

DE PROGRAMMABIBLIOTHEEK VAN HET STEVIN-LABORATORIUM VOOR HET BEREKENEN VAN SCHAALCONSTRUCTIES

U.D.C. 624.074.4; 624.041; 518.5

De door de groep Toegepaste Wiskunde van het Stevin-laboratorium samengestelde programma's voor het berekenen van schaaldaken met de elektronische rekenautomaat, worden beschreven en toegelicht.

Standaardprogramma's ten dienste van een speurwerkinstituut moeten op zeer uiteenlopende gevallen kunnen worden toegepast: flexibiliteit is derhalve een vereiste. Besproken wordt hoe dit in de opzet van de bibliotheek tot uiting komt. In het eerste deel van het artikel wordt een overzicht van de aanwezige mogelijkheden gegeven. De gebruikte rekentechnieken zijn aan de eis van flexibele gebruiksmogelijkheid aangepast, met name door het veelvuldig toepassen van matrixrekening; een toelichting hierop wordt in het tweede deel van het artikel gegeven.

0 Inleiding

Het streven om de tijdrovende berekeningen van schaaldaken te bekorten dateert al van vóór de introductie van elektronische rekenautomaten bij dit werk. Het artikel in IBC-mededelingen (april 1956) geeft reeds een goed voorbeeld hoe men door systematische en efficiënte opzet van een rekenschema de rekentijd van eertijds een maand tot enkele dagen heeft kunnen bekorten.

Uitgaande van een dergelijk rekenschema is het nog maar een betrekkelijk kleine stap naar de volledige automatisering van de berekening, die dank zij de elektronische rekenautomaat mogelijk is geworden. Voor het Stevin-laboratorium is deze mogelijkheid geopend in 1958, toen bij de afdeling der Algemene Wetenschappen van de Technische Hogeschool te Delft de rekenautomaat ZEBRA in gebruik kwam, die ook ten dienste stond van andere afdelingen. Omstreeks diezelfde tijd is in het Stevin-laboratorium een werkgroep gevormd, die onder meer tot taak kreeg de programma's ten behoeve van het speurwerk aldaar te vervaardigen. Een belangrijk deel van dat speurwerk is gewijd aan het onderzoek van schaaldaken. In de periode van 1958 tot 1963 is een vrij grote bibliotheek van programma's voor dit doel gegroeid, alle aangepast aan verwerking door de ZEBRA.

Toen in 1963 de modernere rekenautomaat TR4 bij de inmiddels opgerichte Wiskundige Dienst van de Technische Hogeschool in bedrijf werd gesteld, betekende dit een aanzienlijke uitbreiding van de mogelijkheden.

De evenbedoelde bibliotheek moest toen opnieuw worden opgebouwd, waarbij de opzet geheel aangepast is aan een systeem, dat in de voorafgaande periode gunstig was gebleken. Dit systeem leidt tot algemene toepasbaarheid van de

programma's voor zeer uiteenlopende gevallen, in overeenstemming met de eisen die het speurwerk op dit gebied stelt.

Het navolgende artikel richt zich tot twee groepen lezers: zij, die zich algemeen willen oriënteren inzake de aanwezige mogelijkheden voor het berekenen van schaaldaken en zij, die zich nader op de hoogte willen stellen van de gevolgde werkwijze. In overeenstemming hiermee is het artikel in twee delen gesplitst. Voor het lezen van het tweede deel is overigens geen speciale voorkennis vereist, wel wordt bekendheid met de eerder genoemde reken-schema's voor schaaldaken verondersteld.

Deel I. ALGEMENE BESCHRIJVING

1 De opzet van de programma-bibliotheek

De tijdsbesparing van het elektronisch rekenen zou voor een deel weer verloren gaan als men voor ieder probleem opnieuw een programma zou moeten maken. Het is daarom voordelig een programma zó in te richten, dat vraagstukken van uiteenlopende aard kunnen worden opgelost. Het door ons gevolgde systeem berust op het onderverdelen van de berekening in verschillende fasen. Programma-eenheden worden gemaakt voor de berekeningsfasen, die bij ieder probleem terugkeren.

De berekening van een schaaldak verloopt in het algemeen volgens een vast schema. In de eerste plaats zoekt men een particuliere oplossing van de schaalvergelijkingen, waarbij een krachtsverdeling optreedt die evenwicht maakt met de uitwendige belasting.

Deze oplossing zal in het algemeen niet in overeenstemming zijn met de mogelijkheden van de omringende constructie om hetzij de benodigde krachten te leveren, hetzij de optredende vervormingen te volgen. Om de nodige overeenstemming te krijgen wordt nog een aanvullende oplossing gezocht, die – omdat de uitwendige belasting reeds is opgeheven – niet met een oppervlaktebelasting van de schaal correspondeert; het is de algemene oplossing van de gereduceerde vergelijkingen. Deze, hierna als „algemene oplossing” aan te duiden uitkomst bevat een aantal vrije constanten; de waarden hiervan bepalen de op de rand uittrekkende krachten en de randverplaatsingen. Voor de combinatie van particuliere oplossing en algemene oplossing moet aansluiting worden verkregen van de schaal aan de omringende constructie. Door deze voorwaarde worden de vrije constanten uit de algemene oplossing vastgelegd. Daarmee is de volledige oplossing bekend; nu kan tot nadere uitwerking worden overgegaan. Men bepaalt het verloop over het schaaloppervlak van een aantal voor de ontwerper belangrijke spannings- en vervormingsgrootheden.

Recapitulatie van het rekenproces laat zien, dat achtereenvolgens een aantal fasen wordt doorlopen.

- 1⁰ Het bepalen van de nodige randkrachten en/of vervormingen uit de particuliere oplossing.
- 2⁰ Het bepalen van de overeenkomstige randgrootheden uit de algemene oplossing; deze grootheden blijven daarbij uitgedrukt in de vrije constanten als onbekenden.
- 3⁰ Overeenkomstige grootheden als onder 1⁰ en 2⁰ genoemd worden bepaald voor de omringende constructie.
- 4⁰ Het opstellen van de vergelijkingen, die de voorwaarden voor aansluiting van de schaal en de omringende constructie weergeven.
- 5⁰ Het oplossen van de aansluitingsvergelijkingen.
- 6⁰ Het uitwerken van door de ontwerper gevraagde grootheden uit de algemene oplossing voor verschillende punten van het schaaloppervlak.
- 7⁰ Het uitwerken van de overeenkomstige grootheden uit de particuliere oplossing en het optellen daarvan bij de onder 6⁰ verkregen uitkomsten.
- 8⁰ Een met 6⁰ en 7⁰ overeenkomende uitwerking van belangrijke grootheden voor de randconstructie.

De fasen 1⁰, 2⁰, 6⁰ en 7⁰ komen nu bij de berekening van een bepaald schaaltype steeds terug, en de daarbij benodigde gegevens hebben alleen betrekking op de aard en de afmetingen van de schaal. Evenzo zijn de fasen 3⁰ en 8⁰ uitsluitend van de gegevens van de omringende constructie afhankelijk. In fase 4⁰ komen aard, aantal en onderlinge oriëntatie van alle verbonden constructiedelen tot uiting; hier zijn dus gegevens van de volledige constructie nodig.

Fase 5⁰ is een zuiver wiskundige bewerking die noch van de schaal, noch van de randconstructie afhankelijk is.

Een flexibel programma-systeem vergt dat de programma's voor de onderdelen van dit rekenproces afzonderlijk gemaakt worden. Anders zouden herhaaldelijk wijzigingen in het programma noodzakelijk zijn. Het navolgende voorbeeld illustreert, welke ervaringen de groep Toegepaste Wiskunde te dien aanzien heeft opgedaan.

Bij de berekening van een bolschaal met een ringbalk op kolommen (figuur 1) is overwogen, dat de constructie principieel weinig variatie toelaat. Daarom is een programma gemaakt dat meerdere fasen omvat, namelijk 1⁰ tot en met 5⁰ (verder kon niet gegaan worden in verband met de beperkte capaciteit van de ZEBRA, die toen als de enige machine ter beschikking stond). Bij de eerste opzet werd gedacht

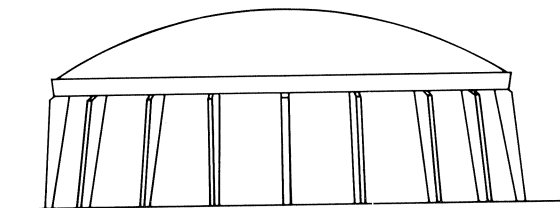


Fig. 1. Een geval waarvoor veel berekeningen zijn uitgevoerd: een bolschaal met ringbalk op kolommen.

aan ondersteuning door verticale, prismatische kolommen. Tijdens de vervaardiging van het programma bereikte ons reeds het verzoek, de berekening ook voor scheve, niet-prismatische kolommen mogelijk te maken. In deze vorm is het programma voltooid en heeft een tijdlang goede diensten bewezen.

Toen kwam echter het verzoek, een constructie te berekenen, waarbij de verbinding tussen kolom en randbalk als roloplegging was uitgevoerd, in plaats van een vaste verbinding zoals bij de programmering was verondersteld. Voorts moesten hierbij naast het eigen gewicht van schaal en randbalk ook andere belastingsgevallen in aanmerking worden genomen: voorspanning met variërende excentriciteit in de ringbalk en temperatuurverschil tussen ringbalk en schaal.

Hoewel al die bijzondere gevallen slechts betrekkelijk kleine veranderingen in het programma noodzakelijk maken, kost het steeds moeite om te controleren of de wijzigingen niet in conflict komen met de rest van het programma. Met name wat betreft de toewijzing van registers in het geheugen is het nodig een grondige controle toe te passen. Om zo economisch mogelijk met de beperkte capaciteit om te springen worden vaak deeltkomsten van fase 1⁰ nog in latere fasen gebruikt; die mogen dan door een ingelaste berekening niet worden aangetast.

Op grond van deze en andere ervaringen is besloten, de programma's in onafhankelijke gedeelten te splitsen. Bij de vervaardiging van schalenprogramma's in ZEBRA-code is dit idee reeds gedeeltelijk toegepast; na de ingebruikneming van de TR4 is bij de hernieuwde opbouw van de bibliotheek de programmasplitsing van het begin af aan stelselmatig doorgevoerd. De programma's worden daarbij geschreven in ALGOL 60; deze moderne programmeertaal biedt door zijn structuur reeds principieel de mogelijkheid een programma uit verschillende gedeelten samen te stellen, die elkaar bij de geheugentoeewijzing niet storen.

De programma-eenheden, die voor een bepaald schaaltype worden vervaardigd, zijn te onderscheiden in vier soorten, overeenkomend met verschillende fasen van het rekenproces.

p1: Programma-eenheid voor fase 1⁰.

Hierbij worden de krachten en vervormingen *aan de rand van de schaal* berekend, zoals die volgen uit de *particuliere* oplossing van de schaalvergelijkingen. Zowel voor p1 als voor de hierna te bespreken eenheid e1 is het wenselijk de berekening te beperken tot de grootheden, die voor het oplossen van een gegeven aansluitingsprobleem nodig zijn. Dit wordt geregeld door bepaalde gegevens, die van buiten af worden toegevoerd.

e1: Programma-eenheid voor fase 2⁰.

Hierbij worden de krachten en vervormingen *aan de rand van de schaal* berekend, zoals die volgen uit de *algemene* oplossing van de schaalvergelijkingen. Aangezien in deze fase de vrije constanten uit de algemene

oplossing niet bekend zijn, kan men voorlopig niets anders doen dan de factoren berekenen waarmee deze constanten vermenigvuldigd moeten worden. Ter toelichting kan verwezen worden naar de tabel op bladzijde 70 van IBC-mededelingen april 1956; men heeft in feite te maken met een ingevulde multiplicatortabel.

e2: Programma-eenheid voor fase 6⁰.

Hierbij wordt het verloop *over het schaaloppervlak* berekend van een aantal spannings- en vervormingsgrootheden, zoals die volgen uit de *algemene* oplossing van de schaalvergelijkingen. De keuze van de grootheden, die worden berekend en het rooster van punten waarvoor deze berekening gebeurt worden door een aantal van buiten af toegevoerde gegevens geregeld. Dit geldt ook voor de hierna te bespreken eenheid p2.

p2: Programma-eenheid voor fase 7⁰.

Hierbij wordt het verloop *over het schaaloppervlak* berekend van een aantal spannings- en vervormingsgrootheden, zoals die volgen uit de *particuliere* oplossing van de schaalvergelijkingen. De resultaten worden volgens aanwijzing van één van de gegevens opgeteld bij andere uitkomsten, meestal die van de algemene oplossing; in een gecompliceerd geval wordt opgeteld bij een eerder gevormde som.

Naast deze eenheden, die op een bepaald schaaltype betrekking hebben, zijn overeenkomstige eenheden geconcipieerd voor veel voorkomende typen randconstructies. Voorts wordt nog een programma-eenheid gebruikt bij het oplossen van de aansluitingsvergelijkingen in fase 5⁰. Het betreft hier een berekening, die geheel op het terrein van de numerieke analyse ligt. Het gekozen proces is aan de bestaande literatuur ontleend; enige aanpassing heeft plaats gehad in verband met conventies, die bij de schaleneenheden zijn ingevoerd.

Al de genoemde eenheden worden na de vervaardiging grondig getest en zonodig verbeterd; daarna zijn ze beschikbaar om in het grotere geheel van een schalenprogramma te worden opgenomen.

2 Het gebruik van de programma-eenheden

Voor een concreet geval is bekend, wat de omringende constructie van een te berekenen schaal is. Dit kan bijvoorbeeld een andere schaal zijn, zoals in het geval van een bolvormig dak op een cirkelcilindrisch reservoir, dat op zijn beurt op een kegelvormige bodem aansluit. Meer frequent hebben we te maken met randbalken en ondersteuningsschotten. Hoe dit ook zij, men heeft als uitgangspunt de eenheden voor de schaal en overeenkomstige eenheden voor omringende constructies. Hiermee is dan in principe ook in de fasen 3⁰ en 8⁰ van het hiervoor genoemde rekenproces te voorzien.

Het gaat er dan nog om, een programma samen te stellen dat de verschillen-

de eenheden tot één geheel verbindt, ze in de juiste volgorde activeert en een aantal instructies voor fase 4^o van het rekenproces inlast.

Het samenstellen van een dergelijk programma wordt door de programmeertaal ALGOL 60 gemakkelijk gemaakt, omdat men daarbij de mogelijkheid heeft een programmagedeelte tot „procedure” te verklaren. Dit programmagedeelte blijft dan voorlopig passief en bevat alleen een recept hoe een berekening uitgevoerd zou kunnen worden, uitgaande van een aantal gegevens die parameters van de procedure worden genoemd. Vanaf een willekeurige plaats van het hoofdprogramma kan nu een oproep worden gedaan die de procedure activeert; bij de oproep worden tevens de parameters gegeven. Alle schalen-eenheden zijn in de vorm van procedures geprogrammeerd, parameters zijn hierbij de schaalafmetingen, specificaties van de gewenste grootte en de plaats waar de uitkomsten moeten worden opgeborgen.

Stel dat men nu een constructie heeft, waarin twee cilinderschalen voorkomen, met verschillende dikte, kromtestraal, belasting enzovoorts. De procedures p1, e1, e2 en p2 voor de cilinderschaal worden nu in de loop van het programma twee maal opgeroepen, eerst voor de ene en dan voor de andere schaal, iedere maal met de bijpassende gegevens.

Het meest omvangrijke deel van het rekenwerk wordt uitgevoerd door de procedures: het verbindende programma is daarom betrekkelijk klein. Dat houdt niet in, dat de samenstelling ervan eenvoudig is; integendeel moet hierbij met allerlei mogelijke complicaties rekening worden gehouden. De aldus naar voren komende problemen, waarvan enige voorbeelden naar aanleiding van figuur 1 zijn besproken, vergen voor hun oplossing ook constructieve ervaring, kennis en intuïtie.

Hieruit volgt van nature een bepaalde taakverdeling bij het tot stand komen van een programma. De auteurs van de rekenschema's zijn uitgegaan van de hogere elasticiteitstheorie enerzijds, wiskundige kennis anderzijds. Als het schema eenmaal ter tafel ligt is het vervaardigen van de programma-eenheden een taak, die door wiskundigen en programmeerdeskundigen kan worden behandeld. Het ontwerpen en samenstellen van het verbindende programma dient echter een resultaat te zijn van technische kennis en programmeerkennis tezamen (al dan niet in één persoon verenigd). De ingenieur, die een schaalberekening moet uitvoeren in verband met een opdracht of speurwerkproject, of de student, die aan zijn afstudeerontwerp werkt, moet hier op eigen verantwoording beslissingen nemen. Deze betreffen onder andere de idealiseringsen ten opzichte van de werkelijke constructie, die men mogelijk acht. Voorts moet men in voldoende mate kennis nemen van rekenschema en programma-eenheden om de uitkomsten kritisch te kunnen beoordelen.

Het merendeel van de rekenschema's is afkomstig van het instituut TNO-IBBC, de programma-eenheden van het Stevinlaboratorium. Bij opdrachten of speurwerkprojecten, die tot het gebruik van de programmabibliotheek aanleiding geven, wordt dit in samenwerking door de instituten gedaan.

3 De beschikbare programma-eenheden

In het volgende overzicht zijn naast de gegevens over de aanwezige procedures ook de literatuurbronnen vermeld. Hierin is terug te vinden, op welke formules de programma's gebaseerd zijn. Meestal is gebruik gemaakt van de technische schalentheorie, bij cilinderschalen DKJ-methode genoemd. In enkele gevallen wordt uitgegaan van formules, die gelden voor zeer dunne schalen, zoals bij de methode SCHORER. Deze formules spelen vooral een rol bij theoretische onderzoeken, waarbij het de bedoeling is een eenvoudig verband te vinden tussen spanningsgrootheden en schaalafmetingen. De schaleneenheden zijn gecodeerd door een aanduiding bestaande uit 6 symbolen. De eerste twee symbolen zijn letters en geven het schaaltype aan. De volgende twee symbolen bepalen het soort programma-eenheid (p1, e1, p2, e2). De laatste twee symbolen worden gevormd door een getal, waarmee verschillende versies van het programma worden genummerd. Versies kunnen verschillen in de gebruikte theorie, het aanwezig zijn van symmetrie-assen, of nog andere kenmerken. Zo is bijvoorbeeld bs e1 01 de programma-eenheid van soort e1 voor een bolsegment, berekend met de formules van de technische schalentheorie voor oplossingsaandelen, waarvan het verloop over de schaalomtrek sinusoidaal is.

De eenheden zijn gegroepeerd volgens de eerste twee symbolen.

cr: Cirkelcilindrische schaal, die aan de gebogen randen door schotten is ondersteund en waarbij voor de rechte randen diverse randvoorwaarden kunnen gelden.

Er zijn twee versies: een voor de DKJ-methode en een voor de methode SCHORER (als limiet van de DKJ-methode voor zeer dunne schalen opgevat). Particuliere oplossingen zijn beschikbaar voor verschillende soorten verdeelde belasting en voor het geval dat de schaal langs een beschrijvende is voorgespannen.

IBC-mededelingen april 1956 „De berekening van de spanningsverdeling in cirkelcilindrische schaaldaken volgens de DKJ-methode met behulp van een rekenschema”.

TNO-rapport BI-58-23: „De berekening van cirkelcilindrische schalen, waarbij de randvoorwaarden langs de rechte randen in rekening worden gebracht”, door Prof. Ir. A. L. Bouma en H. van Koten.

Stevin-rapport 8-62-4-cs 2: „Cirkelcilindrische schaal volgens een beschrijvende voorgespannen”, door Ir. J. Blaauwendraad.

Stevin-rapport 8-63-3-cs 3: zelfde titel, door Ir. J. W. Bosschaart.

cg: Cirkelcilindrische schaal met gesloten doorsnede, waarbij aan de gebogen randen diverse randvoorwaarden kunnen gelden. Voor het geval, dat de spanningen en vervormingen over de omtrek een sinusvormig verloop hebben, is een versie beschikbaar, die gebaseerd is op de DKJ-formules.

Axiaalsymmetrisch belaste omwentelingsschalen, waaronder ook de aldus belaste cirkelcilinderschaal, worden berekend met de procedure el voor elastisch ondersteunde liggers.

TNO-rapport BI-58-4: „De berekening van cirkelcilindrische schalen, waarbij de randvoorwaarden aan de gebogen randen in rekening worden gebracht”, door Prof. Ir. A. L. Bouma en H. van Koten.

IBC-mededelingen januari 1958: „Randstoringen bij axiaalsymmetrisch belaste omwentelingsschalen”.

eh: Elliptische of hyperbolische paraboloiden, die volgens hoofdparabolen is begrensd. Het rekenschema, dat voor beide schaalvormen geldt, is gebaseerd op de formules van de technische schalentheorie. De limiet hiervan voor zeer dunne schalen is verschillend voor elliptische en hyperbolische paraboloiden, waarvoor dan verschillende procedures ep en hp worden gebruikt. Hiernaast is nog een versie beschikbaar, waarbij de randstoringen worden weggelaten; de schaal wordt dan berekend met partiële differentiaalvergelijkingen van de vierde orde.

Proceedings of the IUTAM-symposium on the theory of thin elastic shells, Delft 1960: „Some applications of the bending theory regarding doubly curved shells”, door Prof. Ir. A. L. Bouma.

TNO-rapport BI-59-26: „De berekening van elliptische en hyperbolische paraboloiden schalen, waarvan de randen evenwijdig zijn met de hoofdparabolen”. door H. van Koten.

Stevin-rapport 8-62-3-hes 1: „Het splitsen van de benaderde oplossing van de algemene differentiaalvergelijking van hyper- en elparschalen in delen met verschillende fysische betekenis”, door Ir. H. W. Loof en Th. W. G. Duin.

hb: Orthogonale hyperbolische paraboloiden begrensd volgens beschrijvenden. Er zijn versies voor de berekening volgens de technische schalentheorie en voor de berekening met speciale formules voor zeer dunne schalen. Stevin-rapport 2-58-5-ht 2: „Het oplossen van de karakteristieke vergelijking voor orthogonale hyperparschalen”, door Ir. H. W. Loof.

Stevin-rapport 8-61-3-hr 1: „Eenvoudige formules voor de buigingsstoringen in hyperparschalen, die volgens beschrijvenden zijn begrensd”, door Ir. H. W. Loof.

bs: Bolschaal begrensd door een parallelcirkel (bolsegment).

De beschikbare versie is gebaseerd op de technische schalentheorie.

Voor de meest voorkomende ondersteuningsconstructies: ringbalk en kring van kolommen zijn eveneens eenheden beschikbaar.

Stevin-rapport 8-62-5-bs 10: „Randstoringen in een bolschaal ondersteund door randbalk en kolommen ten gevolge van het eigen gewicht”, door R. Soerjadi.

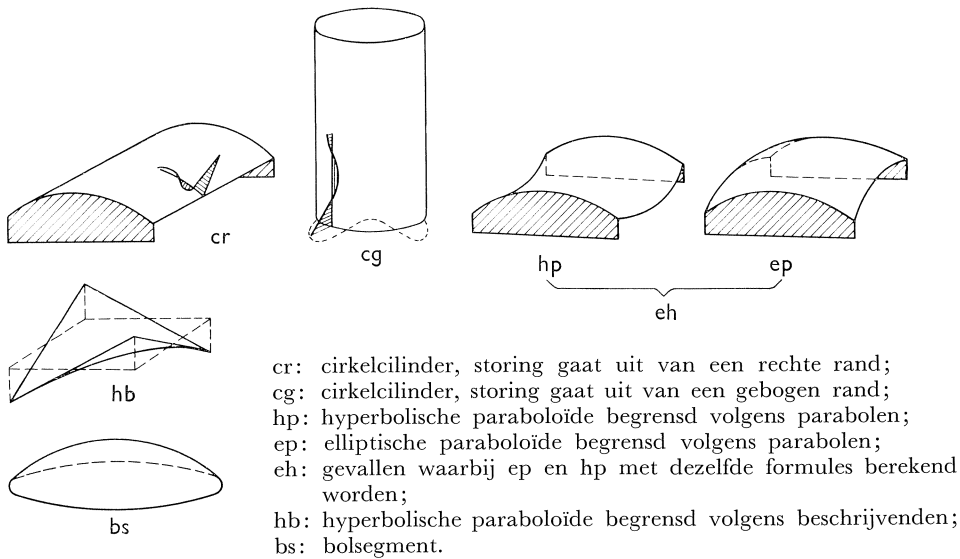


Fig. 2. Schaalvormen, waarvoor programma-eenheden beschikbaar zijn.

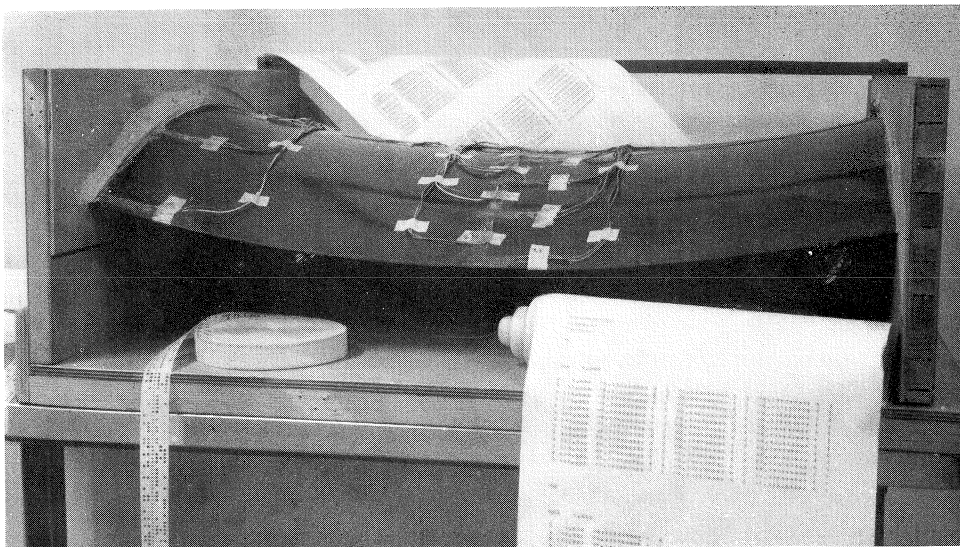


Fig. 3. Voor hyperbolische paraboloiden, langs de gebogen randen ondersteund, werd een experimenteel onderzoek verricht door de groep Meettechniek van het Stevinlaboratorium. Parallel hiermee werd een groot aantal schalen van dit type berekend met behulp van de hier beschreven programma's. De twee soorten onderzoek vullen elkaar op gelukkige wijze aan. Voor verschillende van de experimenteel onderzochte schalen heeft de theorie nog geen oplossing gevonden, en waar die oplossing wel beschikbaar is, zal een verificatie van de daaraan ten grondslag liggende veronderstellingen nodig zijn. Anderzijds geeft de berekening meer mogelijkheid de schaalafmetingen op allerlei manieren te variëren; ook kan daaruit de plaats van de maximale spanningen worden voorspeld, wat een doelmatige keuze en opzet van het experiment mogelijk maakt.

4 Matrixberekening van constructies volgens de verplaatsingsmethode

Als men overgaat tot het systematisch beschrijven van de berekening van constructies, met het doel die berekening door een elektronische rekenautomaat te laten uitvoeren, dan kan men vaak met voordeel gebruik maken van matrixrekening. Bewerkingen op groepen van getallen worden hierbij in verkorte notatie voorgesteld. Het is in eerste instantie helemaal niet zo, dat men dusdoende afwijkt van de bij handberekeningen gebruikelijke methoden, maar wel treedt een zekere selectie op, die er op gericht is de berekeningsmethode voor systematische uitvoering geschikt te doen zijn. Op het ogenblik worden vooral de volgende berekeningswijzen, met gebruik van matrixnotatie, toegepast voor het berekenen van (meestal statisch onbepaalde) constructies:

- 1^o De *krachtenmethode*, waarbij als onbekenden gelden de snedekrachten in de verbindingen tussen als elementair beschouwde constructiedelen; meestal zijn dit statisch bepaalde subsystemen van de gehele constructie.
- 2^o De *verplaatsingsmethode*, waarbij als onbekenden optreden de verplaatsingen van de verbindingen tussen als elementair beschouwde constructiedelen; er wordt in principe geen verschil gemaakt tussen statisch bepaalde of onbepaalde constructiedelen.
- 3^o De *overdrachtsmethode*. Hierbij worden als onbekenden de krachten en de verplaatsingen in een bepaald aantal verbindingen genomen; van daaruit door de constructie gaande drukt men vervolgens alle andere grootheden uit in die onbekenden.

De methoden worden ook vaak aangeduid met de namen van pioniers op dit gebied (methoden van ARGYRIS, van LIVESLEY en van FALK). Hierbij is op te merken, dat op diverse plaatsen tegelijk dezelfde of bijna dezelfde technieken zijn ontwikkeld bij het in zwang komen van elektronische rekenautomaten.

In verband met het rekenproces, in paragraaf I behandeld, ligt het voor de hand bij de berekening van schaaldaken de verplaatsingsmethode te gebruiken. (In bepaalde gevallen kan het echter voordelig zijn de overdrachtsmethode toe te passen; een voorbeeld hiervan is beschreven door H. van Koten in TNO-rapport BI-60-19 „Berekening van een shedschaal m.b.v. de tabellen van rapport BI-58-23”.) Een toepassing van matrices onder gebruikmaking van de verplaatsingsmethode is beschreven door R. Soerjadi in het Stevin-rapport 8-62-5-bs 10: „Randstoringen in een bolschaal, ondersteund door randbalk en kolommen, ten gevolge van het eigen gewicht”.

De gang van zaken bij de verplaatsingsmethode is als volgt:
Een constructiegedeelte, dat als elementair beschouwd wordt, zij op de omringende constructie aangesloten door middel van verbindingen, die maken dat bepaalde verplaatsingscomponenten voor het beschouwde gedeelte en voor de

omringende constructie onderling gelijk zijn. Het totale aantal van deze verplaatsingscomponenten, over alle verbindingen tezamen, zij gelijk aan n . Men kan ze opvatten als de n -elementen van een vector \mathbf{v} , die verplaatsingsvector wordt genoemd. Op te merken valt, dat het bij dit soort berekeningen niet ongewoon is, wanneer de componenten van een verplaatsingsvector de verplaatsingen van verschillende punten voorstellen, of dat de componenten geen verplaatsingen, maar rotaties betreffen.

Naast de aldus gedefinieerde verplaatsingsvector gebruikt men nog een krachtenvector \mathbf{k} , bevattende de componenten van de snedekrachten in de verbindingen. Het aantal elementen, de aangrijpingspunten, de richting en de zin van de ontbinding zijn geheel dezelfde als bij de verplaatsingsvector.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

In een constructie met lineair gedrag is het verband tussen krachten en verplaatsingen homogeen-lineair. Bij gegeven krachten volgen de verplaatsingen uit vergelijkingen, die de *flexibiliteit* van de constructie beschrijven. Omgekeerd volgen, bij gegeven verplaatsingen, de krachten uit vergelijkingen, die de *stijfheid* van de constructie kenmerken.

$$v_1 = f_{11}k_1 + f_{12}k_2 + f_{13}k_3 \dots + f_{1n}k_n$$

$$v_2 = f_{21}k_1 + f_{22}k_2 + f_{23}k_3 \dots + f_{2n}k_n$$

evenzo voor $v_3 \dots v_n$

$$k_1 = s_{11}v_1 + s_{12}v_2 + s_{13}v_3 \dots + s_{1n}v_n$$

$$k_2 = s_{21}v_1 + s_{22}v_2 + s_{23}v_3 \dots + s_{2n}v_n$$

evenzo voor $k_3 \dots k_n$

Hetzelfde in matrixnotatie weergegeven:

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{k} = \mathbf{S}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \dots & f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \dots & f_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & \dots & s_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

De vierkante matrices \mathbf{F} en \mathbf{S} worden flexibiliteitsmatrix respectievelijk stijfheidsmatrix genoemd. \mathbf{F} en \mathbf{S} zijn wederkerig uit elkander af te leiden door een bewerking, die inversie wordt genoemd. Het produkt van twee matrices, die elkaars inverse zijn, is een eenheidsmatrix; dit is een matrix die op de

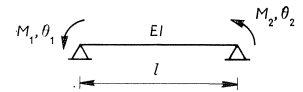
hoofddiagonaal (van links boven naar rechts onder) bezet is met elementen 1 en overigens slechts elementen 0 bevat.

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}; \quad \mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}; \quad \mathbf{FS} = \mathbf{SF} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

De rekenkundige bepaling van de inverse van een matrix wordt in verschillende handboeken gegeven. Voor het uitvoeren van matrixinversie op een elektronische rekenautomaat zijn vele programma's beschikbaar.

Als toelichting op het voorgaande volgt hier het voorbeeld van een ligger op twee steunpunten, die aan de uiteinden met een tegen draaiing weerstand biedende verbinding aangesloten is op een (verder niet nader omschreven) omringende constructie. Hierbij geldt nu:



$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} l/3EI & -l/6EI \\ -l/6EI & l/3EI \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 4EI/l & 2EI/l \\ 2EI/l & 4EI/l \end{pmatrix}$$

De gegeven matrix-opzet is gemakkelijk te verifiëren. Op te merken valt, dat de matrix \mathbf{F} symmetrisch is (ten opzichte van de hoofddiagonaal). Dit is een consequentie van de wederkerigheidswet van MAXWELL. De matrix \mathbf{S} is eveneens symmetrisch, als gevolg van de symmetrie van \mathbf{F} .

De elementen van \mathbf{S} doen direct denken aan de methode van CROSS: de termen op de hoofddiagonaal zijn de verdraaiingsstijfheden voor de uiteinden; ernaast bevinden zich diezelfde stijfheden vermenigvuldigd met de overdrachtscoëfficiënt $1/2$. Zoals reeds eerder is opgemerkt, hebben de verschillende matrixmethoden voor de berekening van constructies een duidelijke verwantschap met de gebruikelijke methoden. De overeenkomst van de verplaatsingsmethode met de methode van CROSS zet zich ook in de verdere uitwerking voort.

De stijfheidsmatrices van de verschillende onderdelen van een constructie worden achtereenvolgens bepaald. Ter vereenvoudiging van de uiteenzetting wordt nu aangenomen, dat er slechts twee constructiedelen zijn, die onderling één verbinding hebben. De stijfheidsmatrices van de delen met betrekking tot die verbinding worden \mathbf{S}_a en \mathbf{S}_b genoemd. De stijfheid van de constructie als geheel ter plaatse van de verbinding is de som van de stijfheden van de verbonden delen. Men vormt derhalve een totale stijfheidsmatrix \mathbf{S} als de som van \mathbf{S}_a en \mathbf{S}_b . Door inversie van deze matrix \mathbf{S} vindt men de flexibiliteitsmatrix \mathbf{F} van de gehele constructie met betrekking tot de verbinding.

Als nu de een of andere belastingstoestand van de constructie gegeven is,

dan wordt voorlopig aangenomen, dat ter plaatse van de verbinding uitwendig zodanige krachten (vasthoudkrachten) worden aangebracht, dat de verplaatsingen van de verbinding nul zijn. Aangenomen wordt dat deze krachten voor de elementaire constructiedelen eenvoudig te bepalen zijn; belangrijk is daarbij dat men voor ieder constructiedeel afzonderlijk slechts te maken heeft met de belasting en de afmetingen van dat gedeelte. Het bijbehorende krachtenverloop in de constructiedelen wordt het primaire krachtenverloop genoemd.

De vasthoudkrachten kunnen worden beschreven door middel van een vasthoudkrachtenvector \mathbf{k}_v . Om de definitieve toestand van de constructie te bepalen moet een tegengestelde vector, dus $-\mathbf{k}_v$ worden gesuperponeerd.

De verplaatsingen van de verbinding, die hiervan het gevolg zijn (en die beschreven worden door de loslaatverplaatsingsvector \mathbf{v}_l), zijn te berekenen, omdat de flexibiliteitsmatrix van de gehele constructie bekend is. Uit de bijkomende verplaatsing kan vervolgens de wijziging van het krachtenverloop in de constructiedelen ten opzichte van de primaire toestand bepaald worden. Hierbij is op te merken, dat als eenmaal de verplaatsing van de verbinding bekend is, men verder aan de afmetingen van een afzonderlijk gedeelte voldoende heeft om de wijziging van het krachtenverloop in dat gedeelte te bepalen.

Een formele beschrijving van het rekenproces in matrixnotatie is als volgt:

$$\mathbf{k}_a = \mathbf{S}_a \mathbf{v}; \quad \mathbf{k}_b = \mathbf{S}_b \mathbf{v}; \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_a + \mathbf{S}_b; \quad \mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}$$

Na bepaling van \mathbf{k}_v volgt

$$\mathbf{v}_l = -\mathbf{F} \mathbf{k}_v$$

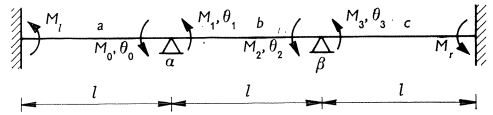
en verder

$$\mathbf{k}_{la} = \mathbf{S}_a \mathbf{v}_l; \quad \mathbf{k}_{lb} = \mathbf{S}_b \mathbf{v}_l$$

In het geval, dat een constructie uit meer dan twee delen bestaat, die via meerdere verbindingen onderling zijn aangesloten, is de opzet in principe niet anders. Om het verplaatsingsgedrag van de gehele constructie te beschrijven, hanteert men nu een verplaatsingsvector \mathbf{v} , waarin de verplaatsingsvectoren van de verschillende verbindingen $\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, \mathbf{v}_\gamma, \dots$ zijn vervat. Als de aantallen elementen in de afzonderlijke vectoren $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, \dots$ zijn, zal het aantal elementen in de verplaatsingsvector van de gehele constructie gelijk zijn aan $n_\alpha + n_\beta + n_\gamma, \dots$. De constructiedelen, die niet aan een bepaalde verbinding grenzen, hebben met betrekking tot de verplaatsingscomponenten van die verbinding een stijfheid nul. Voor een goed begrip van de methode is het dienstig, om het geheel van de verbindingen, die aan een constructiegedeelte grenzen, tijdelijk op te vatten als één enkele verbinding, „de” verbinding van dat gedeelte aan de omringende constructie. De stijfheidsmatrix van het betreffende constructiegedeelte heeft betrekking op die als enkelvoudig opgevatte verbinding. Door aan de stijfheidsmatrix nu een aantal kolommen en

rijen toe te voegen, die uitsluitend elementen nul bevatten, krijgt men de stijfheidsmatrix van het beschouwde gedeelte met betrekking tot het totaal van alle verbindingen in de constructie.

Het voorgaande moge met een voorbeeld toegelicht worden: een doorgaande ligger (stijfheid EI), op vier vaste steunpunten, die ter plaatse van de buitenste steunpunten star is ingeklemd. De staven a en b (zie figuur) zijn onderling vast verbonden over het steunpunt α , de staven b en c over het steunpunt β . Bij de verbindingen kunnen de staven gemeenschappelijke rotaties ter grootte θ_α respectievelijk θ_β ondergaan. Allereerst wordt nu onderzocht welke vervorming de constructie ondergaat indien bij α en β uitwendige momenten aangrijpen.



Staf b heeft in zijn verbindingen twee vrijheidsgraden, staf a en c ieder één. De stijfheidsmatrices van de staven a en c bestaan ieder uit één enkel element. Men beschouwt echter een verplaatsingsvector voor de gehele constructie, die zowel θ_α als θ_β bevat. Staf a biedt geen weerstand tegen verdraaiing bij β en staf c geen weerstand tegen verdraaiing bij α . De stijfheidsmatrices van deze staven dienen dus met elementen 0 te worden aangevuld.

$$\theta_0 = \theta_1 = \theta_\alpha; \quad \theta_2 = \theta_3 = \theta_\beta$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \theta_\alpha \\ \theta_\beta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_a = \begin{pmatrix} 4EI/l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_b = \begin{pmatrix} 4EI/l & 2EI/l \\ 2EI/l & 4EI/l \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4EI/l \end{pmatrix}$$

De weerstand van de staven tegen de rotaties maakt het noodzakelijk uitwendige momenten aan te brengen ter plaatse van de tussensteunpunten; deze zijn gelijk aan de som van de momenten die nodig zijn voor de staven aan weerszijden van elk steunpunt.

$$M_0 + M_1 = M_\alpha; \quad M_2 + M_3 = M_\beta$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} M_\alpha \\ M_\beta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_a + \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_c = \begin{pmatrix} 8EI/l & 2EI/l \\ 2EI/l & 8EI/l \end{pmatrix}$$

Door inversie van de stijfheidsmatrix vindt men vervolgens de flexibiliteitsmatrix van de gehele constructie.

Door middel van de flexibiliteitsmatrix is het mogelijk bij gegeven uitwendige momenten de daarbij behorende rotaties te berekenen.

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 4l/30EI & -l/30EI \\ -l/30EI & 4l/30EI \end{pmatrix}$$

Als illustratie van het uitwerken van de berekening bij een gegeven belasting wordt nu het geval genomen waarbij veld a een gelijkmatig verdeelde belasting q draagt. In de primaire toestand, waarbij de hoekverdraaiing van de ligger boven het steunpunt α nul gemaakt moet worden, is vereist een uitwendig moment, bij α aan te brengen, ter grootte: $M_v = -1/12ql^2$. We krijgen aldus:

$$\mathbf{k}_v = \begin{pmatrix} -1/12ql^2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_l = -\mathbf{F}\mathbf{k}_v = \begin{pmatrix} ql^3/90EI \\ -ql^3/360EI \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{la} = \begin{pmatrix} 2/45ql^2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{k}_{lb} = \begin{pmatrix} 7/180ql^2 \\ 1/90ql^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{k}_{lc} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/90ql^2 \end{pmatrix}$$

zodat

$$M_0 = -1/12ql^2 + 2/45ql^2 = -7/180ql^2;$$

$$M_1 = 7/180ql^2; \quad M_2 = 1/90ql^2; \quad M_3 = -1/90ql^2$$

Men kan vervolgens overgaan tot het uitwerken van vervormingen en momenten in andere punten van de verbindingen; deze grootheden zijn op te bouwen uit een (eventueel) primair aandeel en een aandeel, dat in de gevonden rotaties is uit te drukken. Zo kan men bijvoorbeeld de inklemmingsmomenten vinden:

$$M_l = +1/12ql^2 + (2EI/l)\theta_a = +1/12ql^2 + 1/45ql^2 = +19/180ql^2;$$

$$M_r = (2EI/l)\theta_\beta = -1/180ql^2$$

De overeenkomst van de verplaatsingsmethode met de methode van CROSS is ook in dit voorbeeld te bespeuren. Alleen de vereffeningstechniek bij de uitwerking ontbreekt. Dit verschil is echter niet zo groot als het lijkt, omdat sommige methoden voor het inverteren van matrices (wat hier nodig is om \mathbf{F} uit \mathbf{S} te bepalen) berusten op een iteratief proces. Er zijn ook directe methoden. Welke keuze men tenslotte doet, is voor het technische probleem niet van belang. Bij gebruik van de verplaatsingsmethode is de keuze van het inversie-procédé een zaak geworden van numerieke analyse; er zijn hier tal van mogelijkheden beschikbaar.

5 Toepassing van de verplaatsingsmethode op schaalconstructies

5.1 De aanpassing van het rekenproces

Bij de toepassing van de verplaatsingsmethode op constructies, bestaande uit een schaaldak of meerdere schaaldaken met randvoorzieningen, zal een afzonderlijke schaal als elementair onderdeel van de constructie worden beschouwd. In de eerste fase van het rekenproces kan worden volstaan met gegevens over de krachten, die nodig zijn om de rand van de schaal bepaalde verplaatsingen te doen ondergaan. In de gepubliceerde rekenschema's vindt men een overzicht van de krachten en verplaatsingen in een willekeurig punt van de schaal, uitgedrukt in de onbepaalde coëfficiënten van een oplossing van de differentiaalvergelijking voor de onbelaste schaal. Stel, dat het aantal onbepaalde coëfficiënten n is, dan is het verloop van de verplaatsingen langs de schaalrand te beschrijven door middel van functies met in totaal n getalparameters. In overeenstemming met wat in het vorige hoofdstuk is opgemerkt, wordt hier met „schaalrand” bedoeld: het totaal van alle randen van de beschouwde schaal. Ook het verloop van de met deze verplaatsingen correspon-

derende krachten op de schaalrand is met n getalparameters te beschrijven.

We denken nu de n onbepaalde coëfficiënten van de oplossing verenigd in een vector \mathbf{c} en de n getalparameters behorend bij krachten respectievelijk verplaatsingen in vectoren \mathbf{k} en \mathbf{v} . Uit het rekenschema (met name uit de multiplicatortabel) is het lineaire verband tussen de laatstgenoemde vectoren en de vector \mathbf{c} af te leiden en weer te geven als een matrixvermenigvuldiging met vierkante matrices \mathbf{K} en \mathbf{V} .

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}\mathbf{c}; \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}\mathbf{c}$$

In de beginfasen van de berekening zijn de coëfficiënten, de elementen dus van de vector \mathbf{c} , nog niet bekend. Met behulp van de multiplicatortabel zijn echter de elementen van de matrices \mathbf{K} en \mathbf{V} direct op te schrijven. Het is daarna ook mogelijk, de stijfheidsmatrix van de schaal met betrekking tot de schaalrand op te stellen. Veronderstellen we namelijk, dat de vervorming van de schaalrand voorgeschreven is, dan is de vector \mathbf{c} te bepalen met behulp van de inverse van de matrix \mathbf{V} . Uit \mathbf{c} volgen dan direct de krachten op de schaalrand. De stijfheidseigenschappen van de schaalrand zijn dus impliciet reeds bekend.

Het uitschrijven van de stijfheidsmatrix is dan ook mogelijk.

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{v} \quad \text{en} \quad \mathbf{k} = \mathbf{K}\mathbf{c} = \mathbf{K}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{v}$$

maar $\mathbf{k} = \mathbf{S}\mathbf{v}$ dus $\mathbf{S} = \mathbf{K}\mathbf{V}^{-1}$

De stijfheidsmatrix volgt dus via enige bewerkingen uit de bekende matrices \mathbf{K} en \mathbf{V} . Op een geheel overeenkomstige wijze kan men ook de flexibiliteitsmatrix vinden. Als controle geldt de eigenschap, dat stijfheidsmatrix en flexibiliteitsmatrix elkaars inverse moeten zijn.

$$\mathbf{c} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{k}; \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}\mathbf{c} = \mathbf{V}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{k}; \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{K}^{-1}$$

$$\mathbf{S}\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I}$$

Overigens kan men bij toepassing van de verplaatsingsmethode het berekenen van de flexibiliteitsmatrix achterwege laten; deze matrix is bij het rekenproces niet nodig en men kan zich in eerste instantie beperken tot het berekenen van de stijfheidsmatrix. Daarnaast heeft men nodig de vasthoudkrachten, die de schaal in de primaire toestand brengen, m.a.w. de vervorming aan de schaalrand nul maken door opheffing van de eventuele vervorming ten gevolge van de schaalbelasting. Voor het opnemen van de op de schaal aangrijpende belastingen neemt men een bepaald krachtsverloop aan, dat overeenkomt met een voor die belasting geldende particuliere oplossing van de schaalvergelijkingen (meestal is dit een membraanoplossing). Aan de rand van de schaal zullen de verplaatsingscomponenten, alsook de krachtcomponenten die bij deze particuliere oplossing behoren, in het algemeen van nul verschillen. De vasthoudkrachtenvector bestaat dan uit twee aandelen: in de eerste plaats moeten de uittredende krachten van de particuliere oplossing opgenomen

worden, in de tweede plaats moet de verplaatsing uit de particuliere oplossing weer teniet worden gedaan.

$$\mathbf{k}_v = \mathbf{k}_p - \mathbf{S}\mathbf{v}_p$$

Aldus is uitvoering gegeven aan de fasen 1⁰ en 2⁰ van het in hoofdstuk 1 beschreven rekenproces (verzamelen van gegevens over de randgrootheden uit particuliere en algemene oplossing).

Fase 3⁰ houdt in, dat men nu voor de omringende constructies de overeenkomstige weg volgt. De uitvoering van de fasen 4⁰ en 5⁰ (opstellen en oplossen van de aansluitingsvergelijkingen) verloopt volgens de reeds beschreven techniek van de verplaatsingsmethode. De stijfheidsmatrices en vasthoudkrachtenvectoren van de onderdelen worden samengesteld tot de stijfheidsmatrix en de vasthoudkrachtenvector van de gehele constructie. Na het bepalen van de flexibiliteitsmatrix van de gehele constructie door inversie van de stijfheidsmatrix, volgt voorts direct de verplaatsing, die het gevolg is van het verwijderen van de vasthoudkrachten.

De coëfficiënten van de algemene oplossing van de schaalvergelijkingen zijn nu te bepalen, omdat de hierbij behorende randverplaatsingen, beschreven door een vector \mathbf{v}_0 , bekend zijn. Immers geldt:

$$\mathbf{v}_l = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_p \quad \text{dus} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_p$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{v}_0$$

Na het bepalen van de coëfficiënten biedt de verdere uitwerking van het spanningsverloop in de schaal geen moeilijkheden meer (fase 6⁰ en 7⁰ van het rekenproces). Voor de overige constructiedelen wordt dezelfde weg bewandeld (fase 8⁰).

Het overzicht van de uitvoering van alle fasen van het rekenproces is hiermee voltooid. Ter wille van de beknoptheid is echter aan een aantal moeilijkheden voorbijgegaan, die toch wel een nadere bespreking verdienen, omdat ze bij de feitelijke uitwerking veel aandacht vragen.

De stijfheidsmatrices en vasthoudkrachtenvectoren van verschillende onderdelen met betrekking tot gemeenschappelijke verbindingen mogen namelijk alleen dán gesuperponeerd worden, als de componenten van krachtenvectoren en verplaatsingsvectoren aan de volgende voorwaarden voldoen:

- 1⁰ de assenstelsels, volgens welke de grootheden worden ontbonden, moeten voor beide onderdelen dezelfde zijn,
- 2⁰ ook de tekenafspraken moet hetzelfde zijn,
- 3⁰ hetzelfde verloop van de grootheden langs de rand moet gespecificeerd kunnen worden met dezelfde getalparameters.

De afspraken inzake deze drie punten: assenstelsel, teken en specificatie worden nu eerst behandeld voor de schaalconstructie; vervolgens wordt nagegaan hoe de afspraken voor de verschillende onderdelen onderling aange-

past kunnen worden. Bij deze uiteenzettingen zullen vaak arbeidsbeschouwingen nodig blijken; daarom wordt hieraan nog een voorbereidende bespreking gewijd.

5.2 *Uitdrukkingen voor de elastische arbeid in matrixnotatie*

Transpositie van een matrix wil zeggen, dat een nieuwe matrix wordt gevormd met dezelfde elementen, die echter zodanig zijn gerangschikt dat de kolommen van de oorspronkelijke matrix in rijen zijn veranderd en vice versa. Men geeft transpositie aan door het oorspronkelijke symbool van een accent te voorzien.

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}' \text{ indien } b_{ij} = a_{ji}$$

Een kolomvector (zoals de krachtenvector \mathbf{k}) verandert door transpositie in een rijvector. Een vierkante matrix blijft vierkant, maar wordt gespiegeld ten opzichte van zijn hoofddiagonaal. Een symmetrische matrix (zoals de flexibiliteitsmatrix \mathbf{F}) gaat bij transpositie in zichzelf over. Een gewoon getal, als matrix met één element op te vatten, blijft eveneens bij transpositie ongewijzigd.

De volgende stelling wordt vaak toegepast: bij transpositie van een matrixprodukt worden alle factoren getransponeerd en tevens wordt de volgorde van de factoren omgedraaid.

$$\text{Als } \mathbf{A} = \mathbf{BCD} \text{ dan is } \mathbf{A}' = \mathbf{D}'\mathbf{C}'\mathbf{B}'$$

We gaan nu over tot de berekening van de arbeid in een elastische constructie. Als toelichting op het gebruik van vorenstaande formules zullen daarbij enige van de bekende arbeidsstellingen worden afgeleid.

De krachten die op de constructie werken, worden voorlopig geacht puntkrachten en -momenten te zijn; deze worden verenigd in een krachtenvector \mathbf{k} . De bijbehorende verplaatsingsgrootheden, waarvoor dezelfde positieve zin wordt aangenomen als voor de krachten, worden verenigd in een verplaatsingsvector \mathbf{v} . Bij een oneindig kleine toestandsverandering van de constructie groeit de arbeid, door de krachten verricht, aan met het bedrag:

$$dA = k_1 \cdot dv_1 + k_2 \cdot dv_2 + k_3 \cdot dv_3 \dots + k_n \cdot dv_n = \mathbf{k}' \cdot d\mathbf{v} \dots \dots (1)$$

De arbeid, door een eventueel bijkomende oneindig kleine kracht verricht, is oneindig klein van de tweede orde en komt daarom in (1) niet voor. De hier gegeven vermenigvuldiging van een rijvector met een kolomvector leidt tot een matrix met één element, dus tot een gewoon getal (arbeidsvermeerdering = scalar).

Op te merken valt, dat formule (1) ook voor niet-elastische constructies geldt. De veronderstelling, dat de constructie elastisch is, en dat het beginsel van superpositie geldt, stelt ons in staat een stap verder te gaan. De arbeid zal in dat geval alleen van begin- en eindtoestand afhankelijk zijn, en niet van de wijze van aangroeien van de belasting. Stel, dat de componenten van de krachtenvector van nul tot de huidige waarde zijn aangegroeid op zodanige

wijze, dat hun onderlinge verhouding dezelfde is gebleven. De krachtenvector is dan op enig tussengelegen tijdstip gelijk aan $\lambda \mathbf{k}$, waarbij λ een getal is tussen 0 en 1. De bijbehorende verplaatsingsvector is $\lambda \mathbf{v}$ en volgens (1) geldt:

$$dA = \mathbf{k}'\mathbf{v} \cdot \lambda d\lambda$$

Integratie, waarbij λ van 0 tot 1 loopt, geeft:

$$A = \frac{1}{2} \mathbf{k}'\mathbf{v}$$

Dit is de formule van CLAPEYRON in matrixnotatie. Door nu nogmaals een kleine, willekeurige toestandsverandering teweeg te brengen, kan men de volgende betrekking afleiden, die alleen voor elastische constructies geldt:

$$dA = \frac{1}{2} d\mathbf{k}'\mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{k}' d\mathbf{v} \dots \dots \dots (2)$$

Evenwel is ook (1) nog onverminderd geldig. Dit is slechts mogelijk indien:

$$d\mathbf{k}'\mathbf{v} = \mathbf{k}' d\mathbf{v}$$

Door nu de flexibiliteitsmatrix van de constructie te hulp te roepen, kan men schrijven:

$$d\mathbf{k}'\mathbf{F}\mathbf{k} = \mathbf{k}'\mathbf{F}d\mathbf{k}$$

Omdat de leden van deze vergelijking gewone getallen zijn, wordt er door transpositie niets aan veranderd. Derhalve geldt ook:

$$d\mathbf{k}'\mathbf{F}\mathbf{k} = d\mathbf{k}'\mathbf{F}'\mathbf{k}$$

en $d\mathbf{k}'(\mathbf{F} - \mathbf{F}')\mathbf{k} = 0$

De uitkomst van een matrixvermenigvuldiging kan nul zijn zonder dat de factoren nul zijn. In dit geval echter, omdat \mathbf{k} en $d\mathbf{k}$ volkomen willekeurige vectoren zijn, onafhankelijk van elkaar, moeten alle elementen van de matrix nul zijn.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} - \mathbf{F}' &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}' \\ f_{ij} &= f_{ji} \end{aligned}$$

Hiermee is dus een bewijs geleverd van de stelling van MAXWELL. Er zij aan herinnerd, dat eerder werd afgesproken dezelfde positieve zin voor krachten en verplaatsingen te kiezen. Dit is noodzakelijk, wil de gelijkheid van de elementen aan weerszijden van de hoofddiagonaal ook ten aanzien van het teken gelden. Voorts zijn dan de elementen óp de hoofddiagonaal alle positief.

Tot slot worden nog enige formules voor afgeleiden van de arbeid gegeven, die uit het vorenstaande volgen.

$$\frac{\partial A}{\partial v_i} = k_i; \quad \frac{\partial A}{\partial k_i} = v_i$$

De eerste betrekking, die uit (1) is af te leiden, geldt ook voor niet-elastische constructies. De tweede betrekking, die uit de combinatie van (1) en (2) volgt,

(en die niets anders is dan de bekende stelling van CASTIGLIANO), geldt alleen voor elastische constructies. Dit is ook het geval bij de hier volgende tweede afgeleiden:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial v_i \partial v_j} = s_{ij}; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial k_i \partial k_j} = f_{ij}$$

De laatste vier formules zijn in het bijzonder van belang, wanneer de belasting op de constructie niet bestaat uit een aantal puntkrachten, maar verdeeld is als een volgens bepaalde functies verlopende lijn- of oppervlaktebelasting. Men kan dan een „krachtenvector” construeren met als elementen n getalparameters, die het verloop van de belasting specificeren. Het is soms moeilijk te zeggen, wat dan verstaan moet worden onder bijbehorende verplaatsing, „stijfheid” en „flexibiliteit”. Vorenstaande formules geven hierop het antwoord.

Men kan ook de specificatie van het verloop van de verplaatsingen kiezen, en dan met dezelfde formules afleiden, hoe de „bijbehorende krachten” gespecificeerd moeten worden. Aan deze gang van zaken wordt meestal de voorkeur gegeven boven de eerstgenoemde.

5.3 Regels voor de beschrijving van de randeigenschappen

Bij de afleiding van de differentiaalvergelijkingen van de schaal, en bij het opstellen van particuliere en algemene oplossingen van deze vergelijkingen, bedient men zich vaak van de natuurlijke coördinaten van het middenvlak van de schaal. Dit zijn kromlijnige coördinaten, die over het oppervlak verlopen volgens het tweevoudige stelsel hoofdkromtelijnen; voor ieder punt van de schaal wordt daar de richting van de normaal als derde coördinaatrichting aan toegevoegd. De hierbij gebruikelijke tekenafspraken voor de verplaatsingen, de extensiekrachten (de normaalkrachten en de schuifkracht in het vlak van de schaal) en de buigingskrachten (buigende momenten, wringende momenten en dwarskrachten) zijn in fig. 4 aangegeven.

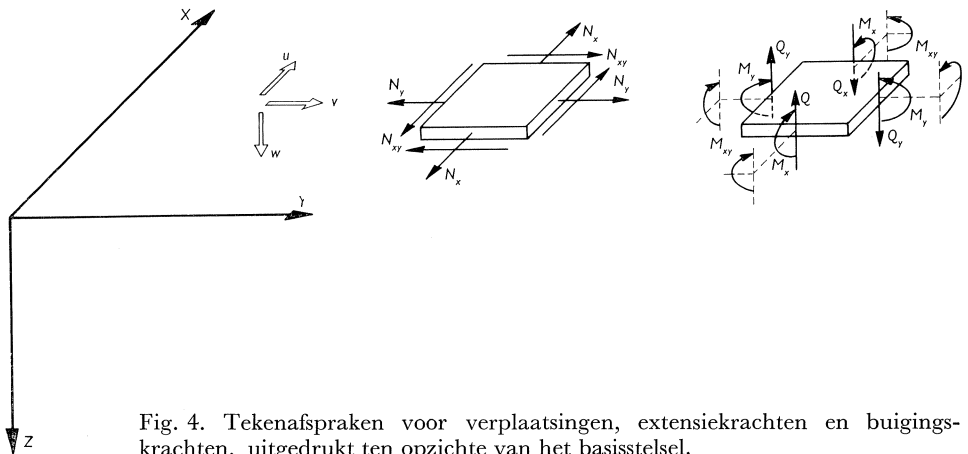


Fig. 4. Tekenafspraken voor verplaatsingen, extensiekrachten en buigingskrachten, uitgedrukt ten opzichte van het basisstelsel.

Voor het beschrijven van de verplaatsingen van de rand, en van de krachten waaraan de schaal door de omringende constructie onderworpen wordt, zal van een ander stelsel coördinaatrichtingen en van andere tekenafspraken gebruik worden gemaakt. Alleen de richting van de normaal op het schaal-middenvlak blijft ook voor de rand als coördinaatrichting gelden. Een tweede richting wordt gegeven door de raaklijn aan de omtrek van de schaal, en de derde coördinaatrichting staat loodrecht op de beide eerstgenoemde richtingen. Iedere grootte, zij het kracht of verplaatsing, kan ontbonden worden in de drie componenten g_1 , g_2 , g_3 volgens deze drie richtingen. Ten aanzien van de rotatie hoeft men voor iedere punt slechts de rotatiecomponent in het g_2 , g_3 -vlak op te geven: de andere twee rotatiecomponenten volgen uit het verloop van v_3 en v_2 langs de rand. Ten aanzien van het moment komt men tot dezelfde conclusie, zij het na een iets ingewikkelder argumentatie. Dit brengt met zich mee, dat bij de dwarskracht k_3 de afgeleide van het moment in het g_1 , g_3 -vlak gevoegd wordt (correctie van KIRCHHOFF).

De rotatie en het moment in het g_2 , g_3 -vlak worden opgevat als vierde verplaatsings- respectievelijk krachtcomponent; de hiervoor geldende tekenafpraak is door g_4 in fig. 5 aangegeven.

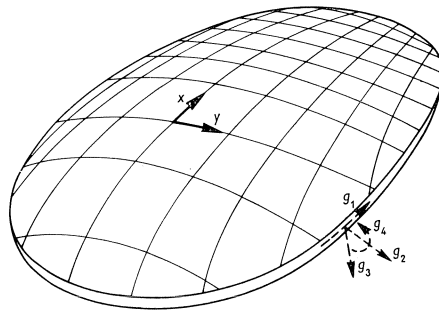


Fig. 5. De tekenafpraak voor de randgrootheden is altijd dezelfde, onafhankelijk van de oriëntatie ten opzichte van het basisstelsel van het oppervlak. Met g wordt hier zowel kracht (k) als verplaatsing (v) aangeduid; de afspraak geldt voor beide soorten grootheden.

De motieven voor de invoering van het randstelsel op de genoemde wijze zijn:

- 1^o men beperkt zich tot de noodzakelijke componenten (de overvloedige rotaties en momenten worden weggelaten);
- 2^o men zal bij de beschrijving van het verloop over de rand geen discontinuïteiten ontmoeten, die alleen het gevolg zouden zijn van een discontinuïteit in de tekenafpraak;
- 3^o door de afspraak van gelijk teken voor verplaatsings- en krachtgrootheden wordt bereikt, dat flexibiliteitsmatrix en stijfheidsmatrix symmetrisch zijn, zoals in de voorafgaande paragraaf is toegelicht. De symmetrie van de matrices betekent een belangrijke controle op de juistheid van de programma's, en de verdere manipulaties met de matrices worden erdoor vereenvoudigd.

Om verplaatsingsvectoren en krachtenvectoren met een eindig aantal elementen te kunnen construeren, moeten ook afspraken worden gemaakt inzake de specificatie van het verloop van krachten en verplaatsingen over de schaalrand met behulp van een eindig aantal parameters. Voor verschillende typen schaalconstructies worden hier verschillende regels toegepast. Men ziet enige voorbeelden in fig. 6. Ter toelichting is één van de beschouwde grootheden, de verplaatsing w volgens de normaal, aangegeven. In de volgende beschouwingen wordt beknoptheidshalve alleen over deze verplaatsing w gesproken en over de ermee corresponderende dwarskracht Q . Voor andere randgrootheden geldt echter in principe hetzelfde.

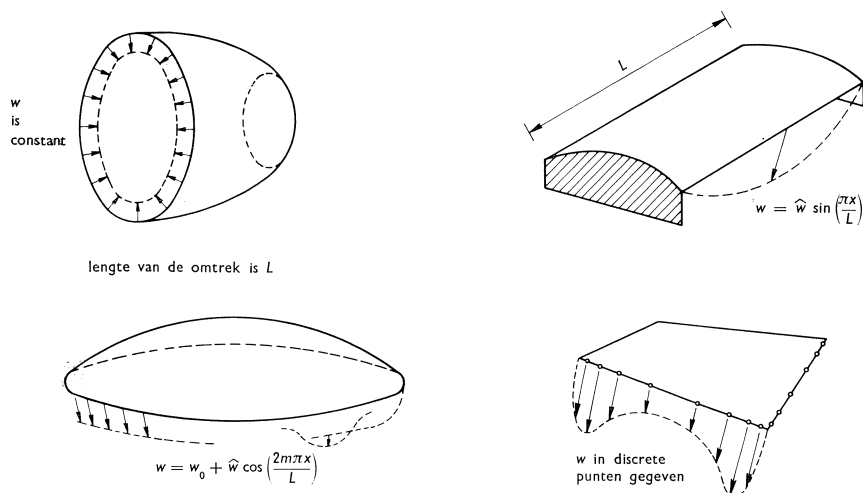


Fig. 6. Specificatie van het verloop van de randgrootheden door middel van een eindig aantal parameters.

Bij een omwentelingschaal die axiaalsymmetrisch belast is, zal de verplaatsing constant zijn langs een rand, die volgens een parallelcirkel verloopt. Deze constante waarde kan rechtstreeks als element in de verplaatsingsvector worden opgenomen. Het hiermee corresponderende element in de krachtenvector kan door middel van een arbeidsbeschouwing worden bepaald. De arbeid, door de dwarskracht Q op de rand verricht, is gelijk aan:

$$A_Q = \frac{1}{2}QLw = \frac{1}{2}k_3v_3$$

Men moet dus QL als element in de krachtenvector opnemen.

Bij schalen, die op twee eindschotten zijn opgelegd, zoals cilindrische tonschalen, kan automatisch aan de bij de schotten geldende randvoorwaarden worden voldaan door voor de uitbuigingsvorm een sinuslijn aan te nemen, die zijn nuldoorgangen heeft ter plaatse van de schotten. Om aan de randvoorwaarden van de overige randen te voldoen, is het in het algemeen nodig een combinatie van sinuslijnen toe te passen, onderling verschillend in het aantal

halve golflengten dat op de overspanning L is begrepen. De randverplaatsingen en randbelastingen zijn dan op te vatten als termen in een reeks van FOURIER. De situatie is meestal zó, dat het randvoorwaardeprobleem voor iedere Fourier-component (harmonische) afzonderlijk is op te lossen.

Als element van de verplaatsingsvector wordt thans \hat{w} , de topwaarde van de sinusvormig verloopende verplaatsing w gekozen. Laat de topwaarde van de dwarskracht (die hier ook de correctie van KIRCHHOFF bevat) gelijk aan \hat{Q} zijn. De dwarskracht verloopt volgens een sinuslijn evenredig met de doorbuiging. Voor de eerste harmonische is de halve golflengte gelijk aan de overspanning; de arbeid is dan als volgt te berekenen:

$$A_Q = \int_0^L \frac{1}{2} \hat{Q} \hat{w} \sin^2(\pi x/L) dx = \frac{1}{4} \hat{Q} L \hat{w} = \frac{1}{2} k_3 v_3$$

Wanneer de halve golflengte een geheel aantal malen op L begrepen is, vindt men dezelfde uitkomst:

$$A_Q = m \cdot \frac{1}{4} \hat{Q} (L/m) \hat{w} = \frac{1}{4} \hat{Q} L \hat{w} = \frac{1}{2} k_3 v_3$$

Hier dient dus $\frac{1}{2} \hat{Q} L$ als element in de krachtenvector te worden opgenomen.

De bolschaal op ringbalk en kolommen is een voorbeeld van een schaal, waarbij de behandelde typen verplaatsingscomponenten naast elkaar voorkomen. De verplaatsing heeft bij Fourierontwikkeling een axiaalsymmetrische, over de omtrek constante component. Daarnaast zijn ook cosinusvormig verdeelde componenten aanwezig. De eigenschappen van de ondersteuningsconstructie leiden ertoe, dat de verschillende componenten bij de oplossing van het randvoorwaardeprobleem gezamenlijk in beschouwing moeten worden genomen. Bij een over de omtrek constant gedachte verplaatsing van de ringbalk op kolommen zou immers een tegendrukverloop ontstaan dat niet gelijkmatig is; ter plaatse van de kolommen is de tegendruk aanmerkelijk groter, en over de tussengelegene ringbalkvelden geringer dan de gemiddelde waarde.

De arbeid bij axiaalsymmetrische verplaatsing bevat een factor L ; voor de overige Fouriercomponenten van de verplaatsing is de factor $\frac{1}{2}L$, zoals uit de voorafgaande voorbeelden blijkt. Men moet in de krachtenvector dus QL en $\frac{1}{2}\hat{Q}L$ opnemen als met w respectievelijk \hat{w} corresponderende krachtgrootheden.

Het laatste voorbeeld betreft een geval, waarbij de gekozen gedaante van de algemene oplossing niet bij voorbaat reeds het voldoen aan een deel van de randvoorwaarden verzekert. Het blijkt namelijk bij verschillende schaaltypen, waaronder de hyperbolische parabolöide met rechte randen, bezwaarlijk de algemene oplossing direct in een dergelijke gedaante te schrijven. Er kunnen in dit geval verschillende wegen bewandeld worden; in het volgende wordt slechts een der mogelijke oplossingsmethoden besproken.

Men neemt een aantal oplossingen van de schaalvergelijkingen, zodanig gekozen dat een lineaire combinatie van deze oplossingen een goede benadering van de einduitkomst zal kunnen leveren. Het verloop van de hierbij behorende

randgrootheden zal in het algemeen grillig zijn. Technieken, waarbij de voorgeschreven randkrachten of -verplaatsingen in een reeks worden ontwikkeld, zijn hier veel moeilijker toe te passen dan in de voorafgaande gevallen.

Bij de hier besproken methode worden de randvoorwaarden in een eindig aantal punten aangesloten. Als elementen van de verplaatsingsvector worden de verplaatsingscomponenten in de aansluitingspunten gekozen; hun totale aantal moet gelijk zijn aan het aantal vrije constanten in de combinatie van algemene oplossingen. Als elementen van de krachtenvector treden puntkrachten op, die in de plaats komen van de continu verdeelde randkrachten en wel wederom op zodanige wijze, dat $A = \frac{1}{2}\mathbf{k}'\mathbf{v}$ de juiste waarde van de door de randkrachten verrichte arbeid geeft.

Een goede keuze van de plaats der aansluitingspunten is belangrijk; de nauwkeurigheid van de verkregen oplossing is hiervan in hoge mate afhankelijk. Als het gekozen eindige aantal oplossingen de einduitkomst exact zou kunnen weergeven, zouden de aansluitingspunten willekeurig aangenomen kunnen worden. In het algemeen is dit echter niet het geval; als men ter controle van de randvoorwaarden de randgrootheden voor de schaal en voor de omringende constructie berekent, vertonen deze een over de rand variërende discrepantie. Bij de hiervoor besproken randvoorwaardeproblemen, die met Fourierontwikkeling kunnen worden behandeld, ligt in het proces zelf een garantie dat de fout aan een minimumvoorwaarde voldoet. Bij het huidige probleem moet de juiste ligging van de aansluitingspunten de nodige waarborg tegen een te grote fout geven. Men zou een vergelijking kunnen trekken met de behandeling van de numerieke integratie volgens GAUSS. Waar echter in dat geval een exacte verantwoording van de keuze van de deelpunten mogelijk is, moet men zich hier veeleer laten leiden door inzicht in het mechanisch probleem. De aansluitingspunten moeten dichter opeen genomen worden in gebieden, waar de oplossing een singulier gedrag vertoont, dus in de nabijheid van hoeken of van discontinuïteiten in de ondersteuning. Daarentegen moeten punten, waar de gekozen combinatie van algemene oplossingen toevallig reeds aan de randvoorwaarden voldoet, worden overgeslagen. Een grondige bestudering van het probleem zal hier aan de numerieke behandeling moeten voorafgaan.

5.4 Transformaties bij wijziging van de beschrijvingsregels

De afspraken betreffende assenstelsel, teken en specificatie moeten voor twee aan te sluiten constructiedelen dezelfde zijn, alvorens men tot het samenvoegen van stijfheidsmatrices en vasthoudkrachtenvectoren kan overgaan. Dit beginsel komt ook al bij de methode van CROSS naar voren: de momenten op de uiteinden van staven die bij een knooppunt samenkomen, moeten voor dezelfde draaizin positief worden gerekend. Bij schaalconstructies is het complex van mogelijke afspraken veel groter, en een wijziging van afspraak brengt een uitgebreide transformatie met zich, die weer met behulp van matrixnotatie dient te worden beschreven. Het is bij de samenstelling van het programma uit losse

eenheden onvermijdelijk, dat zulke transformaties nodig zijn. Bij het vervaardigen van de eenheden is het immers niet bekend, hoe de totale constructie er uit zal zien; de bedoeling is juist om de samenstellers van het hoofdprogramma hierin geheel vrij te laten. Voor ieder constructiedeel wordt in de bijbehorende programma-eenheid een voorlopige afspraak gemaakt; in het verbindende programma worden deze afspraken op eenzelfde voet gebracht door een definitieve keuze van de beschrijvingsregels voor de gehele constructie.

Stel, dat de grootheden, beschreven volgens de regels van een voorlopige afspraak, aangeduid worden met het romeinse cijfer I en dat men moet overgaan op grootheden II binnen het kader van de definitieve afspraak. De randverplaatsingen en -krachten worden in het eerste geval beschreven met vectoren $\mathbf{v}_I, \mathbf{k}_I$; precies dezelfde verplaatsingen en krachten worden in het tweede geval anders beschreven, en wel met vectoren $\mathbf{v}_{II}, \mathbf{k}_{II}$. Omdat het hier om precies dezelfde verplaatsingen en krachten gaat, die alleen op twee manieren worden weergegeven, zal de in beide gevallen verrichte arbeid identiek zijn.

$$A = \frac{1}{2} \mathbf{k}'_I \mathbf{v}_I = \frac{1}{2} \mathbf{k}'_{II} \mathbf{v}_{II}$$

Verondersteld wordt nu, dat men de transformatie kent waarmee bij gegeven verplaatsingsvector \mathbf{v}_{II} de vector \mathbf{v}_I af te leiden is.

Deze relatie (die in het algemeen gemakkelijk af te leiden is) wordt geschreven als een matrixvermenigvuldiging:

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{T} \mathbf{v}_{II}$$

De met een verplaatsingsvector \mathbf{v}_{II} corresponderende krachtenvector wordt bepaald door de eis, dat voor de arbeid de juiste waarde gevonden wordt. Hieraan voldoet:

$$\mathbf{k}_{II} = \mathbf{T}' \mathbf{k}_I$$

Dan is immers

$$\mathbf{k}'_{II} \mathbf{v}_{II} = \mathbf{k}'_I \mathbf{T} \mathbf{v}_{II}$$

en

$$\frac{1}{2} \mathbf{k}'_{II} \mathbf{v}_{II} = \frac{1}{2} \mathbf{k}'_I \mathbf{T} \mathbf{v}_{II} = \frac{1}{2} \mathbf{k}'_I \mathbf{v}_I = A$$

Het is thans mogelijk de stijfheidsmatrix \mathbf{S}_{II} te berekenen wanneer \mathbf{S}_I bekend is. De vraag is dan, bij gegeven verplaatsingsvector \mathbf{v}_{II} de krachtenvector \mathbf{k}_{II} te vinden. Dit geschiedt in drie stappen:

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{T} \mathbf{v}_{II}$$

$$\mathbf{k}_I = \mathbf{S}_I \mathbf{v}_I = \mathbf{S}_I \mathbf{T} \mathbf{v}_{II}$$

$$\mathbf{k}_{II} = \mathbf{T}' \mathbf{k}_I = \mathbf{T}' \mathbf{S}_I \mathbf{T} \mathbf{v}_{II}$$

derhalve is:

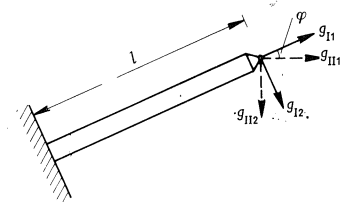
$$\mathbf{S}_{II} = \mathbf{T}' \mathbf{S}_I \mathbf{T}$$

Bij gebruikmaking van de verplaatsingsmethode heeft men naast de transfor-

matie van de stijfheidsmatrix ook te maken met de transformatie van de vasthoudkrachtenvector en van de loslaat-verplaatsingsvector. De eerstgenoemde vector wordt in systeem I (van de schaal) gevonden en moet naar systeem II (van de gehele constructie) worden overgebracht; voor de tweede vector is dit juist omgekeerd. De reeds gevonden transformatieregels zijn hier van toepassing:

$$\mathbf{k}_{IIv} = \mathbf{T}'\mathbf{k}_{Iv}; \quad v_{II} = \mathbf{T}\mathbf{v}_{II}$$

Als voorbeeld beschouwen we een staaf die aan een zijde is ingeklemd en aan de andere zijde via een scharnier aan de overige constructie is verbonden. (Het moment is daar nul, en de rotatie wordt niet in de beschouwing betrokken). De staafas maakt een hoek φ met de horizontaal. De overwogen transformatie is een kanteling van de coördinaatassen.



$$\mathbf{v}_I = \begin{pmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{k}_I = \begin{pmatrix} k_{I1} \\ k_{I2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_{II} = \begin{pmatrix} v_{II1} \\ v_{II2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{k}_{II} = \begin{pmatrix} k_{II1} \\ k_{II2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_I = \mathbf{T}\mathbf{v}_{II}; \quad \mathbf{k}_{II} = \mathbf{T}'\mathbf{k}_I$$

Als men ter afkorting schrijft: $s_1 = EF/l$; $s_2 = 3EI/l^3$ dan is:

$$\mathbf{S}_I = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_{II} = \mathbf{T}'\mathbf{S}_I\mathbf{T} = \begin{pmatrix} s_1 \cos^2 \varphi + s_2 \sin^2 \varphi & (s_2 - s_1) \sin \varphi \cos \varphi \\ (s_2 - s_1) \sin \varphi \cos \varphi & s_1 \sin^2 \varphi + s_2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

Dit voorbeeld kan tevens het feit illustreren, dat een wiskundig eenvoudige en schijnbaar onschuldige transformatie toch gevaren in zich kan bergen. De stijfheid van een staaf is in de richting van zijn as meestal veel groter dan in de richting loodrecht daarop. In de elementen van \mathbf{S}_{II} worden dus termen van zeer ongelijke grootte opgeteld; de verhouding $s_1/s_2 = l^2/3i^2 = 1/3\lambda^2$. Bij de in de praktijk gebruikelijke staafafmetingen ($55 < \lambda < 170$) zal deze verhouding van de grootte-orde 10^3 à 10^4 zijn. Bij schaalconstructies kan de verhouding tussen termen van de stijfheidsmatrix om soortgelijke redenen nog veel groter uitvallen. Het gevaar bestaat dan, dat de rekenmachine informatie over een stijfheidsaandeel (hier: de buigingsweerstand) kwijtraakt, als het aantal significante cijfers bij de berekening niet voldoende is. Het hangt van de verdere constructie af, of deze informatie eventueel gemist kan worden. In dit voorbeeld gaat het om de vraag, of het knooppunt al dan niet door andere staven zodanig is vastgelegd, dat verplaatsingen zonder normaalkrachten onmogelijk zijn. Opnieuw is dus duidelijk, dat een technische begeleiding van de programmering onmisbaar is.

6 Slotbeschouwing

Terugblikkend op de wijze waarop de programmabibliotheek tot stand is gekomen, kan men stellen dat de ontwikkeling gebaseerd is op het verenigen van drie gereed liggende mogelijkheden. Dit zijn: het gebruik van de gepubliceerde rekenschema's voor schaaldaken, het benutten van de faciliteiten voor elektronisch rekenen aan de Technische Hogeschool, en de toepassing van matrixmethoden in de mechanica. Voor alle faciliteiten, die haar zijn verleend, en voor al het studiemateriaal, dat tot haar beschikking was, is de groep Toegepaste Wiskunde zeer erkentelijk. De volgende literatuurlijst bevat de vermelding van de bronnen, waaruit kon worden geput.

De combinatie van de genoemde mogelijkheden bij het tot stand brengen van de programmabibliotheek van het Stevin-laboratorium is het werk geweest van vele medewerkers; met name zij hier het aandeel vermeld van Ir. H. J. A. de Vrind, Th. W. G. Duin en R. Soerjadi, die met het geschikt maken van rekenschema's voor programmering, het ontwerp van de structuur van de programma-eenheden en het uitwerken van de matrixberekening van schaaldaken belast zijn geweest.

Schaaldaken gelden in de civiele techniek als de constructies, die het moeilijkst te berekenen zijn. Daargelaten of dit waar is, moet toch in ieder geval geconstateerd worden, dat de hier toegepaste mogelijkheden zeker niet tot de berekening van schaalconstructies beperkt behoren te blijven. Het is steller dezes bekend, dat vele civiele technici in Nederland reeds een open oog hebben voor de perspectieven, die het elektronisch rekenen biedt. Het is te hopen, dat in dit verband ook de toepassing van matrixmethoden in de mechanica meer bekendheid zal krijgen. Voor het benutten van de hier liggende mogelijkheden bestaat ook in de kring van civiele technici ruime belangstelling, en is tevens actieve deelname aan de ontwikkeling noodzakelijk.

7 Literatuur

1. —, De berekening van de spanningsverdeling in cirkelcilindrische schalen volgens de DKJ-methode met behulp van een rekenschema. IBC-mededelingen april 1956.
2. BOUMA, Prof. Ir. A. L. en H. VAN KOTEN, De berekening van cirkelcilindrische schalen, waarbij de randvoorwaarden langs de rechte randen in rekening worden gebracht. Instituut TNO-IBBC, rapport BI-58-23.
3. BLAAUWENDRAAD, Ir. J., Cirkelcilindrische schaal volgens een beschrijvende voorgespannen. Stevin-laboratorium, rapport 8-62-4-cs 2.
4. BOSSCHAART, Ir. J. W., Cirkelcilindrische schaal volgens een beschrijvende voorgespannen. Stevin-laboratorium, rapport 8-63-3-cs 3.
5. BOUMA, Prof. Ir. A. L. en H. VAN KOTEN, De berekening van cirkelcilindrische schalen, waarbij de randvoorwaarden aan de gebogen randen in rekening worden gebracht. Instituut TNO-IBBC, rapport BI-58-4.
6. —, Randstoringen bij axiaalsymmetrisch belaste omwentelingsschalen. IBC-mededelingen januari 1958.

7. BOUMA, Prof. Ir. A. L., Some applications of the bending theory regarding doubly curved shells. Proceedings of the IUTAM-symposium on the theory of thin elastic shells, Delft 1960.
8. KOTEN, H. VAN, De berekening van elliptische en hyperbolische paraboloiden schalen, waarvan de randen evenwijdig zijn met de hoofdparabolen. Instituut TNO-IBBC, rapport BI-59-26.
9. LOOF, Ir. H. W. en TH. W. G. DUIN, Het splitsen van de benaderde oplossing van de algemene differentiaalvergelijking van hyppar- en elparschalen in delen met verschillende fysische betekenis. Stevin-laboratorium, rapport 8-62-3-hes 1.
10. LOOF, Ir. H. W., Het oplossen van de karakteristieke vergelijking voor orthogonale hypparschalen. Stevin-laboratorium, rapport 2-58-5-ht 2.
11. LOOF, Ir. H. W., Eenvoudige formules voor de buigingsstoringsen in hypparschalen, die volgens beschrijvenden zijn begrensd. Stevin-laboratorium, rapport 8-61-3-hr 1.
12. SOERJADI, R., Randstoringsen in een bolschaal ondersteund door randbalk en kolommen ten gevolge van het eigen gewicht. Stevin-laboratorium, rapport 8-62-5-bs 10.
13. WOLBERS, Ir. D. H., Een nieuwe rekenautomaat voor de Technische Hogeschool. TH-mededelingen jaargang 8 (1960/61) no. 4.
14. ALGOL-COMMITTEE, Revised report on the algorithmic language ALGOL 60.
15. FOLKERS, Ir. J. S. en anderen, Handleiding voor het gebruik van ALGOL 60 voor de TR 4.
16. McMINN, S. J., Matrices in structural analysis.
17. BESSELING, Prof. Dr. Ir. J. F., Handleiding voor het numeriek spannings- en trillings-onderzoek.
18. ZURMÜHL, R., Matrizen, eine Darstellung für Ingenieure.
19. KOSTEN, Prof. Dr. Ir. L., Numerieke analyse. Hoofdstuk XII in het Handboek der wis-kunde, onder redactie van Prof. Dr. L. KUIPERS en Prof. Dr. R. TIMMAN.