vaste as D en met een klem-schroef gefixeerd worden. De verhouding $a : b = 3 : 1$. Het gewicht van de hefboom vormt de nullast. In C is steeds een gewicht van 5 kg aangebracht, zodat $P = 15$ kgf.

De invloed van de kruip van het materiaal is nagenoeg geëlimineerd door bij iedere aflezing van een rekstrookje te ontlasten en vervolgens te belasten. De bij de nullast behorende waarde werd op de rekmeter afgelezen en direkt daarna werd belast.

Het verschil van de laatstafgelezen waarde en de waarde bij de nullast gaf de in dat punt optredende rek. Voor een volgend rekstrookje werd het belasten en ontlasten herhaald. Bij het modelmateriaal Trovidur is een dergelijke werkwijze wel geboden.

Uit een plaat Trovidur, die ook de ovenbehandeling ondergaan had, is voorts een trekstaaf gezaagd. De rek in lengterichting en de contractie in breedterichting onder belasting door trekkrachten is met rekstrookjes gemeten. Deze waarnemingen zijn gedaan tijdens de beproeving van de schaal in dezelfde ruimte, om de bij de modelberekening van invloed zijnde elasticiteitsmodulus resp. dwarscontractiecoëfficiënt zo juist mogelijk tot hun recht te doen komen.

Het bleek, dat de staaf zich in ieder geval tot een rek van $414 \cdot 10^{-6}$ elastisch en volgens de wet van HOOKE gedroeg. Uit de waarnemingen aan de trekstaaf zijn voor de elasticiteitsmodulus E en de dwarscontractiecoëfficiënt ν gevonden: $E = 41500$ kgf/cm² en $\nu = 0,367$.

3 Vergelijking van de berekeningen met de metingen

In de figuren 5 en 6 zijn de berekende σ_x en M_y vergeleken met de uit de metingen afgeleide σ_x en M_y . Hier blijkt dat de gemeten langsspanningen σ_x voor de gevallen $d = 0$ en $d = \frac{1}{2}R\varphi_0$ goed met de berekende overeenstemmen. Voor het geval $d = \frac{5}{6}R\varphi_0$ waarbij de lasten P dicht bij de rechte rand op de schaal aangrijpen, is de overeenstemming in de middendoorsnede ($x = 0$) vrij slecht, in de doorsnede $x = \frac{1}{4}L$ beter en in de doorsnede $x = \frac{5}{12}L$, afgezien van de randwaarde, goed. Voor de dwarsmomenten M_y geldt eveneens, dat de overeenstemming over het algemeen slechter wordt naarmate P dichter bij de rechte rand aangrijpt. De mate van overeenstemming is echter naar de rand toe aanmerkelijk minder dan bij de normaalspanningen σ_x . Verder blijkt, dat de overeenstemming afneemt naar het midden van de schaal toe.

In het volgende zal getracht worden een verklaring te geven voor de afwijkingen tussen meting en theorie. Het zal dan blijken dat de optredende doorbuigingen w hierbij een rol spelen. Er werd bij de metingen namelijk niet voldaan aan één van de voorwaarden waarop de theorie gebaseerd is, nl. dat de

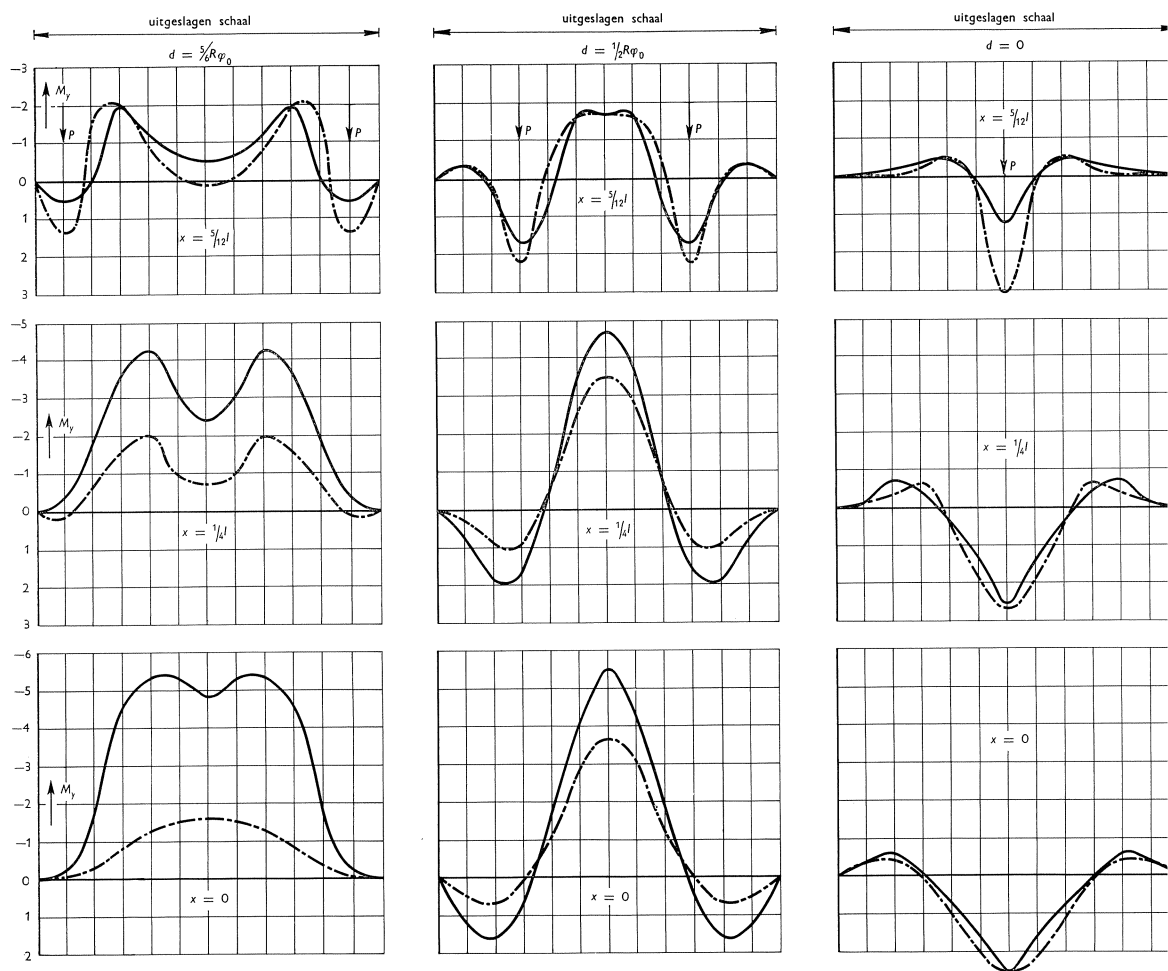


Fig. 5. Dwarsmomenten. Vergelijking van de meting met de theorie.

— metingen

- · - · - · theorie

M_y in 10^{-2} kgf.

$P = 15$ kgf; $L = 51,4$ cm; $R = 33,0$ cm; $t = 0,2$ cm; $\varphi_0 = 0,597$ rad; $E = 41500$ kgf/cm².

N.B. Men gelieve in fig. 5 en 6 overall voor l te lezen: L .

doorbuigingen w klein zijn ten opzichte van de dikte t . In zo'n geval gedraagt de schaal zich niet meer lineair. Voor enkele punten van de middendoorsnede zijn daarom aan een nieuw model metingen gedaan, waarbij getracht is de afwijkingen ten gevolge van het niet-lineaire gedrag te achterhalen, door de belasting geleidelijk te verhogen. Deze metingen vertoonden veel beter overeenstemming met de theorie.

In verband met de nauwkeurigheid en de afleesbaarheid van de meetapparatuur is bij de metingen de last $P = 15$ kgf gekozen. Dan worden rekken gemeten die gemiddeld in de orde van $100 \cdot 10^{-6}$ met maxima van $400 \cdot 10^{-6}$ zijn.

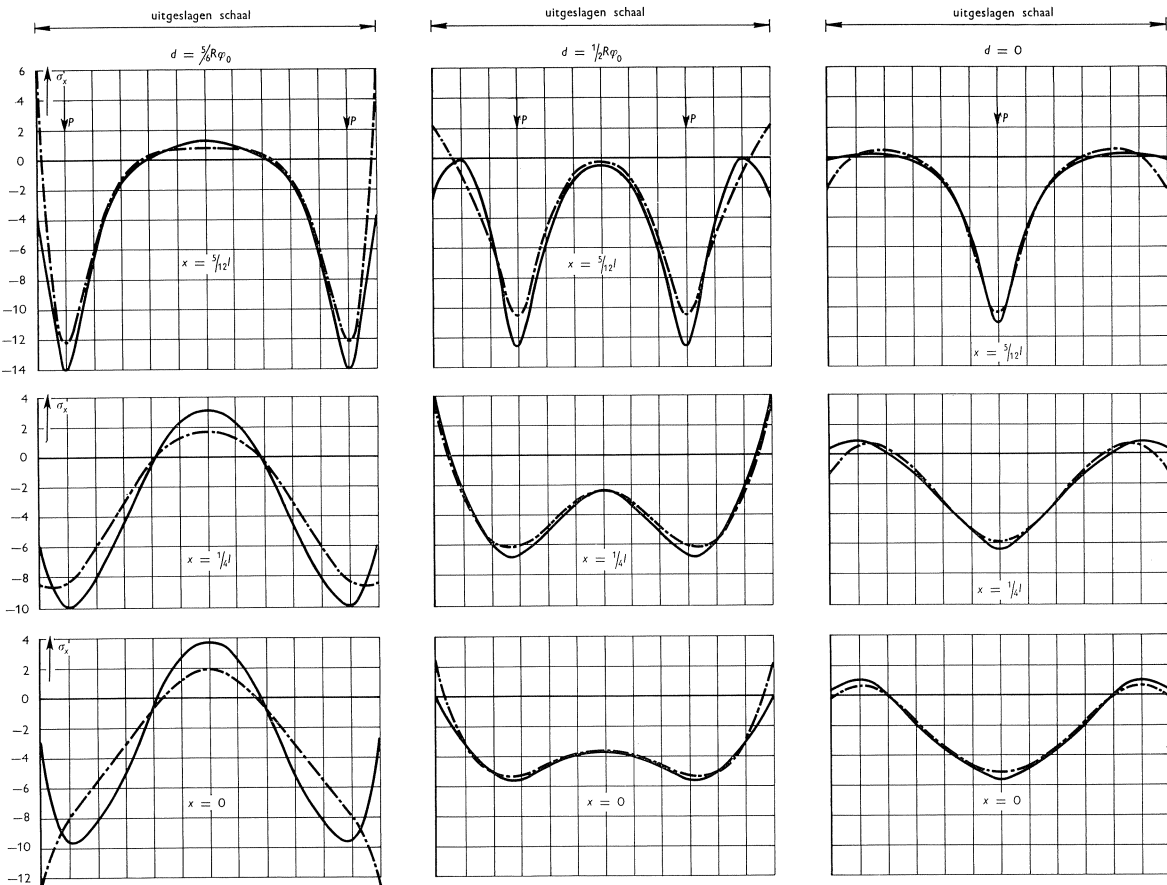


Fig. 6. Langsspanningen. Vergelijking van meting met theorie.

— metingen

- · - · - · theorie

σ_x in kgf/cm^2 .

Belasting en afmetingen overeenkomstig fig. 5.

Bij een schaaldak van gewapend beton kunnen de normaalspanningen ten gevolge van de voorspanning in de orde van 45 kgf/cm^2 gesteld worden. Met $E = 300.000 \text{ kgf/cm}^2$ is dan $\varepsilon = \sigma/E = 150 \cdot 10^{-6}$. De rekken van het model zijn dus van dezelfde grootte-orde als die van een gewapend-betonschaal op ware grootte.

Omdat w/t zowel als ε dimensieloos zijn, is ook de eerstgenoemde grootheid bij het model van dezelfde grootte-orde als bij een schaaldak op ware grootte. Wanneer aangenomen wordt, dat de grootte van w/t een maat is voor de invloed van het niet-lineaire gedrag op de spanningsverdeling, dan is die invloed bij het model even groot als bij het prototype. De verplaatsingen w zijn niet aan het model gemeten. Uit de berekeningen blijkt echter, dat w voor de midden-

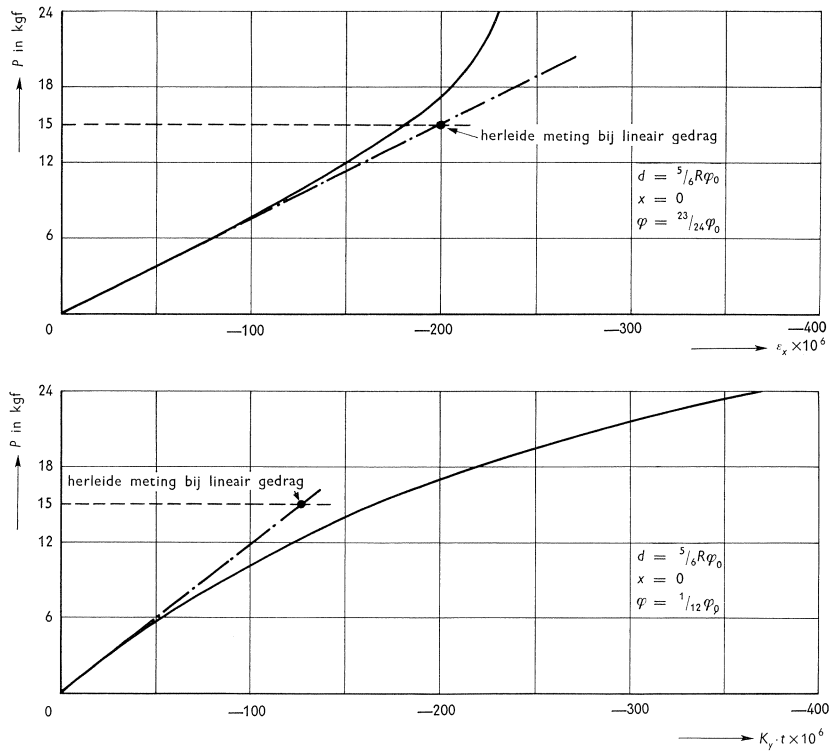


Fig. 7. P - ϵ -diagrammen. ϵ_x en $k_y \cdot t$ in μ -rek.

doorsnede in de orde van $45P/Et$ is. Dan wordt w/t met $P = 15$ kgf, $E = 41.500$ kgf/cm² en $t = 0,2$ cm:

$$\frac{w}{t} = 45 \cdot \frac{15}{41500 \cdot (0,2)^2} \approx 0,4.$$

Inderdaad is dus w niet „klein” ten opzichte van de schaaldikte t .

De niet-lineariteit, die aldus veroorzaakt wordt, is onderzocht aan een tweede model. Daarbij werden de puntlasten met stappen van 3 kgf verhoogd. De rekken bij iedere belastingstrap zijn in elk meetpunt afzonderlijk gemeten als het verschil tussen de rek bij de nullast en de rek bij de beschouwde belasting. Voor elke meting aan ieder rekstrookje werd de schaal dus belast en ontlast, evenals bij de oorspronkelijke meting, teneinde kruipverschijnselen te elimineren.

In fig. 7 zijn twee P - ϵ -diagrammen gegeven. Het ϵ_x -diagram geeft het verloop van de over de dikte gemiddelde rek in x -richting in een punt van de mid-dendoorsnede dicht bij de rechte rand. Deze ϵ_x -waarden bepalen mede de normaalspanningen σ_x in dat punt: $\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$. Het $k_y \cdot t$ -diagram

geeft het verloop van de krommingen in y -richting in een punt van de midden-doorsnede dicht bij de top. Deze bepalen mede de dwarsmomenten M_y in dat punt: $M_y = K(k_y + \nu k_x)$.

Uit deze en andere soortgelijke P - ε -diagrammen is duidelijk gebleken, dat het verband tussen belasting en vervorming niet lineair is. Verder blijkt, dat in de krommingen, en daarmee in M_y , de niet-lineaire verschijnselen veel sterker tot uiting komen dan in de gemiddelde rekken of wel σ_x . Dit komt overeen met het feit dat in de fig. 5 en 6 de afwijkingen tussen metingen en theorie bij de dwarsmomenten M_y groter uitvallen dan bij de normaalspanningen σ_x .

Getracht is uit de P - ε -diagrammen af te leiden hoe groot de vervormingen zouden zijn indien er wél een lineair verband tussen vervorming en belasting bestond. Daartoe zijn aan de grafieken raaklijnen getrokken, die door de oorsprong gaan. De lineaire vervorming bij een bepaalde belasting vindt men door het snijpunt te bepalen van deze raaklijnen met de bij die belasting behorende horizontaal. Uit deze vervormingen kunnen de spanningen en momenten berekend worden, die zouden optreden bij lineair verband tussen belasting en vervorming. De spanningen en momenten die bij een last van 15 kgf gemeten zouden worden bij lineair gedrag van de schaal stemmen veel beter met de theorie overeen, zoals ook reeds op blz. 36 vermeld werd.

Uit dit alles blijkt wel hoe „gevoelig” het modelonderzoek van sommige constructies, in casu schalen, is. Om behoorlijk te kunnen meten wordt gestreefd naar een grote ε . Die wordt verkregen door de spanningen aan de E van het modelmateriaal aan te passen, d.w.z. door een zo hoog mogelijk gekozen grootte van de belasting. Maar dan bestaat het gevaar, dat de doorbuigingen en daarmee de waarde w der grootheid w/t zo oplopen, dat het gedrag niet lineair meer is. Voor de praktijk ligt het anders. In het algemeen tracht men door een juiste vormgeving de verplaatsingen w klein te houden. Dit wordt onder meer bereikt door toepassing van voorspankabels, zodat dan de resulterende verplaatsingen w ten gevolge van eigen gewicht en voorspanning samen, klein uitvallen. Bijgevolg gaat de theorie beter op. Men superponeert aldus twee berekeningen die elk op zich misschien onjuist zijn, maar juist deze superpositie maakt dat de uitkomst toch goed is. Het is dus niet nodig zich in die gevallen tot de vrijwel ontoegankelijke niet-lineaire theorie te wenden.

4 Gebogen kabels

4.1 Algemeen

Evenals bij voorgespannen liggers kunnen gebogen kabels een gunstiger inwendige krachtswerking in de constructie geven. Voor een juist begrip van het gedrag van de schaal is het noodzakelijk een inzicht te krijgen in de krachten die de kabel op de schaal uitoefent.

De gebogen spankabel verloopt volgens een ruimtekromme en werkt statisch

onbepaald, d.w.z. er zijn een oneindig aantal krachtsverdelingen aan te geven die met de oplegreacties c.q. de voorspankrachten evenwicht maken. Ter vereenvoudiging is daarom aangenomen, dat de krachten, die de kabel in een bepaald punt op de schaal uitoefent, liggen in het normaalvlak op de kabel in dat punt. Er wordt dus geen rekening gehouden met wrijving tussen kabel en schaal.

4.2 Krachswerking van de kabel

Bij met gebogen kabels voorgespannen liggers wordt, met verwaarlozing van wrijving, aangenomen dat over zijn lengte de voorspankabel nagenoeg verticale krachtjes op de ligger uitoefent (fig. 8).

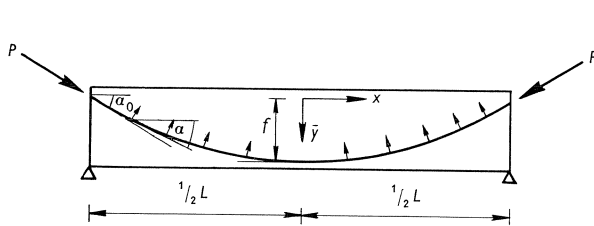


Fig. 8.

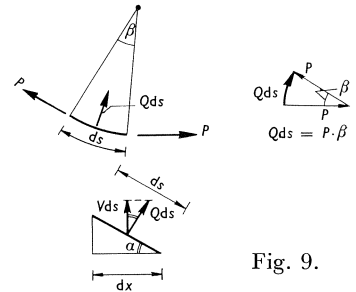


Fig. 9.

Wanneer de kabel een paraboolvorm heeft, wordt het verloop van de kabelas beschreven door:

$$\bar{y} = \frac{4f}{L^2} \cdot (1/4 L^2 - x^2)$$

Hierin is f de pijl van de parabool.

Dan is:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\bar{y}}{dx} = -\frac{8f}{L^2} \cdot x \quad \text{en} \quad \frac{d\bar{y}^2}{dx^2} = -\frac{8f}{L^2} \approx -\text{kromming}$$

In fig. 9 is het krachtje Qds de resultante van de kabelkrachten P en volgt hieruit:

$$Vds = Qds \cdot \cos \alpha,$$

$$\text{dus:} \quad V \frac{ds}{dx} = Q \frac{ds}{dx} \cos \alpha = Q$$

$$\text{of wel:} \quad V \frac{ds}{dx} = P \frac{\beta}{ds} = P \times \text{kromming.}$$

De verticale componenten van de krachtjes die de kabel op de ligger uitoefent zijn nu per lengte-eenheid in de x -richting $= 8fP/L^2$ kgf/cm.

Iets dergelijks gebeurt wanneer gebogen kabels toegepast worden bij een schaal. Wanneer de kabel op het uitgeslagen schaaloppervlak parabolvormig verloopt en in de middendoorsnede de rechte rand raakt, is de kabelkromming in een aan de schaal rakend vlak ook $8f/L^2$. In het vlak van de schaal oefent de kabel krachtjes uit, die ook $8f/L^2 \cdot P$ zijn. De componenten van deze krachtjes in y -richting per lengte-eenheid in x -richting zijn weer: $8f/L^2 \cdot P$.

Dit zijn N_y -spanningskrachten, die langs de kabel optreden; ze zijn aangeduid met Y_p :

$$Y_p = \frac{8f}{L^2} \cdot P \text{ kgf/cm in } x\text{-richting.}$$

In de richting loodrecht op het schaaloppervlak is de kabel ook gekromd. Omdat de kabel in het schaaloppervlak ligt is die kromming gelijk aan de kromming van de schaal in een vlak dat een hoek α maakt met de x -richting. Deze hoek kan berekend worden met behulp van de stelling van EULER, die zegt, dat de kromming van het oppervlak in een vlak dat een hoek α maakt met het vlak, waarin een van de hoofdkromtestralen ligt, gelijk is aan:

$$1/r_a = (1/r_1)\cos^2\alpha + (1/r_2)\sin^2\alpha.$$

r_1 is in ons geval de hoofdkromtestraal in x -richting en derhalve oneindig groot; r_2 is de hoofdkromtestraal in y -richting en dus gelijk aan de straal R van de cilinder.

We krijgen dan ten slotte: $1/r_a = (1/R)\sin^2\alpha$, of wel: $1/r_a = \frac{\sin^2\alpha}{R}$.

De kabel oefent op de schaal in z -richting een lijnlast uit ter grootte van het produkt van de kabelkracht en de kromming in die richting. Deze lijnlast is Z_p genoemd; betrokken op de x -richting wordt deze:

$$Z_p = \frac{P}{R} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \text{ kgf/cm (in } x\text{-richting).}$$

Met $1/\cos\alpha = \sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}$, $\sin^2\alpha = \frac{\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}$ en $\text{tg}\alpha = -\frac{8f}{L^2} \cdot x$ wordt dit:

$$Z_p = \frac{64f^2x^2}{\sqrt{L^8+64f^2L^4x^2}} \cdot \frac{P}{R} \text{ kgf/cm (} x\text{-richting).}$$

Deze lijnlast verloopt ongeveer parabolvormig, is maximaal bij de opleggingen en nul bij de middendoorsnede.

In fig. 10 zijn de krachten getekend die de kabel op de schaal uitoefent. Bij de verankeringspunten kan de voorspankracht ontbonden worden in een kracht $P_x = P \cos \alpha_0 \approx P$ in x -richting en een kracht $P_y = P_x \text{ tg } \alpha_0 \approx 4f/L \cdot P$ in y -richting. Verder werken de lijnlasten Y_p en Z_p langs de kabel.

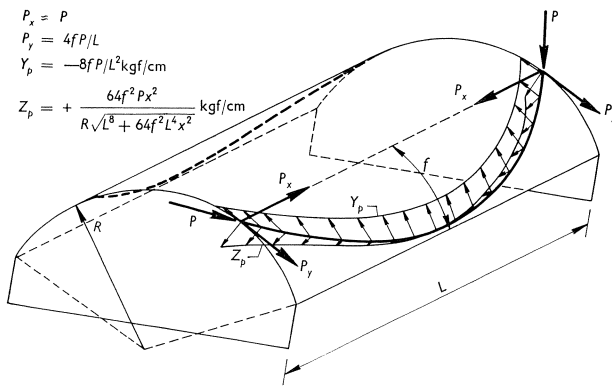


Fig. 10. Krachten die de kabel op de schaal uitoefent.

4.3 Uitgebreide berekening

3a. Bij voorgespannen liggers verplaatst men de lijnlast Y_p in gedachten naar de onderzijde van de ligger: dat verandert niets aan de berekening. Bij de schaal kan analoog de lijnlast Y_p die langs de kabel werkt, naar de rechte schaalrand verplaatst worden, hetgeen de berekening vereenvoudigt, omdat een dergelijke lijnlast bij de schaalberekening als randvoorwaarde ingevoerd kan worden. Voor een zwevende rand kan dan gesteld worden dat:

$$[N_y]_y = \pm R\varphi_0 = -\frac{8f}{L^2} \cdot P \text{ kgf/cm.}$$

Hierbij valt op te merken, dat door de verplaatsing naar de rand de volgende verschillen optreden:

- 1e ieder Y_p -krachtje sluit nu met de „oplegkracht” P_y een constante hoek f/R in (fig. 11). In werkelijkheid is de ingesloten hoek bij de verankeringen nul en verloopt hij naar een maximum f/R ter plaatse van het midden van de schaal. De opwaartse kracht van Y_p wordt dus te gunstig voorgesteld;
- 2e om dezelfde reden is het dwarsmoment M_y t.o.v. de top groter dan het moment om de top van de oorspronkelijke Y_p -belasting langs de gebogen kabel.

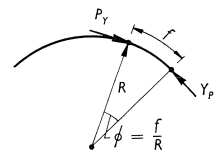


Fig. 11.

Wanneer de schaal, zoals gebruikelijk is, uitgerekend wordt voor de eerste harmonische van de FOURIERreeks, waarin de Y_p -randbelasting kan worden ontwikkeld, wordt aan deze bezwaren tegemoet gekomen. Want het goniometrische verloop van de eerste harmonische brengt met zich mee dat de randbelasting naar de opleggingen toe kleiner wordt. Dit komt kwalitatief overeen met de afname van de opwaartse kracht en het moment om de top van de oorspronkelijke Y_p langs de kabel.

3b. De lijnlast Z_p kan benaderd worden met een bultvormige belasting per oppervlakte-eenheid in z -richting, z_p . De „belastingbulten” liggen bij de vier hoeken van de schaal.

$$z_p = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2 f^2}{R^2 \varphi_0 L^2} \cdot P \cdot \left(\cos \frac{x\pi}{L} - \cos \frac{3x\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{y\pi}{2R\varphi_0} - \cos \frac{3y\pi}{2R\varphi_0} \right) \text{ kgf/cm}^2;$$

$$z_{p\max} \approx 1,9 \frac{f^2}{R^2 \varphi_0 L^2} \cdot P \text{ kgf/cm}^2.$$

Met $f = 1/2 R\varphi_0$, $R = 1156$ cm, $L = 1800$ cm, $t = 7$ cm en $\varphi_0 = 0,597$ rad wordt $z_{p\max} = 8,75 P \cdot 10^{-8}$ kgf/cm².

Voor $P = 50$ ton (d.i. de voorspankracht nodig om de maximum trekspanning door de gebruiksbelasting tot nul te reduceren) wordt dan

$$z_{p\max} = 45 \text{ kgf/m}^2$$

(dit is rond 25% van het e.g. + dakbedekking e.d.).

Deze belasting kan vooral nabij de opleggingen aanleiding geven tot belangrijke negatieve dwarsmomenten in de top en positieve dwarsmomenten in de omgeving van de kabel. In voorkomende gevallen lijkt het nuttig in deze gebieden de wapening van de schaal in dwarsrichting niet te zuinig te kiezen; bovenwapening in de top en onderwapening onder de kabels zijn hier zeer dienstig.

3c. De berekening van de schaal voor de z_p -belasting wordt gesplitst in een berekening volgens de membraantheorie en een berekening volgens de buigingstheorie. De membraancomponenten van de spanningskrachten zijn:

$$N_{y_m} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2 f^2}{R\varphi_0 L^2} \cdot P \left(\cos \frac{x\pi}{L} - \cos \frac{3x\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{y\pi}{2R\varphi_0} - \cos \frac{3y\pi}{2R\varphi_0} \right) \text{ kgf/cm}$$

$$N_{xy_m} = +\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi^2 f^2}{R^2 \varphi_0^2 L} \cdot P \left(\sin \frac{x\pi}{L} - \frac{1}{3} \sin \frac{3x\pi}{L} \right) \left(3 \sin \frac{3y\pi}{2R\varphi_0} - \sin \frac{y\pi}{2R\varphi_0} \right) \text{ kgf/cm}$$

$$N_{x_m} = -\frac{3}{16} \cdot \frac{\pi^2 f^2}{R^3 \varphi_0^3} \cdot P \left(\frac{1}{9} \cos \frac{3x\pi}{L} - \cos \frac{x\pi}{L} \right) \left(9 \cos \frac{3y\pi}{2R\varphi_0} - \cos \frac{y\pi}{2R\varphi_0} \right) \text{ kgf/cm}$$

Langs de rechte randen is $N_{y_m} = 0$ en met enige benadering:

$$[N_{xy_m}]_{y = -R\varphi_0} = -3/2 \cdot \frac{\pi^2 f^2}{R^2 \varphi_0^2 L} \cdot P \cdot \sin \frac{x\pi}{L}.$$

Langs de gekromde randen zijn N_{y_m} en N_{x_m} nul, daar wordt dus aan de randvoorwaarden voldaan.

De spanningsverdeling in de tonschaal die door de Z_p - en Y_p -belastingen veroorzaakt wordt, kan berekend worden door op de gegeven membraanspanningskrachten ten gevolge van Z_p de spanningskrachten en momenten te

superponeren, die men vindt met een D.K.J.-berekening, waarbij de volgende randvoorwaarden langs de rechte randen gesteld worden:

$$[M_y]_{y = \pm R\varphi_0} = 0$$

$$[N_y]_{y = \pm R\varphi_0} = -\frac{32 fP}{\pi L^2} \cos \frac{x\pi}{L}$$

$$[R_y]_{y = \pm R\varphi_0} = 0$$

$$[N_{xy}]_{y = +R\varphi_0} = -[N_{xy}]_{y = -R\varphi_0} = +3/2 \cdot \frac{\pi^2 f^2}{R^2 \varphi_0^2 L} P \sin \frac{x\pi}{L}.$$

De aldus verkregen spanningsverdeling moet gesuperponeerd worden op de spanningsverdeling veroorzaakt door de puntlasten $P_x \approx P$. De berekening hiervan is in **1** schematisch aangegeven.

De berekening van de spanningsverdeling die door gebogen voorspankabels veroorzaakt wordt is op deze wijze echter, door zijn bewerkelijkheid, voor praktische doeleinden volkomen ongeschikt. Dat neemt niet weg, dat het nuttig is zich rekenschap te geven van de verschillende krachten, die de kabel op de schaal uitoefent, hetgeen leidt tot een beter inzicht in het gedrag van de schaal. Verschillende verschijnselen, zoals de door Z_p veroorzaakte negatieve momenten in de top, kunnen daardoor worden verklaard.

4.4 Eenvoudige berekening

Een veel eenvoudiger berekening van de spanningsverdeling in de middendoorsnede kan opgezet worden naar analogie van de voorgespannen ligger, waarbij de spanningsverdeling in de middendoorsnede bepaald kan worden door het evenwicht van die doorsnede te beschouwen (fig. 12).

Het moment van de kabelkracht om de as van de balk is $P \cdot e$ en de normaalkracht is P . Dan worden de spanningen in de uiterste vezels:

$$\sigma = \pm \frac{P \cdot e}{W} - \frac{P}{F},$$

(W = weerstandsmoment, F = oppervlak van de doorsnede).

Dit leidt tot de bekende lineaire spanningsfiguur. Anders gezegd: de spanningsverdeling in de middendoorsnede is dezelfde als die een rechte kabel met een excentriciteit e zou veroorzaken.

Dit begrip kan bij een schaal toegepast worden. In de middendoorsnede daarvan raakt de kabel de rechte rand, zodat gesteld kan worden, dat de spanningsverdeling in die middendoorsnede dezelfde is alsof er een rechte kabel langs de rechte rand lag. De puntlasten van de kabeleinden zijn a.h.w. naar de hoekpunten van de schaal verplaatst, welk belastingsgeval betrekkelijk eenvoudig te berekenen is. P kan ontwikkeld worden in een reeks

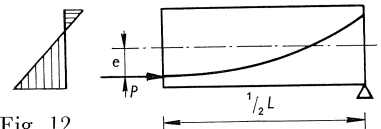


Fig. 12.

schuifspanningskrachten langs de rechte rand (zie ook **1**). Dan kan volstaan worden met een D.K.J.-berekening waarbij randvoorwaarden langs de rechte randen in rekening gebracht worden.

4.5 *Vergelijking van de eenvoudige berekening met de uitgebreide berekening*

De schaal van fig. 1 is op beide manieren berekend voor het geval dat de verankering van de gebogen kabel midden tussen de top en de rechte rand ligt ($d = 1/2 R\varphi_0$).

In fig. 13 is de langsspanningsverdeling (σ_x) en het verloop van de dwarsmomenten (M_y) in de middendoorsnede volgens verschillende berekeningen gegeven. Daarbij is onderscheid gemaakt tussen de uitgebreide berekening met in rekening brengen van Z_p (aangeduid met I) resp. zonder in rekening brengen van Z_p (aangeduid met II). Z_p is evenredig met f^2 en Y_p met f , zodat Z_p bij sterker gekromde kabels relatief belangrijker wordt. Het blijkt, dat de maximum waarde van σ_x volgens de eenvoudige berekening (aangeduid met III) goed overeenstemt met die volgens de uitgebreide rekenwijze (I). Tevens blijkt uit het verschil tussen II en I, dat de Z_p -belasting van grote invloed is op de langsspanningsverdeling.

De overeenkomst in het verloop van de dwarsmomenten is, gezien de vele benaderingen die zijn toegepast, redelijk te noemen. Het blijkt, dat de druk-

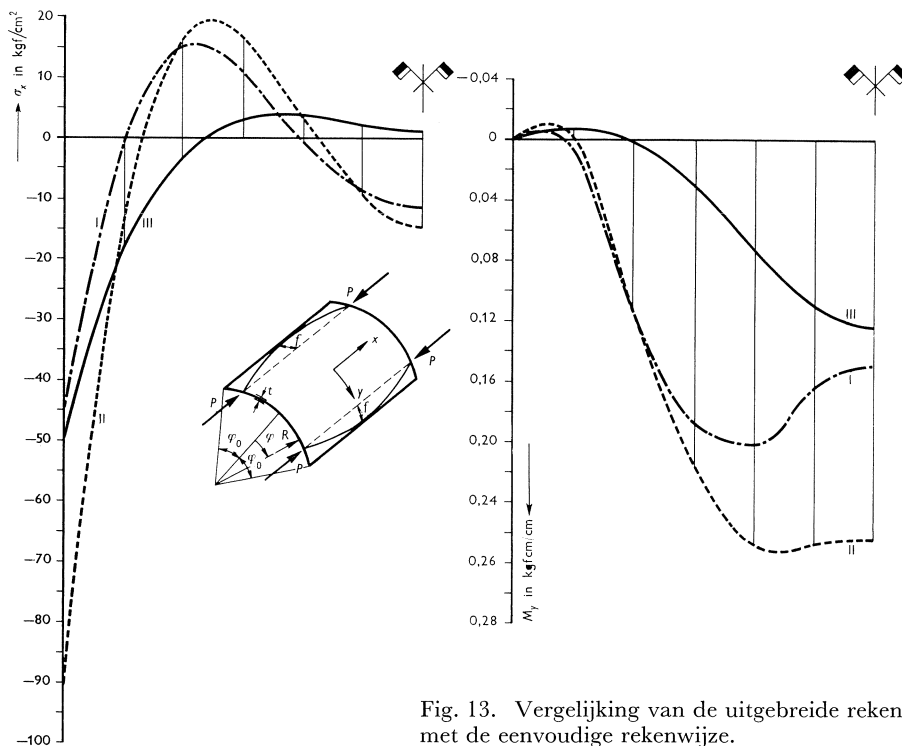


Fig. 13. Vergelijking van de uitgebreide rekenwijze met de eenvoudige rekenwijze.

krachten Y_p langs de rechte rand in de top een groot positief moment geven (kromme II). De Z_p -belasting knijpt de schaal als het ware samen en geeft een negatief moment in de top. Het resulterende (positieve) moment wordt daardoor kleiner (kromme I).

Concluderend kan gesteld worden, dat voor de middendoorsnede de eenvoudige berekening tot redelijke resultaten leidt. Deze berekening zou nog aan aantrekkelijkheid winnen, wanneer men uitgaande van de spanningsverdeling in de middendoorsnede, met behulp van een nader te bepalen correctieberekening, de spanningsverdeling in andere doorsneden zou kunnen vinden. Dit is vooral van belang met het oog op de door Z_p veroorzaakte negatieve momenten in de top nabij de opleggingen. Het onderzoek naar een dergelijke correctie is nog niet afgesloten.

5 Samenvatting en conclusies

Beschreven is een experimenteel onderzoek naar de spanningsverdeling in een tonschaal zonder randleden, onder invloed van rechte voorspankabels. Daartoe is een klein plastic model (schaal 1 : 35, dikte 2 mm) gebruikt. De schaal werd belast met langs eenzelfde beschrijvende werkende tegengesteld gerichte onderling puntlasten, paarwijze symmetrisch ten opzichte van de toplijn.

De afstand van elk paar beschrijvenden tot de top van de schaal werd gevarieerd. In een drietal dwarsdoorsneden werden de rekken aan boven- en onderzijde van de schaal in asrichting en de richting loodrecht daarop gemeten.

De uitkomsten van de metingen zijn vergeleken met de uitkomsten van D.K.J.-berekeningen; de overeenstemming tussen de gemeten en berekende langsspanningen bleek in het algemeen goed te noemen. De grootste afwijkingen traden op wanneer de voorspankrachten dicht bij de rechte randen aangrepen; in dat geval waren de gemeten langsspanningen, afgezien van een smal gebied langs de rechte rand, groter dan de berekende. De overeenkomst tussen de gemeten en berekende dwarsmomenten was minder goed. In het geval waarbij de voorspankrachten dicht bij de rechte rand aangrepen bepaald slecht in de middendoorsnede: de gemeten dwarsmomenten waren daar meer dan twee maal zo groot als de berekende. In het algemeen nam de overeenstemming af naarmate de voorspankrachten dichter bij de rechte rand aangrepen en de beschouwde dwarsdoorsnede dichter bij het schaal midden lag.

Het bleek, dat deze afwijkingen voor een groot deel veroorzaakt werden door het niet-lineaire gedrag van de schaal. Dit gedrag kan verklaard worden uit het feit, dat de doorbuigingen w niet klein waren ten opzichte van de modelschaaldikte t . Uit de berekeningen volgt dat w/t voor de middendoorsnede in de orde van 0,4 was. Getracht is het effect van de te grote doorbuigingen w te achterhalen door de belasting geleidelijk te verhogen. De hierbij afgeleide meetwaarden bleken veel beter met de theorie overeen te stemmen.

Op grond van het voorgaande kan gesteld worden, dat de theorie goed door

het experiment wordt bevestigd. Maar men moet vooral ten aanzien van de dwarsmomenten ervoor zorg dragen, dat niet-lineaire verschijnselen de meetresultaten niet verstoren. De langsspanningen blijken hiervoor veel minder gevoelig. Wanneer men door een juiste vormgeving en dimensionering van de schaal en door een juiste keuze van de voorspanning ervoor zorgt, dat de verplaatsingen w (ten gevolge van belasting en voorspanning samen), klein blijven, is het niet nodig zich tot de niet-lineaire theorie te wenden.

De krachtswerking tussen kabel en schaal bij tonschalen voorgespannen met gebogen kabels is onderzocht. Aan de hand daarvan is een uitgebreide berekening van de spanningsverdeling in de schaal opgezet. De resultaten van deze berekening zijn vergeleken met een eenvoudige rekenwijze, waarbij men de kabel recht denkt en langs de rechte rand gelegen veronderstelt. Het blijkt, dat de langsspanningen en de dwarsmomenten in de middendoorsnede volgens deze eenvoudige rekenwijze redelijk overeenstemmen met die volgens de uitgebreide rekenwijze. Aangezien de uitgebreide rekenwijze voor praktische doeleinden te bewerkelijk is, komt het gebruik van de eenvoudige rekenwijze aan dit bezwaar voldoende tegemoet.