

# OVER BENADERINGSMETHODEN BIJ DE BEREKENING VAN SCHALEN <sup>1)</sup>

U.D.C. 624.074.2

*Na een historische inleiding wordt een kort overzicht gegeven van elementaire methoden, waarbij hun voordelen en hun tekortkomingen worden besproken. Het grootste gedeelte van het artikel is evenwel gewijd aan benaderingsmethoden die uitgaan van de algemene theorie. Een klassificatie wordt gegeven van mogelijke spanningstoestanden. Drie randvoorwaarde-problemen worden nader onderzocht: de gebogen rand van een cilindrische schaal, de rechte rand van een cilindrische schaal en de rechte rand van een hyperbolische paraboloid schaal en mogelijke vereenvoudigingen worden besproken. De procedure die wordt gevolgd in het geval van de gebogen rand van een cilindrische schaal is ook toepasbaar bij het onderzoek van andere schaalvormen, in het bijzonder bij dubbel gekromde oppervlakken. Er wordt op gewezen dat de rekloze verbuigingen moeten worden voorkomen door juist gekozen randvoorwaarden. Noodzakelijke voorwaarden worden gesteld, waarbij een membraanspanningstoestand zal optreden. Verscheidene voorbeelden lichten de tekst toe.*

## 0 Inleiding

Voor een gezelschap als hier aanwezig zal de uitdrukking „benaderingsmethoden” een zeer uiteenlopende betekenis kunnen hebben. Wetenschappelijke onderzoekers, elasticiteitstheoretici en toegepast-wiskundigen zullen hierbij vooral denken aan benaderingen op mathematische of fysische grondslag binnen het raam van de algemene schalentheorieën. Veelal noodzaakt de gecompliceerdheid van de algemene theorieën hiertoe teneinde in concrete gevallen werkelijk tot een oplossing te kunnen komen. Voorts dient in dit verband te worden bedacht dat in feite geen enkele schalentheorie exact is, doch dat elke theorie een benaderend karakter heeft, veroorzaakt door de onderstellingen waarop deze is gebaseerd.

Architecten en constructeurs daarentegen zullen bij de uitdrukking „benaderingsmethoden” wellicht denken aan een technische aanpak van het probleem, waarbij het gedrag van de schaalconstructie wordt herleid tot of ontleed in dat van bekende eenvoudiger constructie-elementen, zodat op min of meer elementaire en liefst snelle en eenvoudige wijze een redelijk nauwkeurig inzicht in de spanningsverdeling van de schaalconstructie kan worden verkregen. Een standaardvoorbeeld van deze aanpak is de liggermethode van LUNDGREN voor lange cilindrische schalen.

Tussen deze beide gedachtenwerelden gaapt veelal een grote kloof die vaak moeilijk is te overbruggen. Beide bevatten waardevolle aspecten.

---

<sup>1)</sup> Tekst van een inleidende voordracht op de „World Conference on Shell Structures”, San Francisco, California, 30 september – 4 oktober 1962, verschenen in de Proceedings, Washington 1963, blz. 56.

De technische aanpak heeft veelal het voordeel van een zekere aanschouwelijkheid. Voor velen blijven de elementaire methoden evenwel beperkt tot cilindrische en prismatische schalen, maar juist bij deze schalen is de tegenstelling tussen de elementaire methoden en de algemene theorie het grootst. Wil men langs deze weg verder komen dan dient men zich vertrouwd te maken met andere concepties dan de eenvoudige ligger, b.v. met de elastisch ondersteunde ligger en met de membraanwerking in een schaal.

De algemene schalentheorieën bieden uiteraard meer perspectief. Benaderingen in het raam van deze algemene theorieën zullen evenwel vooral gebaseerd moeten zijn op fysische grondslagen en het inzicht dat men zich in het gedrag van de constructie heeft verschaft. Op deze wijze kunnen de beide methoden naar elkaar toe groeien en de tegenstellingen afnemen.

Van oorsprong behoren de schalen tot het gebied van de elasticiteitstheoretici zoals Lamé en Clapeyron die reeds in 1828 de membraanspanningstoestand van omwentelingsschalen onderzochten. De membraantheorie is reeds als een benaderingstheorie te beschouwen die in veel gevallen echter alleszins betrouwbare resultaten geeft. Met de algemene buigingstheorie van schalen werd in 1874 door Aron en omstreeks 1890 door Love een begin gemaakt. De gecompliceerdheid van het probleem noodzaakte Love reeds genoeg te nemen met benaderingen en te spreken van een eerste en een tweede benadering.

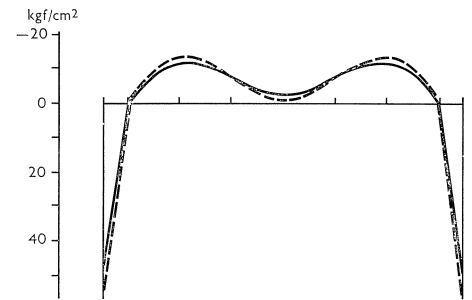
De theorie van Love leende zich nog niet voor praktische toepassingen. Met de ontwikkeling van de hoogwaardige constructiematerialen staal en gewapend beton waarin constructies als schalen konden worden gerealiseerd ontstond de behoefte aan werkelijke berekeningsmethoden voor schaalconstructies.

Omstreeks 1910 vangt – ook in de ingenieurswereld – de stroom van publikaties aan waarin – veelal uitgaande van de grondslagen zoals door Love werden gelegd – de theorieën verder worden ontwikkeld en in veel gevallen tot bruikbare berekeningsmethoden worden uitgewerkt. De belangrijkste publikaties zijn welbekend. Zij behandelen meestal slechts een bepaald type schaal, in de eerste plaats de bolschaal en de cilinderschaal, voorts bepaalde omwentelingsschalen en enkele andere eenvoudige oppervlakken zoals b.v. de hyperbolische parabolöide. Gesteld kan worden dat tot 1940 de kennis tot deze eenvoudige oppervlakken beperkt bleef.

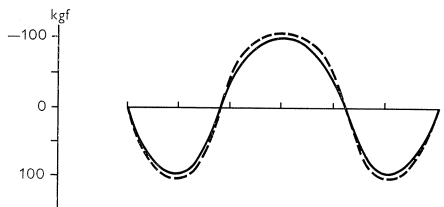
Onder de berekeningsmethoden van die tijd zijn reeds typische benaderingsmethoden waarvan in de eerste plaats genoemd kunnen worden de methode van de asymptotische integratie, door BLUMENTHAL [1] in 1914 reeds geïntroduceerd bij de berekening van de axiaalsymmetrisch belaste bolschaal, en de methode van GECKELER [2] uit 1926 voor hetzelfde probleem. Voor een uiteenzetting van beide methoden kan worden verwezen naar [3]. Zoals bekend leidde het snel dempend karakter van de randstoring Geckeler er toe in de vergelijkingen van Reissner (1912) de lagere afgeleiden van de afhankelijk variabelen te verwaarlozen t.o.v. de hogere afgeleiden waardoor deze vergelijkingen identiek worden met de bekende vergelijking van de elastisch onder-

steunde ligger. Beide procedures vormen heden ten dage een belangrijk hulpmiddel bij het onderzoek van de spanningstoestand bij meer gecompliceerde situaties. Er mag ook nog worden gewezen op de reeds toen aanwezige noodzaak tot het ontwikkelen van benaderingsmethoden voor de bolschaal, daar de exacte berekeningsmethode bij dunne schalen op grote moeilijkheden stuitte.

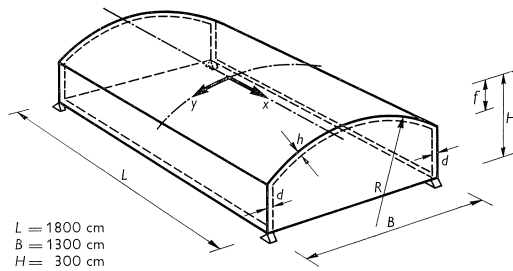
SCHORER [4] paste bij open cilindrische schalen in 1935 de procedure van Geckeler toe voor de storing die van de rechte randen uitgaat. De wiskundige vereenvoudigingen die hij hiermee bereikte t.o.v. andere berekeningsmethoden uit die tijd waren aanzienlijk. Zijn berekeningsmethode was toen dan ook verreweg de eenvoudigste. Het benaderende karakter van de oplossing is echter veel sterker dan bij de methode Geckeler voor de bolschaal om redenen die later zullen blijken. De methode van Schorer geeft dan ook slechts betrouwbare resultaten bij de zogenaamd „lange” schalen. De grenzen van toepasbaarheid hangen evenwel af van vele factoren en zo zullen in het geval van fig. 1 de resultaten volgens Schorer nog acceptabel kunnen worden genoemd.



De langsspanning  $\sigma_x$  in de middendoorsnede  $x = 0$ .



Het buigend moment  $M_y$  in de middendoorsnede  $x = 0$ .



- $L = 1800$  cm
- $B = 1300$  cm
- $H = 300$  cm
- $f = 200$  cm
- $R = 1156$  cm
- $h = 7$  cm
- $d = 15$  cm
- $\frac{L}{B} = 1,4$
- $\frac{H}{L} = 0,17$
- $\frac{f}{L} = 0,11$
- $\frac{R}{L} = 0,64$
- $\frac{h}{R} = 0,006$

Fig. 1. Resultaten volgens de methode Schorer vergeleken met die volgens de vergelijkingen van Donnell. Eigen gewicht  $g = 0,019$  kgf/cm<sup>2</sup>.

— volgens de vergelijkingen van Donnell.  
 - - - volgens de methode van Schorer.

De vergelijkingen van Geckeler en Schorer kunnen ook rechtstreeks worden verkregen indien bij de afleiding in enkele fundamentele betrekkingen bepaalde grootheden (rekken, momenten) worden verwaarloosd. Het fysisch karakter van de benadering weerspiegelt zich ook hierin.

Andere benaderingsmethoden voor de berekening van cilindrische schalen

uit de tijd voor 1940, zoals b.v. de methoden FINSTERWALDER [5, 6] en AAS JAKOBSEN [7] die een belangrijke mijlpaal hebben gevormd in de ontwikkeling van de berekeningsmethodiek, hebben inmiddels aan betekenis ingeboet daar zij zijn achterhaald door meer universele c.q. eenvoudiger methoden.

Eerst na 1940 krijgen de vergelijkingen van DONNELL voor cilindrische schalen [8] de zo nodige bekendheid. Bij het opstellen van deze vergelijkingen zijn op rigoureuze wijze niet of weinig essentiële termen geschrapt. In de veelheid van publikaties met steeds andere karakteristieke vergelijkingen doen deze vergelijkingen van Donnell verfrissend aan. VON KARMAN en TSIEN [9], JENKINS [10] en WLASSOW [11] gaan dezelfde weg en velen volgen hen. Onderzoek naar de nauwkeurigheid van deze vergelijkingen vindt plaats [12] en ofschoon niet in alle gevallen exact, blijken zij in het algemeen tot betrouwbare uitkomsten te leiden. Rekenschema's [13, 14] en tabellenboeken [15], gebaseerd op deze vergelijkingen, verschijnen en zij maken de berekening van cilindrische schalen eenvoudiger en toegankelijker. Enkelen die in hun werk van andere vergelijkingen uitgingen geven achteraf toe dat dezelfde resultaten (grafieken, tabellen) met behulp van de eenvoudiger vergelijkingen van Donnell hadden kunnen worden verkregen [11, 16]. Op verscheidene plaatsen zijn thans programma's voor elektronische rekenmachines samengesteld met behulp waarvan vele opgaven snel tot een oplossing kunnen worden gebracht. Ook verschenen reeds systematische verzamelingen van resultaten van berekeningen [17].

Eerst na 1945 begint ook het inzicht te groeien welke graad van nauwkeurigheid men – gezien de onderstellingen waarvan wordt uitgegaan – aan een schalentheorie kan toekennen, en worden algemene schalentheorieën gebaseerd op dit inzicht opgesteld, zie b.v. [18]. Alvorens evenwel deze algemene theorieën als uitgangspunt voor onderscheidene benaderingen te nemen willen we ons eerst tot de meer elementaire methoden wenden.

## 1 Elementaire methoden

Met de toenemende verbreiding na 1945 van cilindrische en prismatische schaalconstructies kwam sterk de behoefte naar voren aan elementaire berekeningsmethoden, geschikt om door een constructeur te worden gehanteerd. In deze categorie kunnen worden geplaatst:

- a. de liggermethoden,
- b. de berekening van vouwschalen,
- c. methoden waarbij het gedrag van een schaal in een aantal functies wordt ontleed.

Ad a. De liggermethode bekend onder de naam van LUNDGREN heeft velen tot het berekenen van schaalconstructies gebracht. Tot op de huidige dag verschijnen publikaties waarin deze methode wordt gevolgd of waarin wijzi-

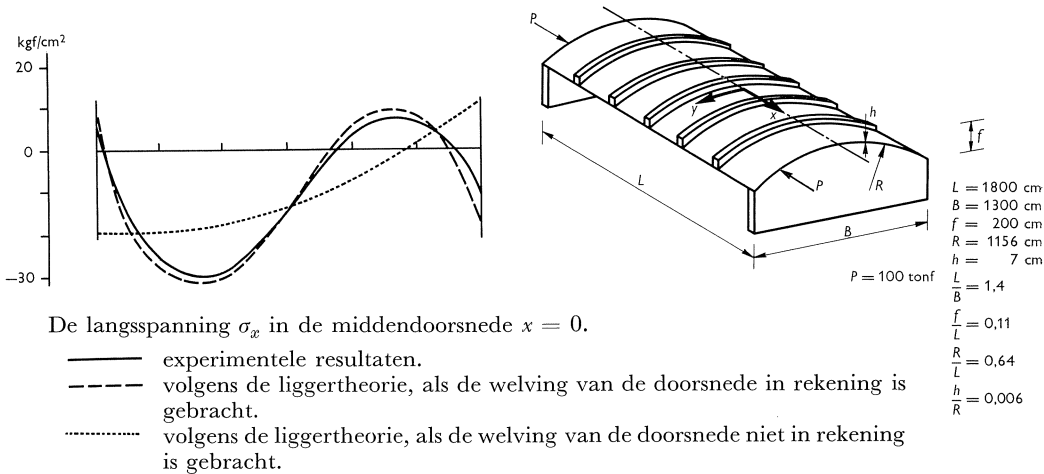


Fig. 2. Resultaten van de liggermethode, zowel met als zonder het in rekening brengen van de werving, vergeleken met experimentele resultaten verkregen met een model van trovidur (een p.v.c.). De dwarsdoorsnede kon dank zij verstijvingsribben niet vervormen.

gingen of uitbreidingen worden voorgesteld. Lundgren zelf gaf trouwens reeds verscheidene varianten c.q. uitbreidingen in zijn bekende boek [19].

De liggermethode in zijn eenvoudigste vorm geeft betrouwbare uitkomsten – zelfs bij niet lange schalen – indien de dwarsdoorsnede b.v. dank zij verstijvingsribben niet kan vervormen. De werving van de doorsnede kan een zeer

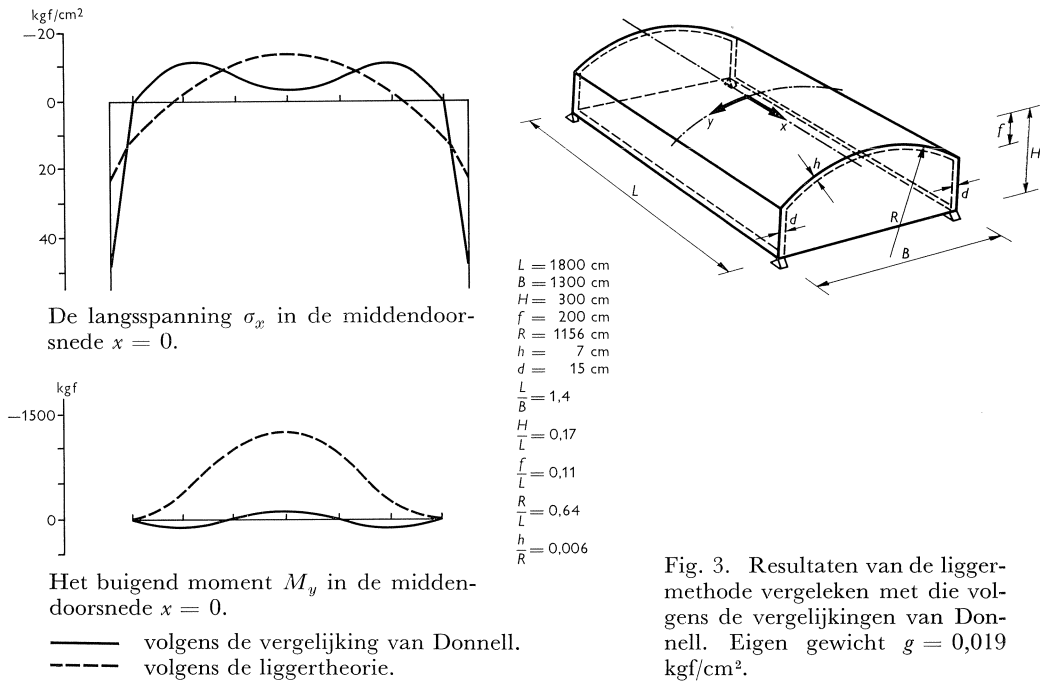
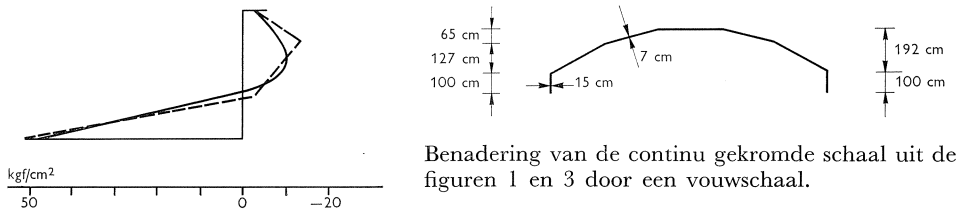


Fig. 3. Resultaten van de liggermethode vergeleken met die volgens de vergelijkingen van Donnell. Eigen gewicht  $g = 0,019$  kgf/cm<sup>2</sup>.

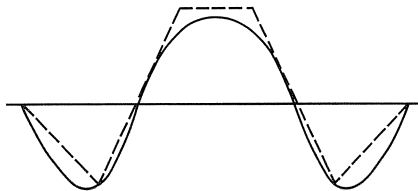
grote invloed hebben en moet uiteraard in rekening worden gebracht. Een voorbeeld hiervan is gegeven in fig. 2. Voor deze welvingstheorie kan o.a. worden verwezen naar de publikaties van TIMOSHENKO [20] en VLASOV [21]. In het uitstekende boek van Vlasov wordt de berekening van schaalconstructies als dunwandige balken uitvoerig behandeld. Kan de dwarsdoorsnede wel vervormen, dan kunnen de afwijkingen tussen de uitkomsten van de liggermethode en de werkelijkheid aanzienlijk worden. Fig. 3 geeft hiervan een voorbeeld. Een nauwkeuriger – iteratieve – methode van Lundgren om de werkelijkheid te benaderen wordt zeer bewerkelijk en is eigenlijk alleen op zijn plaats in die gevallen waarvoor geen analytische methoden ter beschikking staan.

De elementaire liggermethode zal dan ook de beste resultaten geven voor zgn. lange binnenschalen, d.w.z. schalen die zodanig deel uitmaken van een reeks dat zij in dwarsrichting weinig kunnen vervormen. Anderzijds vormen deze schalen, indien zij een cirkelvormige dwarsdoorsnede hebben, ook bij een analytische berekeningswijze – al of niet met behulp van tabellen – geen probleem, zodat naar mijn mening deze laatste wijze van werken voor cirkelcilindrische schalen thans de voorkeur verdient.

De vele varianten c.q. uitbreidingen van de liggermethode die in de literatuur worden aangetroffen hebben voor cirkelcilindrische schalen slechts zin voor zover zij vereenvoudigingen in de procedure bewerkstelligen. Voor zover zij naar grotere nauwkeurigheid in de uitkomsten streven en daardoor tot grotere bewerkelijkheid leiden schieten zij hun doel voorbij. Voor nauwkeurige berekeningen bestaan thans analytische methoden waarmee snel en doeltreffend kan worden gewerkt. Voor het ontwerpen zijn de eenvoudigste regels het meest op hun plaats.



De langsspanning  $\sigma_x$  in de middendoorsnede  $x = 0$ .



Het buigend moment  $M_y$  in de middendoorsnede  $x = 0$ .

— volgens de vergelijkingen van Donnell.  
 - - - resultaten voor de vouwschaal.

Fig. 4. Resultaten van een vouwschaalberekening vergeleken met die volgens de vergelijkingen van Donnell voor een cirkelcilindrische schaal. Eigen gewicht  $g = 0,019 \text{ kgf/cm}^2$ .

Ad b. De door GRUBER [22] verbeterde vouwschaalmethode van EHLERS [23] en de methode van WLASSOW [11] vormen alleszins bruikbare methoden voor de berekening van prismatische schalen. Varianten hierop zijn bekend waarbij b.v. de vereffeningsmethode van Cross in de berekening wordt geïntroduceerd [24]. Het is begrijpelijk dat velen hebben getracht met een dergelijke berekening ook de spanningsverdeling in een cilindrische schaal te bepalen door de continu gekromde doorsnede te benaderen door een gebroken lijn, b.v. [25]. Een redelijk goede benadering van de exacte spanningsverdeling is op deze wijze mogelijk zoals blijkt uit het voorbeeld in fig. 4. Men streeft niet naar een groot aantal knikken in de vorm van de doorsnede daar dan het stelsel algebraïsche vergelijkingen bijzonder gevoelig wordt. Met hoeken van ongeveer  $15^\circ$  tussen de koorden is de vorm van de doorsnede voldoende nauwkeurig te benaderen.

Daar de vouwschaalmethode in feite op dezelfde fysische onderstellingen is gebaseerd als de methode van Schorer geldt ook hiervoor dat het toepassingsgebied beperkt is tot de zgn. lange schalen, al zullen in veel gevallen, ook bij schalen in het zgn. overgangsgebied, de resultaten alleszins aanvaardbaar kunnen zijn zoals uit de figuren 1 en 4 blijkt.

De vouwschaalmethode leent zich, evenals trouwens de methode Schorer, tot de toepassing van eigenfuncties in de richting van de overspanning. Hiermee kunnen ook andere randvoorwaarden dan die van vrije oplegging in rekening worden gebracht. Toepassingen hiervan vinden we reeds bij WLASSOW [11], voorts b.v. in het boek van YITZHAKI [26]. Bedacht dient evenwel te worden dat b.v. bij een aan weerszijden ingeklemde schaal het criterium voor de betrouwbaarheid van de methode, t.w. dat de schaal voldoende lang is, klemmender wordt, daar in zo'n geval als „lengte” bij benadering kan worden beschouwd de afstand tussen de buigpunten in de elastische lijn.

Ook voor de vouwschaalmethode geldt dat deze bij cilindrische schalen op zijn plaats zal zijn bij schalen met niet cirkelvormige doorsnede en/of variabele dikte, die voor een analytische berekening moeilijk toegankelijk zijn. Voor schalen met cirkelvormige doorsnede is er weinig aanleiding een vouwschaal-

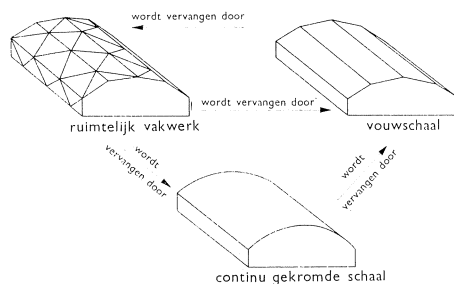


Fig. 5. Schematische voorstelling van enkele systemen die als „benadering” in de plaats worden gesteld van het werkelijke systeem dat moet worden berekend.

berekening toe te passen. Te vaak ook overheerst in de drang naar eenvoud het streven iets benaderend te willen oplossen, zonder dat het doel, eenvoud, wordt bereikt. Zo kennen we publikaties (zie fig. 5) waarin:

- a. vouwschalen samengesteld uit vakwerken worden berekend als isotrope vouwschalen;
- b. dezelfde constructies worden berekend als anisotrope, continu gekromde, schalen;
- c. continu gekromde schalen worden berekend als isotrope vouwschalen;
- d. ruimtelijke vouwschalen worden berekend als vakwerken (staafwerken).

Hoe begrijpelijk een dergelijke aanpak ook is als men in een concreet geval tot een tastbaar resultaat moet komen, het lijkt of zich hier iets van een vlucht voor de problemen manifesteert. Bovendien is het duidelijk dat door het op deze wijze vervangen van het ene systeem door het andere geen werkelijke problemen worden opgelost.

Ad c. Enkele interessante publikaties zijn verschenen [27, 28] waarin de dragende werking van cilindrische schalen wordt ontleed in een aantal draagsystemen b.v. een membraan en buigingsstijve bogen en langsliggers, waarbij elk van deze systemen een deel van de belasting krijgt toegewezen overeenkomstig de vormveranderingen die het ondergaat. Ofschoon deze methoden hun uitgangspunt vinden in een zekere aanschouwelijkheid worden zij bij uitwerking toch vrij gecompliceerd.

De beperktheid van de besproken elementaire benaderingsmethoden blijkt, zoals reeds eerder gezegd, uit het feit dat zij voornamelijk betrekking hebben op cilindrische en prismatische schalen. Voor het verkrijgen van een wijder perspectief is het dan ook bepaald noodzakelijk terug te keren tot de algemene schalentheorieën.

## 2 Benaderingen uitgaande van de algemene theorie

De stelsels differentiaalvergelijkingen van de 8e orde van de algemene schalentheorie die in de literatuur worden aangetroffen zijn bijzonder gecompliceerd, zelfs als zij zijn gebaseerd op een consequente eerste benadering in de zin van Love, zie b.v. [29]. Vereenvoudigingen zijn noodzakelijk om tot oplossingen te komen. Soms maakt de geometrie van het oppervlak vereenvoudigingen mogelijk. Vandaar dat de bolschaal en de cilinderschaal behoren tot de oppervlakken waarvoor de zgn. buigingstheorie het eerst is ontwikkeld.

Om in het algemeen echter belangrijke vereenvoudigingen van het stelsel vergelijkingen te verkrijgen is het noodzakelijk tot een klassificatie van mogelijke spanningstoestanden over te gaan. Voor elk van deze spanningstoestanden kan vervolgens worden aangegeven welke vereenvoudigingen c.q. benaderingen geoorloofd zijn. Uiteraard gaat hiermee de algemeenheid van de theorie weer verloren; er is evenwel geen andere mogelijkheid.



De spanningstoestand in een bepaald gebied van een schaal kan worden gekarakteriseerd met behulp van twee parameters. De eerste parameter is de verhouding van de grootste in het gebied optredende waarde van de buigingsrek  $\varepsilon_b$  in de uiterste vezel van het oppervlak en de grootste in dit gebied optredende waarde van de „gemiddelde” rek  $\varepsilon_m$  in het middenvlak van de schaal. We onderscheiden drie gevallen:

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m} \ll 1 \quad \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m} = \delta(1)^1 \quad \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m} \gg 1$$

In het eerste geval overheersen de membraanspanningen en rekken, in het laatste geval overheersen de buigspanningen en rekken. In het tussengelegen geval zijn de membraanspanningen c.q. rekken van dezelfde orde van grootte als de buigspanningen c.q. rekken. In de tweede parameter komen voor de schaaldikte  $h$ , de kleinste kromtestraal  $R$  in het gebied en de golflengte  $L$  van het vervormingspatroon van het middenvlak van de schaal, welke lengte gedefinieerd is door

$$\left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \varepsilon \right| = \delta \left( \frac{\varepsilon}{L} \right) \quad (\alpha = \text{een oppervlaktecoördinaat}).$$

De parameter zelf is de verhouding  $L^2/hR$ . We onderscheiden weer drie gevallen:

$$\frac{L^2}{hR} \ll 1 \quad \frac{L^2}{hR} = \delta(1) \quad \frac{L^2}{hR} \gg 1.$$

Met de drie waarden voor elk van de beide parameters kunnen negen gevallen worden onderscheiden. De hier gegeven karakterisering is ontleend aan een publikatie van KOITER [30]. Koiter geeft voor elk van deze gevallen aan welke termen in de basisvergelijkingen mogen worden verwaarloosd. De resultaten zijn omschreven in de eveneens aan Koiter ontleende tabel hierna.

Tabel. Overzicht van vereenvoudigde schalenvergelijkingen

	A	B	C
	$\frac{L^2}{hR} \ll 1$	$\frac{L^2}{hR} = \delta(1)$	$\frac{L^2}{hR} \gg 1$
$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m} \ll 1$	1. vergelijkingen van de vlakke spannings-toestand	2. uitzonderingsgeval	3. vergelijkingen van de membraantheorie
$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m} = \delta(1)$	4. superpositie van 1 en 7	5. vergelijkingen voor flauw gekromde schalen <sup>2)</sup>	6. superpositie van 3 en 9
$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m} \gg 1$	7. vergelijkingen van de buiging van vlakke platen	8. uitzonderingsgeval	9. vergelijkingen van de (bijna) rekloze verbuigingen

<sup>1)</sup>  $\delta(1)$  betekent van de orde van grootte van de eenheid.

<sup>2)</sup> „shallow shell equations”.

Vijf gevallen zijn vooral van belang: deze komen voor in de beide diagonalen van de tabel. Zij zijn welbekend en vereisen nauwelijks toelichting. De gevallen 1 en 7 treden op bij zeer geringe kromming van de schaal of bij zeer sterk variërende belastingen of randvoorwaarden. Het is duidelijk dat de vergelijkingen in kolom A en C belangrijk eenvoudiger zijn dan de algemene schalenvergelijkingen. Daarenboven zijn er twee gevallen van superpositie en twee uitzonderingsgevallen waarin óf de drie rekcomponenten óf de drie krommingscomponenten (inclusief wringing) aan vier onafhankelijke vergelijkingen moeten voldoen, hetgeen slechts bij uitzondering mogelijk zal zijn.

Een belangrijke vereenvoudiging blijkt voorts nog mogelijk in die gevallen waarin  $L^2/hR \leq \delta(1)$ . In de gevallen waarin dan  $\varepsilon_b/\varepsilon_m \leq \delta(1)$  kunnen de normaalspanningen en schuifspanningen worden uitgedrukt in een enkele spanningsfunctie. In de gevallen waarin dan  $\varepsilon_b/\varepsilon_m \geq \delta(1)$  kunnen de veranderingen in de kromming en wringing worden uitgedrukt in de verplaatsingscomponent volgens de normaal op het middenvlak.

In het geval van de buigingstheorie voor flauw gekromde schalen zijn beide mogelijkheden aanwezig, hetgeen ook deze theorie belangrijk beter toeganke-lijk maakt voor oplossingen dan de algemene schalenvergelijkingen.

Natuurlijk kunnen in een schaal gebieden waarin verschillende spannings-toestanden optreden elkaar afwisselen. Ook is het mogelijk dat de spannings-toestand in een bepaald gebied bestaat uit een superpositie van enkele gevallen uit de tabel. Welke spanningstoestand aanwezig is hangt onder meer af van de aard van het oppervlak, van de belasting en van de randvoorwaarden.

We willen nu in het licht van dit overzicht een aantal problemen nog eens nader beschouwen, waarbij zal blijken dat bij geval 5 (zie tabel) een verdere onderverdeling mogelijk is. Daarbij schenken we alleen aandacht aan het randvoorwaardeprobleem, d.w.z. aan het effect in de schaal van een langs een rand voorgeschreven kracht, moment, verplaatsing of hoekverdraaiing. We nemen dus aan dat voor de over het oppervlak verdeelde lasten steeds een geschikte particuliere integraal kan worden gevonden en laten deze buiten be-schouwing. Hier moet ook worden verwezen naar het voortreffelijke boek van GOLDENWEISER, dat sinds kort in een Engelse vertaling beschikbaar is [31].

Probleem 1: *De open cirkelcilindrische schaal* (zie fig. 6)

Het verloop van een voorgeschreven grootheid  $\Phi$  (kracht, moment, verplaat-sing of hoekverdraaiing) langs een rechte rand zij gegeven als  $\Phi = \hat{\Phi} \sin \pi\xi$ , waarin  $\xi = x/l_x$ . Het probleem wordt beheerst door een stelsel differentiaal-vergelijkingen van de 8e orde, waarvoor we kunnen nemen de „shallow shell equations”. Door de eenvoudige geometrie van het oppervlak worden de operatoren in deze vergelijkingen nog belangrijk vereenvoudigd en verkrijgen we de reeds genoemde vergelijkingen van Donnell-Jenkins.

Is evenwel de lengte  $l_x$  van de schaal m.a.w. de golflengte  $L_x$  van het ver-

vormingspatroon in de richting van de beschrijvende zeer groot (zie fig. 6), dan zijn zoals uit de tabel blijkt de vergelijkingen voor flauw gekromde schalen niet bruikbaar. Zij leiden tot een te grote fout omdat in het bijzonder de (bijna) rekloze verbuigingen een te grote rol gaan spelen. Voor het berekenen van de

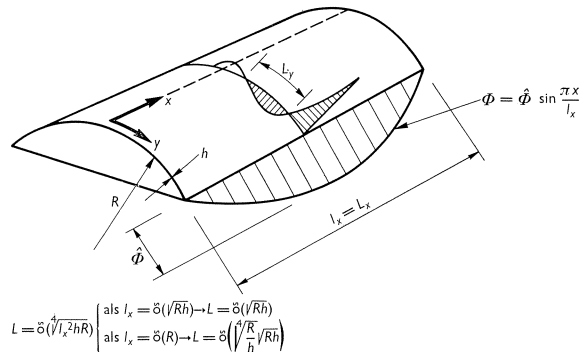


Fig. 6. Het randvoorwaarde-probleem langs de rechte rand van een cilindrische schaal.

werkelijke spanningsverdeling zal in dit geval een ander stelsel vergelijkingen moeten worden gebruikt. Praktisch zal dit geval zich evenwel niet licht voordoen.

Bij een zeer kleine waarde van  $l_x$  zal het stelsel vergelijkingen ontaarden in die van een vlakke spanningstoestand en die van een gebogen plaat.

Verdere vereenvoudigingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen of van de bijbehorende karakteristieke vergelijking zijn mogelijk voor bepaalde gebieden zoals bij de reeds genoemde benadering van Schorer voor lange schalen. Dergelijke benaderingen houden evenwel geen wezenlijke vereenvoudiging in t.o.v. de vergelijkingen van Donnell. Anderzijds zijn zij in hun gebied van toepassing beperkt terwijl zij daarbuiten tot niet onaanzienlijke fouten kunnen leiden. Zij lijken thans daarom overbodig.

De golflengte  $L_y$  van het vervormingspatroon in de richting loodrecht op de vrije rand is:

$$L_y = \delta(\sqrt[4]{l_x^2 h R})$$

Voor zeer korte schalen ( $l_x = \delta(\sqrt{Rh})$ ) wordt dit:

$$L_y = \delta(\sqrt{Rh}),$$

overeenkomend met de indeling in de tabel van de „shallow shell equations”.

Voor lange schalen ( $l_x = \delta(R)$ ) wordt de golflengte:

$$L_y = \delta(\sqrt[4]{R/h} \cdot \sqrt{Rh})$$

Bij korte schalen zullen de golven die van een rand uitgaan aan de overzijde uitgedempt zijn; bij lange schalen is dit niet het geval. Bij korte schalen is het daarom mogelijk de randvoorwaarden van de beide langsranden onafhankelijk

van elkaar op te stellen en op te lossen, hetgeen een belangrijke vereenvoudiging betekent. Bij toenemende lengte wordt de door het verwaarlozen van deze wisselwerking verkregen fout evenwel groter en bij lange schalen is de procedure niet toelaatbaar. Door de ontwikkeling van de rekentechniek heeft een verwaarlozing van deze wisselwerking thans ook minder zin dan vroeger.

Ofschoon het randvoorwaardeprobleem bij de open cilindrische schalen dus niet eenvoudig is, door de eenvoudige geometrie van het oppervlak is toch reeds lang een oplossing voor het hier gestelde probleem gevonden. Dat houdt niet in dat hiermee alle problemen zouden zijn opgelost. Met name voor het probleem van de over de ondersteuning doorlopende schaal b.v. is nog geen goede oplossing aanwezig. Verschillende benaderingen zijn hiervoor in gebruik. De eenvoudigste van deze berust op de analogie met de over meer dan twee ondersteuning doorlopende ligger.

Probleem 2: *De gesloten cirkelcilindrische schaal* (zie fig. 7)

Het verloop van een voorgeschreven grootte  $\Phi$  (kracht, moment, verplaatsing of hoekverdraaiing) langs een gebogen rand zij gegeven als  $\Phi = \hat{\Phi} \sin m\theta = \hat{\Phi} \sin \pi y/l_y$ . De vergelijkingen voor flauw gekromde schalen, dit zijn de vergelijkingen van Donnell-Jenkins, zijn wederom bruikbaar mits de golfenlengte

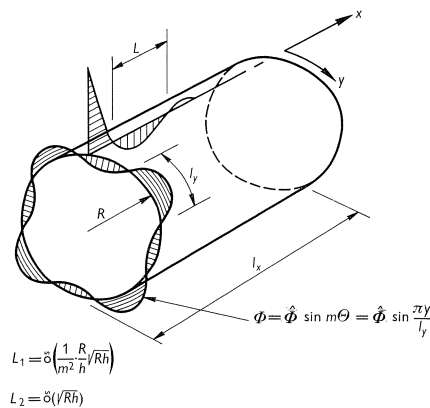


Fig. 7. Het randvoorwaarde-probleem langs de gebogen rand van een cilindrische schaal.

$l_y$  van de grootte  $\Phi$  in omtreksrichting niet te groot is, m.a.w. de variatie in de grootte  $\Phi$  niet te gering is. Bij kleine waarden van  $m$  (i.c.  $m = 1, 2, 3 \dots$ ) leiden de vergelijkingen tot niet correcte resultaten en moeten zij door een ander stelsel worden vervangen. Bij zeer grote waarden van  $m$ , d.w.z. zeer kleine waarden van  $l_y$ , ontgaan de vergelijkingen wederom in die van de vlakke spanningstoestand en die van de gebogen plaat.

Karakteristiek voor dit randvoorwaarde-probleem is dat bij niet te grote waarden van  $m$  de oplossing in twee delen uiteenvalt t.w.:

1. een in de richting van de beschrijvenden langzaam variërende oplossing;
2. een typische randstoring die in richting van de beschrijvenden snel varieert. Deze randstoring wordt met goede benadering beschreven door de bekende eenvoudige vergelijking van de elastisch ondersteunde ligger en de golf­ lengte van het vervormingspatroon in de richting van de beschrijvenden bedraagt:

$$L_2 = \delta(\sqrt{Rh})$$

Dit gedeelte van de oplossing behoort dus inderdaad in kolom B van de tabel thuis.

Voor het langzaam variërende gedeelte van de oplossing is de golflengte van het vervormingspatroon in de richting van de beschrijvenden:

$$L_1 = \delta\left(\frac{1}{m^2} \cdot \frac{R}{h} \sqrt{Rh}\right).$$

Voor niet te grote waarden van  $m$  is de waarde van  $L_1$  groot door de factor  $R/h$  en in dit geval behoort dit gedeelte van de oplossing in kolom C van de tabel thuis. Voor het langzaam variërende deel van de oplossing kan dan ook als eerste benadering de membraanoplossing worden genomen, een benadering die des te beter is naarmate  $m$  kleiner, de schaal dunner ( $h/R$  kleiner) en de overspanning  $l_x$  korter is. Voor de waarden  $m = 0$  en  $m = 1$  geeft de membraantheorie zelfs de correcte oplossing.

Voor grote waarden van  $m$  gaat het onderscheid tussen beide gedeelten van de oplossing verloren. Voor waarden  $m = \delta(R/h)^{1/2}$ , d.w.z.  $l_y = \delta(\sqrt{Rh})$ , is de golflengte  $L_1 = \delta(\sqrt{Rh})$ . Het volledige stelsel vergelijkingen van de 8e orde moet dan worden gebruikt.

Bij niet te grote waarden van  $m$  kan het karakteristieke verschil tussen de beide gedeelten van de oplossing – die elk een 4e orde probleem beschrijven – ook leiden tot een aanzienlijke vereenvoudiging bij het oplossen van de randvoorwaarden. In de eerste plaats kan worden opgemerkt dat bij het opstellen van de randvoorwaarden van de sterk variërende randstoring in het algemeen slechts het dempende gedeelte behoeft te worden beschouwd. Het aangroeiende gedeelte (= het van de overzijde afkomstige dempende gedeelte) kan worden verwaarloosd.

Belangrijker nog is het volgende. Voor elke rand kunnen vier randvoorwaarden worden opgesteld, waarvan er twee betrekking hebben op de vlakke spanningstoestand in de schaal (tangentiële randvoorwaarden) en twee op de buigspanningstoestand in de schaal (niet-tangentiële randvoorwaarden). Een belangrijke vereenvoudiging nu ontstaat indien in de vergelijkingen die de tangentiële randvoorwaarden uitdrukken de termen die afkomstig zijn van de sterk variërende randstoring een ondergeschikte rol spelen en verwaarloosd kunnen worden. Indien de tangentiële randvoorwaarden het toelaten kan dan het langzaam variërende deel van de oplossing, in eerste benadering dus de

membraanoplossing, worden bepaald onafhankelijk van de andere randvoorwaarden. Hierna kunnen dan de niet-tangentiële randvoorwaarden worden opgelost. Hierin zijn de termen afkomstig van het langzaam variërende deel van de oplossing nu bekende termen. Zijn de tangentiële randvoorwaarden zodanig dat een membraanoplossing mogelijk is, dan zijn ook inderdaad de randstoringstermen die hierin optreden klein en is aan de bovengenoemde onderstelling voldaan. Het is duidelijk dat met een dergelijke stapsgewijze procedure een aanzienlijke vereenvoudiging bij de oplossing wordt verkregen.

Op andere mogelijkheden zal niet worden ingegaan. We stonden lang stil bij de cilindrische schaal, maar de reden is duidelijk. Het is namelijk bijzonder verleidelijk de beschreven procedure ook toe te passen bij de berekening van andere schaalvormen met name van dubbelgekromde oppervlakken. Bij axiaalsymmetrisch belaste omwentelingsschalen ligt het probleem eenvoudiger en bestaat het voornamelijk uit het bepalen van de randstoring. Bij niet axiaalsymmetrische belasting van omwentelingsschalen kan de beschreven procedure ook worden toegepast; zie b.v. [31].

In het algemeen zullen van de dubbel gekromde schalen de flauw gekromde het gemakkelijkst voor een onderzoek toegankelijk zijn omdat wij hiervoor beschikken over de „shallow shell equations” waarmee een benaderende oplossing kan worden verkregen. Maar er zijn nog slechts oplossingen bekend voor de eenvoudigste oppervlakken, zoals b.v. elliptische en hyperbolische paraboloiden.

Uit berekeningen van verschillende typen blijkt wel dat bij willekeurige randvoorwaarden aanzienlijke buiging in het oppervlak kan voorkomen, welke wordt veroorzaakt door de (bijna) rekloze verbuigingen, – zie b.v. [32]. Men kan wel stellen dat indien deze rekloze verbuigingen kunnen optreden de dunne schalen die we van bouwkundige en civiel-technische toepassingen kennen niet zijn te realiseren.

De ontwerper moet er daarom voor zorg dragen dat de randvoorwaarden van de schaal zodanig zijn dat mogelijke rekloze verbuigingen worden voorkomen, althans gelimiteerd, zodat een stijf oppervlak aanwezig is. Dit is een 2e orde probleem en de combinaties van tangentiële randvoorwaarden die hiervoor noodzakelijk zijn laten zich in veel gevallen gemakkelijk aangeven. Op de voorwaarde van het voorkómen van de rekloze verbuigingen heeft naar het schijnt reeds Novodvorski geweest. WLASSOW [11] en NOVOZHILOV [33] geven ook hun aandacht aan het verschijnsel.

Is voorts nog voldaan aan enkele andere voorwaarden, waarvan voor ons doel de belangrijkste zijn:

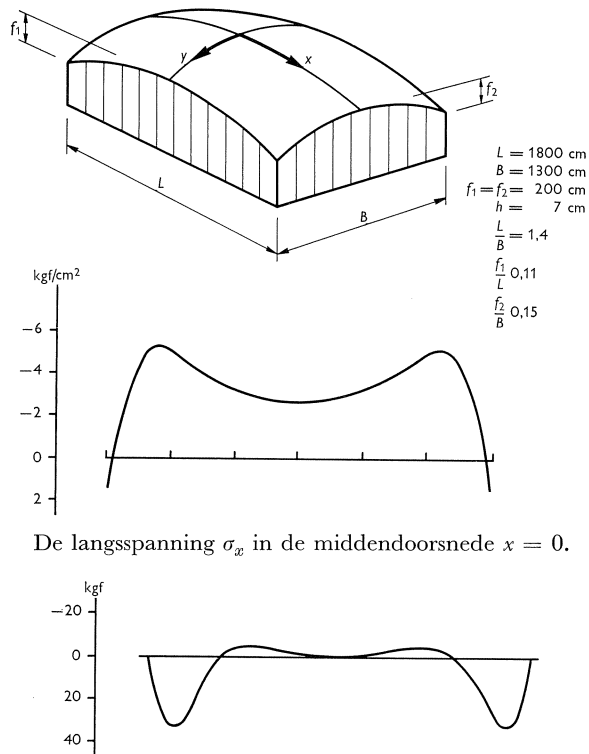
- a. dat de betrokken rand nergens mag samenvallen met een asymptotische lijn op het oppervlak,
- b. dat de variatie van een grootte langs de betrokken rand niet te sterk mag zijn (vgl. probleem 2 bij de cilinder),

dan is een membraanspanningstoestand in de schaal mogelijk en is deze te bepalen met behulp van de tangentiële randvoorwaarden. De spanningsverdeling in de schaal is dan te beschouwen als een superpositie van:

1. een membraanspanningstoestand;
2. een randstoring die beperkt blijft tot een smalle zone nabij de rand, overeenkomend met die langs de gebogen rand van een cilinder.

Daar deze randstoring geen probleem vormt – in de eenvoudigste vorm wordt hij beschreven door de vergelijking van de elastisch ondersteunde ligger – is het probleem teruggebracht tot het bepalen van de membraanspanningstoestand, wat in het algemeen een 4e orde probleem is. Een beperking tot flauw gekromde schalen geldt hierbij uiteraard niet meer. In bepaalde gevallen zal ook dit laatste probleem nog weer uiteenvallen en kunnen in een eerste stap de membraanspanningen en in een volgende stap de vervormingen worden bepaald. Beide stappen betekenen nu het oplossen van een 2e orde probleem.

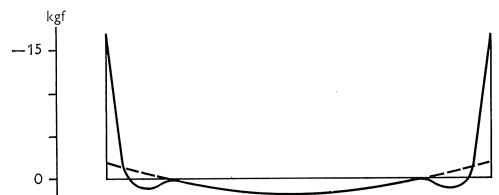
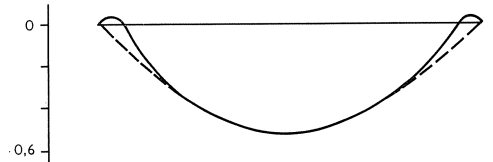
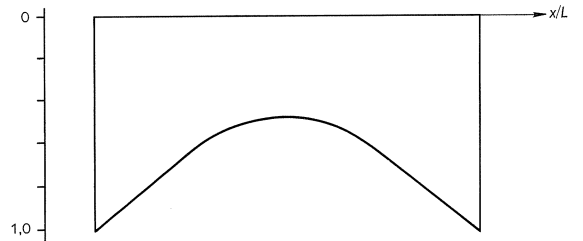
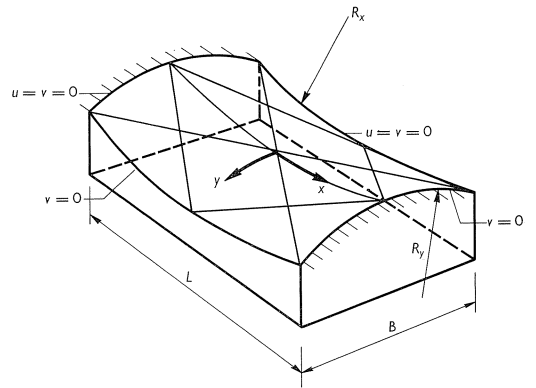
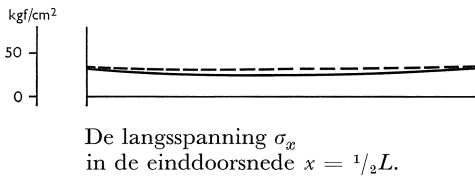
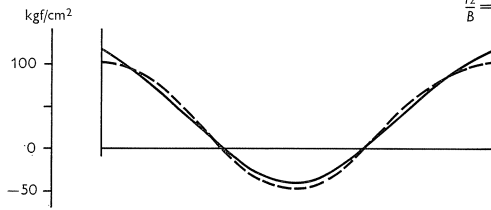
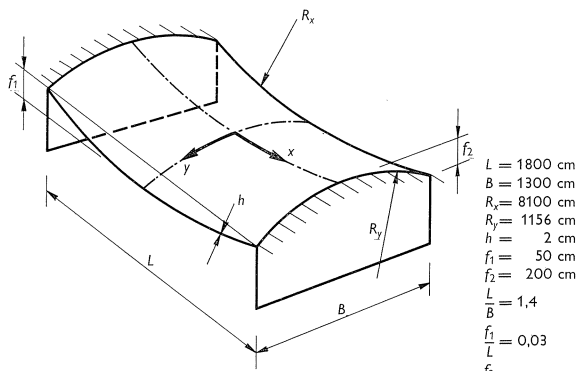
Met enkele voorbeelden moge het bovenstaande worden verduidelijkt. Als voorbeeld van een schaal met positieve kromming is in fig. 8 het welbekende



De langsspanning  $\sigma_x$  in de middendoorsnede  $x = 0$ .

Het buigend moment  $M_y$  in de middendoorsnede  $x = 0$ .

Fig. 8. Spanningsverdeling in een elliptische paraboloid, schuifvast verbonden aan verticale schotten. Belasting:  $Z = Z_0 \cos \pi x/L$ ,  $Z_0 = 0,019$  kgf/cm<sup>2</sup>.



————— volgens de 8ste orde theorie.  
 - - - - - volgens de 4de orde theorie.

Fig. 9. Spanningsverdeling in een hyperbolische paraboloid, ingeklemd langs de korte zijden. De beide andere zijden zijn vrij. Belasting:  $Z = Z_0 \cos \pi x / L$ ,  $Z_0 = 0,019$  kgf/cm<sup>2</sup>.

Fig. 10. Spanningsverdeling in een hyperbolische paraboloid, ingeklemd langs de korte zijden. De beide andere zijden zijn schuifvast verbonden aan verticale schotten. Belasting:  $Z = Z_0 \cos \pi y / B$ ,  $Z_0 = 0,019$  kgf/cm<sup>2</sup>.



geval gegeven van een elliptische paraboloid op rechthoekige plattegrond die schuifvast is verbonden met verticale schotten. De randvoorwaarden zijn hier zodanig dat het spanningsprobleem van de 2e orde kan worden opgelost.

Als voorbeeld van een schaal met negatieve kromming zijn in de figuren 9 en 10 twee hyperbolische paraboloiden gegeven. In fig. 9 zijn twee overstaande randen niet alleen schuifvast verbonden met verticale schotten, doch langs deze randen worden ook de tangentiële verplaatsingscomponenten loodrecht hierop verhinderd. In fig. 10 bevinden zich ook onder de overblijvende randen verticale schotten. De membraanspanningstoestand vormt in beide gevallen een 4e orde probleem.

Het splitsen van de spanningstoestand in een membraanspanningstoestand en een randstoring is bij verscheidene auteurs te vinden, zie b.v. [33, 34, 35, 36, 45]. Het ligt ook voor de hand en het komt er slechts op aan de voorwaarden aan te geven waaronder een dergelijke splitsing mogelijk is. Ook in Delft werkten we in deze zin. Het meest uitgebreide verslag over dergelijke benaderingsmethoden is evenwel te vinden in het reeds genoemde boek van GOLDENVEISER [31]. Hierin worden met behulp van de methode van de asymptotische integratie de verschillende benaderingen opgespoord, hetgeen leidt tot dezelfde karakteristieke spanningstoestanden als ook door Koiter zijn gegeven (zie tabel blz. 81).

Er mag nog wel eens op worden gewezen hoe de besproken benaderingsmethode gebaseerd is op het fysisch-mechanisch gedrag van de constructie. De wiskunde is in dit geval geen leermeesteres. Integendeel, de fysische problemen leiden zoals in vele andere gebieden tot nieuwe oplossingsmethoden in de wiskunde en vormen voor de ontwikkeling hiervan een grote stimulans.

Anderzijds is een woord van waarschuwing wel op zijn plaats. De randvoorwaarden dienen zorgvuldig te worden beoordeeld, omdat bij een behandeling als een 4e orde probleem zelfs kleine randstoringen grote verplaatsingen t.g.v. de rekloze verbuigingen kunnen veroorzaken.

Ofschoon de membraantheorie belangrijk eenvoudiger is dan de algemene buigingstheorie zijn toch, als het schaaloppervlak niet zeer eenvoudig is, analytische oplossingsmethoden niet wel denkbaar en is men in die gevallen aangevoerd op benaderende oplossingsmethoden, waarvan in het bijzonder genoemd moet worden de methode met eindige differenties. Ofschoon reeds PUCHER deze methode toepaste [38], waarbij hij gebruik maakte van de door hem ingevoerde spanningsfunctie [39], zijn tot nu toe betrekkelijk weinig publikaties verschenen waarin deze methode wordt behandeld, zie b.v. [40, 41, 42]. In het algemeen beperken deze zich ook tot het 2e orde probleem. In samenwerking met de elektronische rekenmachines biedt juist de methode met eindige differenties stellig perspectieven.

Probleem 3: *De hyperbolische paraboloid schaal* (zie fig. 11)

Indien bij schalen met een Gauss'se kromming gelijk nul een rand samenvalt

met een rechte lijn op het oppervlak is het probleem veel moeilijker, zoals we aan het – dank zij de geometrie nog betrekkelijk eenvoudige – voorbeeld van de cilindrische schaal hebben gezien.

Het probleem van de rand die bij schalen met negatieve Gauss'se kromming samenvalt met een asymptotische lijn op het oppervlak neemt een tussenpositie in. Het eenvoudigste voorbeeld hiervan is de bekende hyperbolische paraboloid op beschrijvende (zie fig. 11). Velen hebben getracht dit probleem op

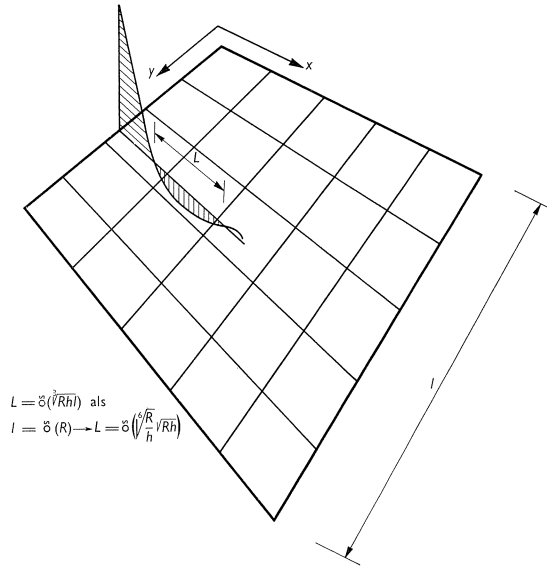


Fig. 11. Het randvoorwaarde-probleem langs de rechte rand van een hyperbolische paraboloid.

te lossen op dezelfde wijze als eerder werd beschreven. De volgende verschillen treden evenwel op.

Indien het verloop van een grootheid langs een rand wederom niet te snel varieert valt de oplossing van het stelsel vergelijkingen van de 8e orde wederom in twee delen uiteen t.w.:

1. een in de richting loodrecht op de rand langzaam variërende oplossing;
2. een randstoring.

Het eerste gedeelte is evenwel slechts van de 2e orde, zodat hiermee niet aan alle tangentiële randvoorwaarden kan worden voldaan. Het tweede gedeelte daarentegen is van de 6e orde en bestaat uit twee gedempte golven en een aperiodieke oplossing. De golflengte van het vervormingspatroon in de richting loodrecht op de rand is nu evenwel:

$$L = \delta(\sqrt[3]{Rhl})$$

Voor waarden  $l = \delta(R)$  wordt dit:

$$L = \delta(\sqrt[3]{R/h} \cdot \sqrt{Rh})$$

De golven dempen dus minder snel dan de randstoringen langs de gebogen randen van een cilindrische schaal en de zones waarin de randstoringen optreden zijn dus breder.

Voor eenvoudige randvoorwaarden zoals scharnierende of ingeklemde randen die geen verplaatsingen in hun lengterichting kunnen ondergaan geeft LOOF [43, 44] eenvoudige benaderingsformules voor de maximale momenten en de dwarskrachten op de overgang van schaal en randbalk, waarvan de waarden verrassend goed overeenstemmen met die van nauwkeuriger berekeningen. Anderen komen tot soortgelijke resultaten, b.v. [36, 45]. Interessant is dat later door Loof ook de verplaatsingen van de randbalken in hun lengterichting in rekening worden gebracht en wel met behulp van een vergrotingsfactor voor de eerder genoemde momenten en dwarskrachten, welke factor aanzienlijke waarden kan verkrijgen. Het voorkómen van verplaatsingen van de randbalken in hun lengterichting is dan ook van groot belang. De elkaar overlappende randstoringsgebieden nabij de hoekpunten van de schaal vereisen een aparte behandeling.

### 3 Conclusies

De drie categorieën randvoorwaardeproblemen zijn hiermee in hun eenvoudigste vorm behandeld. Getracht is een indruk te geven in welke richting de ontwikkeling van benaderingsmethoden uitgaande van de algemene schalentheorie zich aftekent.

De ontwikkeling van algemene schalentheorieën heeft voornamelijk na 1940 plaatsgevonden. Verdieping van inzicht en versteviging van de grondslagen van de theorie zijn hiervan het gevolg geweest. De voortgang in praktische resultaten is – ondanks het grote aantal publikaties – wellicht minder spectaculair dan die van de klassieke schalentheorieën voor bepaalde – eenvoudige – schaaltypen van vóór 1940. Dit is ongetwijfeld mede te wijten aan de gecompliceerdheid van de problemen waarvoor men staat indien men niet met de allereenvoudigste oppervlakken heeft te maken. Veelal valt de tegenstelling tussen een benaderende en een exacte oplossing dan ook weg omdat slechts een benaderende oplossing mogelijk blijkt.

Voorts wordt sindsdien de aandacht opgeëist door vele andere even moeilijke onderwerpen waarvan kunnen worden genoemd: niet-lineair gedrag en instabiliteit met inbegrip van problemen als „creep buckling” (plooien door kruip), temperatuurseffecten, dynamische verschijnselen, elasto-plastisch gedrag en bezwijkanalyse, anisotrope schalen c.q. sandwichconstructies, dikke schalen. In bepaalde gebieden van de techniek zijn deze problemen reeds zeer belangrijk. Ook in de bouwkunde en de civiele techniek zullen verschillende van deze onderwerpen van toenemend belang worden. Gedacht wordt hierbij b.v. aan de toepassing van schalen in materialen als hout en plastic.

De verbreiding van de toepassing van schaalconstructies zal echter mede

afhangen van de mate waarin de berekening van schalen toegankelijk is voor de construerende ingenieur. Het zoeken naar zo eenvoudig mogelijke benaderingsmethoden is daarom stellig zinvol en veelal ook een noodzaak. Er kan voorts nog op worden gewezen dat bij de numerieke behandeling van problemen een benaderingsmethode nauwkeuriger resultaten kan geven dan een zgn. exacte methode die met gevoeligheid van vergelijkingen en slechte convergentie van reeksen te kampen kan hebben (vergelijk het besproken geval van de bolschaal). Men zou een berekeningsmethode kunnen vergelijken met een stuk gereedschap op de bouwplaats, waarmee men gemakkelijk moet kunnen werken. Eerst dan zal de methode voldoende ingang vinden. Bovenal moet deze evenwel betrouwbaar zijn. De drang tot vereenvoudigen mag er niet toe leiden dat deze eis uit het oog wordt verloren. Is aan deze beide voorwaarden voldaan dan kunnen benaderende berekeningsmethoden bijdragen tot een verdere voortgang in de toepassing van schaalconstructies.

### Literatuur

1. BLUMENTHAL, O., Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen, Zeitschr. Math. Phys., **62**, 1914, S. 343.
2. GECKELER, J. W., Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen, Forschg.-Arb. Ing. Wes., Vol. 276, Berlin 1926.
3. FLÜGGE, W., Stresses in Shells, Springer Verlag 1960.
4. SCHORER, H., Line load action in thin cylindrical shells, Proc. Am. Soc. Civ. Eng. **61** (1935), pp. 281–316.
5. FINSTERWALDER, U., Die Theorie der zylindrischen Schalengewölbe System Zeiss-Dywidag und ihre Anwendung auf die Grossmarkthalle in Budapest, Int. Assoc. Bridge & Struct. Engg., Publ. **1** (1932), pp. 127–150.
6. FINSTERWALDER, U., Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit Kreissegmentförmigem Querschnitt, Ing. Arch. **4** (1933), 43–65.
7. AAS JAKOBSEN, A., Über das Randstörungsproblem an Kreiszyinderschalen, Bauing. **20** (1939), pp. 394–405.
8. DONNELL, L. H., A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending, Trans. A.S.M.E. **56**, pp. 795–806, 1934.
9. VON KÁRMÁN, T. and H. S. TSIEN, The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. Journ. Aeronautical Sciences, **8** (1941), p. 303.
10. JENKINS, R. S., Theory and design of cylindrical shell structures, London, O. Arup and Partners, 1947.
11. WLASSOW, W. S., Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik (übersetzt aus dem Russischen 1949), Akademie Verlag, Berlin 1958.
12. HOFF, N. J., The accuracy of Donnell's equations, J. appl. Mech. **22**, 3, pp. 329–334, 1955.
13. GIBSON, J. E., The design of cylindrical shell roofs, 1st ed. London 1954, 2nd ed. 1961.
14. De berekening van de spanningsverdeling in cirkelcilindrische schaaldaken volgens de D.K.J.-methode met behulp van een rekenschema, IBC-mededelingen 4 (1956). no. 2, pp. 35–101, Delft.
15. RÜDIGER-URBAN, Kreiszyinderschalen, Ein Tabellenwerk zur Berechnung kreiszyindrischer Schalenkonstruktionen beliebiger Abmessungen, Teubner, Leipzig, 1955.
16. Design of cylindrical concrete shell roofs, Manual no. 31, Am. Soc. Civ. Eng., New York 1952.
17. GIBSON, J. E., Computer analyses of cylindrical shells, London 1961.
18. GREEN, A. E., and W. ZERNA, Theoretical elasticity, Oxford Univ. Press, 1954.
19. LUNDGREN, H., Cylindrical Shells, Copenhagen 1951.

20. TIMOSHENKO, S. P., Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open cross-section, *Journ. Franklin Inst.*, Vol. 239 no. 3, 4, 5.
21. VLASOV, V. Z., Thin-walled elastic beams, 2nd ed. (translated from the Russian edition 1959), published by the Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1961.
22. GRUBER, E., Berechnung prismatischer Scheibenwerke, *Int. Assoc. Bridge & Struct. Engg.*, Publ. **1** (1932), p. 225, also in Publ. **3** (1934), p. 134, Publ. **7** (1943), p. 139, Publ. **11** (1951), p. 129 and Publ. **12** (1952), p. 167.
23. EHLERS, G., Die Spannungsvermittlung in Flächentragwerken, *Beton und Eisen* **29** (1930).
24. KOKJE, J. K. J., Berekening van cilindrische vouw- en continue schalen met behulp van de methode „Cross”. *De Ingenieur* **66** no. 10, (1954).
25. TETZLAFF, W., Tonnen und trogartige Schalen, V.E.B. Verlag Technik, Berlin 1953.
26. YITZHAKI, D., The Design of prismatic and cylindrical Shell Roofs, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1959.
27. MEHMEL, A. und W. FUCHSSTEINER, Über ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Kreiszyinderschale, *Der Bauingenieur* **28** (1935), Heft 4, 116–123.
28. VAN DER EB, W. J., A new Method of Calculating Circular Cylindrical Shells, *Intern. Assoc. Bridge & Struct. Engg.*, Publ. **16** (1956), pp. 101–148.
29. KOITER, W. T., A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells, *Proc. Symp. Theory thin elast. shells*, Delft, August 1959, pp. 12–33, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam 1960.
30. KOITER, W. T., A systematic simplification of the general equations in the linear theory of thin shells, *Proc. Kon. Acad. Wetenschappen, Afd. Natuurk.*, Amsterdam, May 1961.
31. GOLDENVEISER, A. L., Theory of elastic thin shells, (Translated from the Russian edition 1953), Pergamon press 1961.
32. HEUCK, K., Die näherungsweise Berechnung der Randstörungen beliebig belasteter Rotationsschalen, *Beton und Stahlbetonbau* 1958, Heft 11, p 280.
33. BOUMA, A. L., Some applications of the bending theory regarding doubly curved shells, *Proc. Symp. Theory Thin Shells*, Delft, August 1959, p. 202–235, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1960.
34. NOVOZHILOV, V. V., The theory of thin shells (translated from the Russian ed. 1951), Noordhoff, Groningen, the Netherlands 1959.
35. ZERNA, W., Zur neueren Entwicklung der Schalentheorie. *Z.A.M.M.* **41**, Heft 3 (März 1961). pp. 97–101.
36. ZERNA, W., General Report Session 1: General methods available for all kinds of shells and methods available for surfaces of alternate Gaussian curvature. *Proc. Coll. Simplified Calc. Methods*, Brussels, Sept. '61, North-Holland Publ. Comp., A'dam '62.
37. CICALA, P., Elastic theory of hypar shells, *Journ. A.C.I.*, January 1962, pp. 85–101.
38. PUCHER, A., Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzengleichungen, *Der Bauingenieur* **18** (1937), Heft 9/10, pp. 118–123.
39. PUCHER, A., Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen, *Beton und Eisen* **33** (1934), Heft 19, pp. 298–304.
40. FLÜGGE, W., Das Relaxationsverfahren in der Schalenstatik, *Beiträge zur Angewandten Mechanik (Federhofer-Girkmann Anniv. Vol.)*, Wien 1950, pp. 17–35.
41. SOARE, M., *Calculul placilor curbe subtiri*, Editura Academici Republicii Populare Romine, 1959.
42. BELES, A. A., and M. SOARE, Application de la méthode plurilocale au calcul des coques de translation, *Int. Assoc. Bridge & Struct. Engg.*, Publ. 21, (1961), pp. 11–36.
43. LOOF, W. H., Eenvoudige formules voor de buigingsstoringen in gelijkzijdige hypparschalen, die volgens beschrijvende zijn begrensd. Rapport 8-61-3-hr-1, Stevin-laboratorium van de Technische Hogeschool, Delft.
44. LOOF, W. H., Some remarks on the boundary value problem of hyperbolic paraboloidal shells bounded by a rectangular set of characteristics, Discussion of the paper by Messrs. K. Apeland and E. P. Popov, *Proc. Colloquium on Simplified Calculation Methods*, Brussels, Sept. 1961, North-Holland Publ. Comp., A'dam 1962, p. 34.
45. VREEDENBURGH, C. G. J., De dubbelgekromde schaal beschouwd als een plaat op elastische bedding, *Heron* **9** (1961) no. 1, pp. 4–21, Delft.