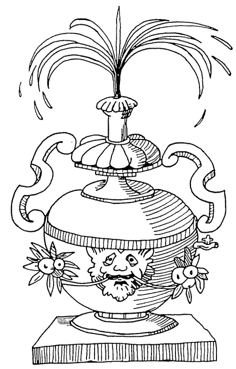
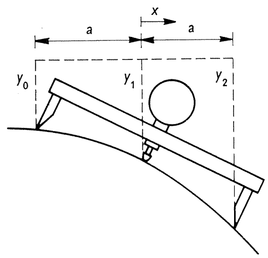
De Heronsfontein

3.



Bij experimenteel spanningsonderzoek maakt men gebruik van krommingsmeters. Deze instrumenten stellen de onderzoeker in staat, de tweede afgeleide van de doorbuiging van een ligger of plaat te bepalen, beter gezegd te benaderen, uit in werkelijkheid gemeten differentie-uitdrukkingen. Het is interessant om na te gaan, hoe deze wiskundige begrippen in het instrument mechanisch vertaald worden.

Een vast plateau rust met twee mesopleggingen op de te onderzoeken constructie in de punten 0 en 2. Als deze punten een zakking y_0 respectievelijk y_2 ten opzichte van de onbelaste vlakke aanvangstoestand ondergaan, zakt het plateau mee; het midden van het plateau verplaatst dan over de afstand $^1/_2(y_0+y_2)$. Opgemerkt zij, dat deze verplaatsingen, klein als ze zijn, mogen worden geacht loodrecht te staan op het ongekromde uitgangsvlak van de begintoestand. In het midden is een meetklokje bevestigd, waarvan de stift de verplaatsing y_1 volgt van een punt 1 van de constructie, halverwege 0 en 2 gelegen. Omdat het huis van het meetklokje met het plateau meebeweegt, is de aflezing f uiteraard niet y_1, maar:



$$f = y_1 - {}^1/_2(y_0+y_2) = -{}^1/_2(y_0-2y_1+y_2)$$

Tussen de laatste haakjes staat hier de tweede differentie: $(y_2-y_1)-(y_1-y_0)$. Welk verband heeft deze uitdrukking met het tweede differentiaalquotiënt, dat voorkomt in de formule van de kromming? Om dit verband te vinden kan men de formule van Taylor gebruiken, waarbij de grootheid y als functie van x wordt geschreven in de vorm van een reeksontwikkeling rond het punt 1 als oorsprong, dus:

$$y = y_1 + \frac{y_1'}{1!}x + \frac{y_1''}{2!}x^2 + \frac{y_1'''}{3!}x^3 + \frac{y_1''''}{4!}x^4 + \ldots$$

Als de basislengte van de krommingsmeter $2a$ is liggen de punten 0 en 2 op

$x = -a$ en $x = +a$; door substitutie vindt men de zakkingen y_0 en y_2 uitgedrukt in de reeks, met als eerste term y_1 en verder de afgeleiden in punt 1. Door deze waarden op hun beurt in te vullen in de formule voor de tweede differentie vindt men:

$$(y_0 - 2y_1 + y_2) = y_1'' a^2 + {}^1/_{12} y_1'''' a^4 + \ldots$$

waaruit tenslotte wordt verkregen:

$$y_1'' = \frac{1}{a^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - {}^1/_{12} y_1'''' a^2 + \ldots \qquad (1)$$

Bij benadering is dus:

$$y_1'' = -\frac{2f}{a^2}$$

Deze betrekking wordt bij de vorenbedoelde krommingsmeter gebruikt om de tweede afgeleide te bepalen; door het afbreken van de reeks wordt dan een fout gemaakt ter grootte van de som der overige termen, bevattende de vierde en hogere afgeleiden. Aan de hand van de eerste verwaarloosde term, die evenredig is met de vierde afgeleide, kan men van deze fout een schatting maken. In de meestvoorkomende praktische gevallen is de fout niet groter dan een duizendste van de gemeten waarde, en aldus klein ten opzichte van de inherente fout als gevolg van de afleesonnauwkeurigheid.

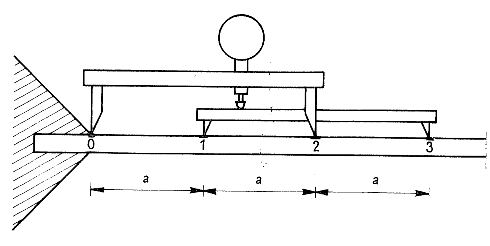
Een nadeel van de hier beschreven meter is dat de kromming niet dichter bij de rand van de constructie kan worden gemeten dan op de afstand a. Dit bezwaar is vrij ernstig indien de rand ingeklemd is: het buigend moment is aldaar extreem en interesseert ons daarom het meest.

Om bedoeld bezwaar op te heffen is door Ir. H. M. DE HAAS (Stevinlaboratorium) een periferale krommingsmeter ontworpen, gebaseerd op een vierpuntsdifferentieformule:

$$y_0'' = \frac{1}{a^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + {}^{11}/_{12} y_0'''' a^2 + \ldots \qquad (2)$$

De afleiding van deze formule is geheel analoog aan die bij de eenvoudige krommingsmeter, maar zal hier niet worden uitgeschreven. Essentieel en interessanter is, te weten hoe de term tussen haakjes in formule (2) in het instrument tot uitdrukking wordt gebracht.

Er zijn nu twee plateaus, waarvan het eerste in de punten 0 en 2 op de constructie rust, en het tweede in de punten 1 en 3. Het huis van het verplaatsingsmetertje is bevestigd aan het eerste plateau op een afstand ${}^2/_3 a$ van punt 2; de meetstift registreert thans de relatieve verplaatsing



van een punt van het tweede plateau, dat op een afstand $^1/_3 a$ van punt 1 ligt.

De zakking van het huis is nu $^1/_3 y_0 + ^2/_3 y_2$, de zakking van de meetstiftpunt is $^5/_6 y_1 + ^1/_6 y_3$. Het metertje M registreert derhalve de verplaatsing:

$$f = -^1/_6 (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3)$$

zodat bij benadering uit (2) volgt:

$$y_0'' = -\frac{6f}{a^2}$$

De voordelen van deze krommingsmeter gaan op twee manieren gepaard met nadelen: de fout door het afbreken van de reeks is hier groter (zij het nog niet van veel praktisch belang) en de afleesfout van het metertje komt hier sterker in het eindresultaat tot uiting. Ter compensatie hiervan wordt bij het vervaardigen en het gebruik van de krommingsmeter een grote precisie nagestreefd.

Onderstaande foto's beelden het metertje af. De plateaus hebben een extra voetje om de stabiliteit van de opstelling te verzekeren. Als verplaatsingsopnemer wordt de Philips GM 5537 gebruikt, waarbij verplaatsingen van 0,1 micron nog meetbare veranderingen in een elektrische inductiekring teweeg brengen. De losse pen koppelt de plateaus zolang de meter nog niet definitief is opgesteld.

H. W. Loof