

TOEPASSING VAN DE MOIRÉ-METHODE TER BEPALING VAN DE HOOFDSPANNINGS- RICHTINGEN IN PLATEN

U.D.C. 624.042 : 624.044 : 624.073

Na een verklarende inleiding wordt de theoretische grondslag besproken waarop een methode kan berusten om uit moiré-figures langs grafische weg rechtstreeks de richtingen van de hoofdspanningen in elk gewenst punt van een belaste plaat te bepalen. Met de aldus verkregen punten zijn verder de hoofdspanningstrajectoriën eenvoudig te tekenen.

Inleiding

De moiré-methode maakt het mogelijk om met betrekkelijk weinig hulpmiddelen momenten in platen te bepalen [1]. De foto's die daarbij worden verkregen zijn te beschouwen als hoogtelijnenkaarten van de eerste afgeleiden $\partial w/\partial x$ en $\partial w/\partial y$ van de doorbuigingen w van de plaat. Hieruit wordt door het grafisch differentiëren de grootte van de krommingen $\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^2 w/\partial y^2$ en $\partial^2 w/\partial x \partial y$ van de plaat bepaald, waaruit – met behulp van de formules uit de plaattheorie – de momenten per eenheid van lengte volgen.

Doordat gebruik wordt gemaakt van modellen en eenvoudige modelregels is deze methode geschikt voor platen van willekeurige vorm, materiaal en belasting, dus ook in gevallen waar een theoretische benadering van de momentenverdeling ondoenlijk is.

De moiré-foto's bezitten echter ook eigenschappen waardoor het mogelijk is om *zonder differentiatie* de richtingen van de hoofdkrommingen, en dus ook van de hoofdmomenten en hoofdspanningen te vinden. De tangent resp. de normaal op de moirélijnen in een willekeurig punt van de plaat geven namelijk de verhouding aan van $\partial^2 w/\partial x \partial y$ en $\partial^2 w/\partial x^2$, resp. $\partial^2 w/\partial x \partial y$ en $\partial^2 w/\partial y^2$, wat voldoende is voor het tekenen van de cirkel van Mohr, indien men niet meer dan de hoofdspanningsrichtingen wil weten. Dit facet van de moiré-methode wordt in dit artikel behandeld, leidende tot een grafische werkwijze, waarmee snel – hetzij in enkele punten, hetzij over het gehele vlak van de plaat – de hoofdspanningsrichtingen kunnen worden bepaald [2].

De aldus te construeren trajectoriën van de hoofdspanningsrichtingen zijn b.v. van belang voor het leggen van minimum wapening in gewapend betonplaten.

Theoretische grondslag

Wanneer bij een vlakke spanningstoestand ($\sigma_z = 0$) de spanningen σ_x , σ_y en τ_{xy} in twee onderling loodrechte richtingen x en y bekend zijn, dan kunnen de

hoofdspanningsrichtingen φ en $\varphi+90^\circ$ worden bepaald aan de hand van de formule:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \dots \dots \dots (1)$$

Dit kan ook grafisch gebeuren m.b.v. de cirkel van MOHR, zoals in fig. 1 is aangegeven. Punt R staat bekend als „richtingspunt”, waaruit de hoofdspanningsrichtingen worden uitgezet.

$$\left. \begin{array}{l} \angle \text{PRS} = \varphi \\ \angle \text{PRT} = \varphi + 90^\circ \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

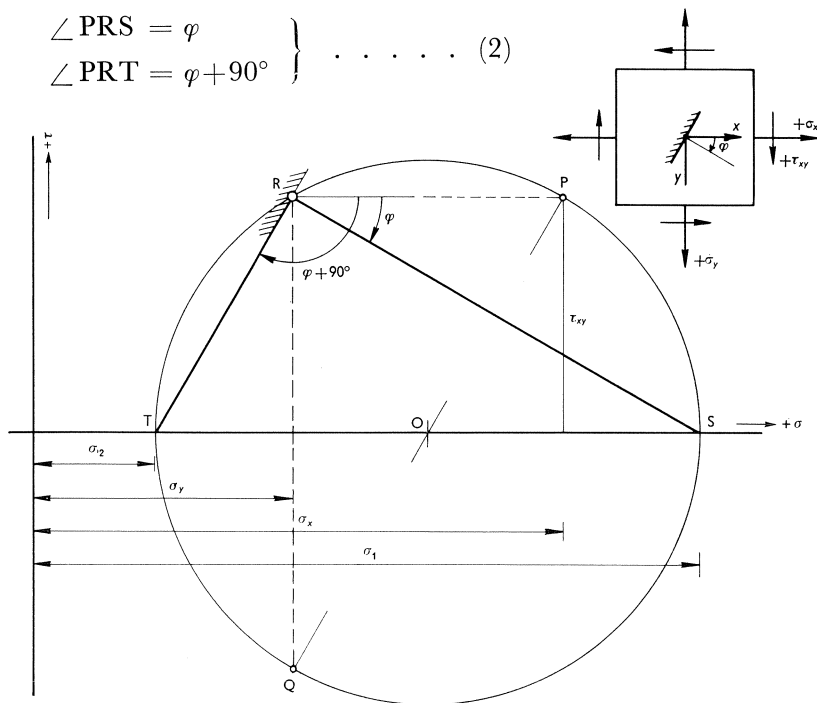


Fig. 1. Bepaling van de hoofdspanningsrichtingen φ en $\varphi+90^\circ$ m.b.v. de cirkel van Mohr, bij vlakke spanningstoestand ($\sigma_z = 0$).

Notaties

- a* afstand op de X-foto van twee opeenvolgende moiré-lijnen in *x*-richting.
- b* afstand op de Y-foto van twee opeenvolgende moiré-lijnen in *y*-richting.
- c* afstand op de X-foto van twee opeenvolgende moiré-lijnen in *y*-richting, resp. afstand op de Y-foto van twee opeenvolgende moiré-lijnen in *x*-richting.
- d* dikte van de plaat.
- D* constante.
- K* = $\frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$ = stijfheidsfactor van de plaat.
- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ spanningscomponenten.
- m_x, m_y, m_{xy} momentencomponenten.
- $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ krommingscomponenten.
- w* doorbuiging van de plaat.
- $\varphi, \varphi+90^\circ$ hoeken welke de hoofdspanningsrichtingen maken met de *x*-as.

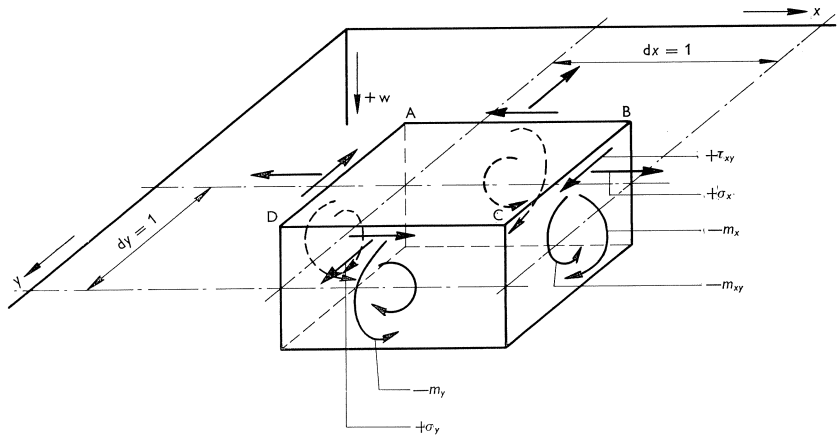


Fig. 2. Inwendige momenten in de plaat en de spanningen in het vlakje ABCD wanneer de krommingscomponenten $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ en $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ positief zijn.

Voor de momenten m_x , m_y en m_{xy} op een plaalementje $dx = 1$, $dy = 1$ (zie fig. 2) geldt volgens de plaattheorie:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ m_y &= -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ m_{xy} &= -K(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

De spanningen in het oppervlakte-elementje (= vlakje ABCD in fig. 2) aan de bovenzijde van de plaat zijn:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{6}{d^2} \cdot m_x \\ \sigma_y &= -\frac{6}{d^2} \cdot m_y \\ \tau_{xy} &= -\frac{6}{d^2} \cdot m_{xy} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

De hoofdspansingsrichtingen in elk willekeurig punt van de plaat vallen samen met de richtingen van de hoofdmomenten, resp. van de hoofdkrommingen in dat punt. Dit is eenvoudig aan te tonen aan de hand van de voorwaarde dat er in het vlak waarop een hoofdspansing werkt geen schuifspanningen zijn:

$$\tau_\varphi = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Dan geven de vergelijkingen (3), (4) en (5):

$$(m_{xy})_{\varphi} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\varphi} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

Bovendien volgt uit de vergelijkingen (1) en (4):

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2(-m_{xy})}{(-m_y) - (-m_x)} = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y} \dots \dots \dots (7)$$

en uit de vergelijkingen (3) en (7):

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \dots \dots \dots (8)$$

Zoals uit de vergelijkingen (1), (7) en (8) blijkt, kan men voor het grafisch bepalen van φ – i.p.v. de spanningscomponenten σ_x , σ_y en τ_{xy} – gebruik maken van de momenten m_x , m_y en m_{xy} , of van de krommingscomponenten $\partial^2 w / \partial x^2$, $\partial^2 w / \partial y^2$ en $\partial^2 w / \partial x \partial y$ (vergelijk fig. 1 en 3).

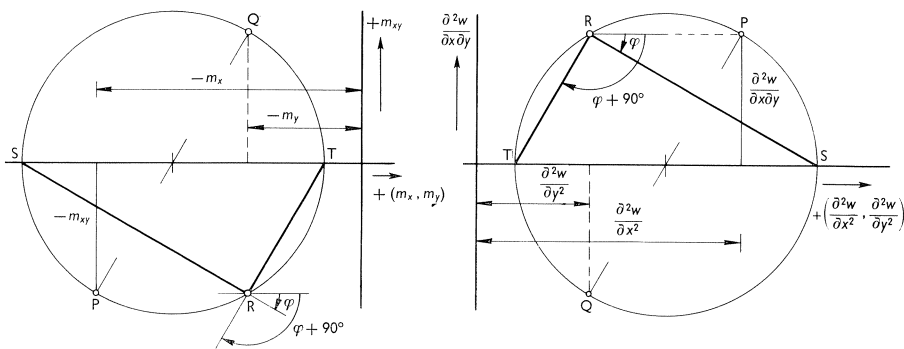


Fig. 3. a. hoofdmomenten-richtingen φ en $\varphi + 90^\circ$
 b. hoofdkrommingsrichtingen φ en $\varphi + 90^\circ$.

Daar de krommingscomponenten $\partial^2 w / \partial x^2$, $\partial^2 w / \partial y^2$ en $\partial^2 w / \partial x \partial y$ direct uit de moiré-foto's worden afgeleid, ligt het voor de hand deze toe te passen voor het tekenen van de cirkel van MOHR.

Hiertoe pleit ook – en in het bijzonder – de omstandigheid, dat men voor het bepalen van φ de grootte van de krommingscomponenten niet nodig heeft, en men volstaan kan met de verhoudingen:

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} \text{ en } \operatorname{tg} \alpha_2' = - \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \dots \dots \dots (9)$$

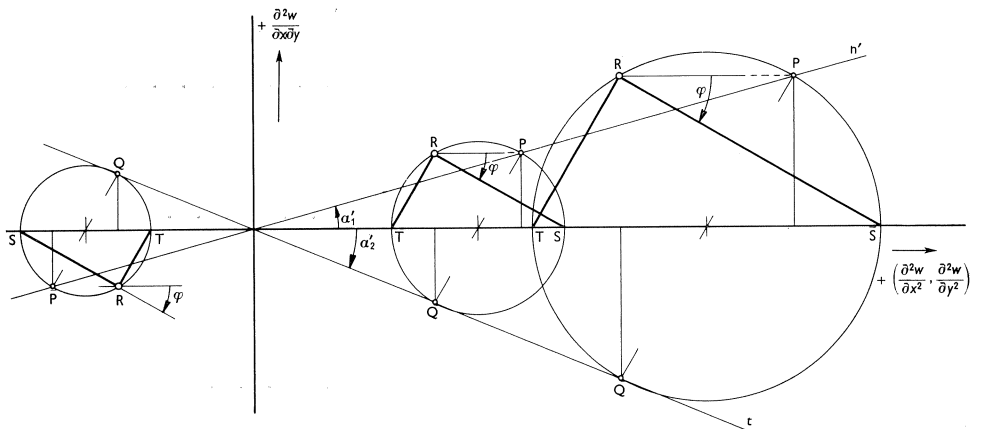


Fig. 4. Cirkels van Mohr uit de lijnen n' en t' bij constante α_1' en α_2' . De grootte van φ is slechts afhankelijk van de verhouding van de krommingscomponenten.

zoals in fig. 4 is aangetoond. Kiest men voor $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ een willekeurige waarde, dan vindt men op de lijnen n' en t' (die bepaald zijn door de hoeken α_1' en α_2') aan weerszijden en op gelijke afstand van de x -as de punten P en Q, waaruit de bij de gekozen $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ behorende cirkel van MOHR kan worden getekend. In elke op deze wijze geconstrueerde cirkel vindt men dezelfde φ .

Hetzelfde kan men bereiken uitgaande van de lijnen n en t in fig. 5. Deze lijnen zijn het spiegelbeeld van de lijnen n' en t' uit fig. 4 om de x -as. Men dient zich echter te realiseren dat nu het richtingspunt R ligt op de lijn t . In plaats van de punten P en Q vindt men op deze wijze in de cirkel van MOHR resp. de punten P' en R.

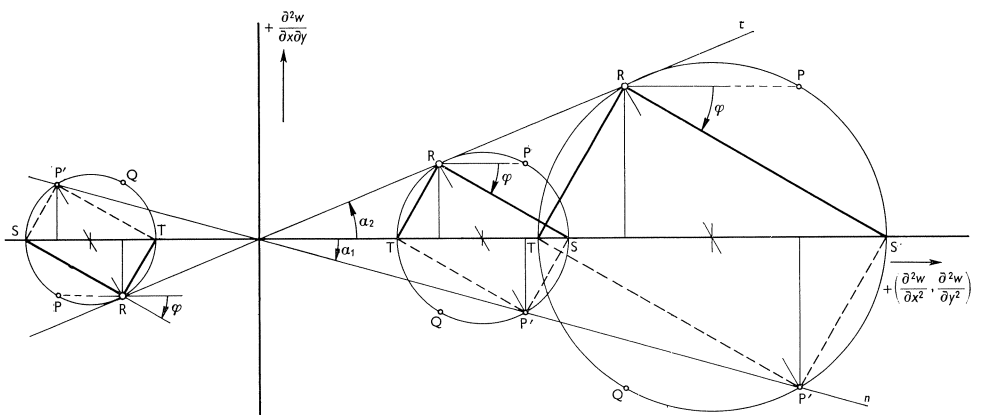


Fig. 5. Cirkels van Mohr uit de lijnen n en t . De lijnen n en t zijn spiegelbeeld om de horizontale as van de lijnen n' en t' in fig. 4.

De constructie in fig. 5 is in dit geval waar men gebruik maakt van de moiré-foto's te prefereren, omdat de lijnen n en t grafisch op een eenvoudige wijze uit het moiré-beeld kunnen worden overgenomen.

Indien men in een punt van de plaat (punt A in fig. 6) in de richting $+x$ en $-y$ uitzet de assen $+(\partial^2 w/\partial x^2, \partial^2 w/\partial y^2)$ resp. $+\partial^2 w/\partial x\partial y$, waarop de cirkel van MOHR zal worden getekend, dan is:

$n =$ de normaal op de moirélijn van de X-foto in dat punt, en

$t =$ de tangent aan de moirélijn van de Y-foto in dat zelfde punt.

Immers, de krommingscomponenten $\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^2 w/\partial y^2$ en $\partial^2 w/\partial x\partial y$ zijn omgekeerd evenredig met de afstanden a , b en c ter plaatse:

$$a = \frac{D}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}; \quad b = \frac{D}{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}; \quad c = \frac{D}{\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}} \quad \dots \dots \dots (10)$$

(D is een constante die hier niet ter zake doet.)

Uit (7) en (8) volgt:

$$\text{tg } \alpha_1 = -\frac{a}{c} \quad \text{tg } \alpha_2 = \frac{b}{c} \quad \dots \dots \dots (11)$$

Het bovenstaande is afgeleid voor het geval dat alle drie krommingscomponenten ($\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^2 w/\partial y^2$ en $\partial^2 w/\partial x\partial y$) positief zijn. Het is echter algemeen geldig. Men dient er slechts rekening mee te houden dat de punten R en P' zich altijd aan de tegenovergestelde zijden van de x -as (en op even grote afstand daarvan) bevinden.

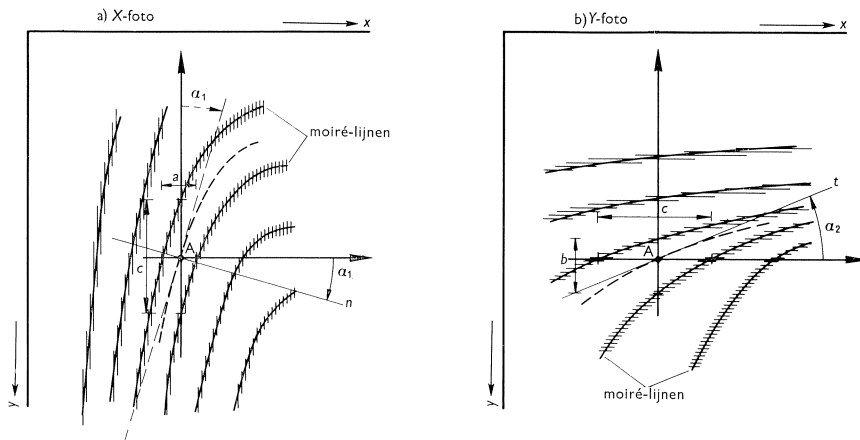


Fig. 6. Constructie van de lijnen n en t uit de moiré-foto's.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \text{ en } \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \text{ zijn positief} \right)$$

Praktische toepassing

Indien men in meer punten van een plaat de hoofdspanningsrichtingen wil weten, of de hoofdspanningstrajectoriën over de gehele plaat wil tekenen, verdient het aanbeveling als volgt te werk te gaan.

De moirélijnen van de X -foto en van de Y -foto tekent men over elkaar op transparantpapier (zie fig. 7 en 8). Om vergissingen te voorkomen is het goed elke foto b.v. in een afzonderlijke kleur over te tekenen.

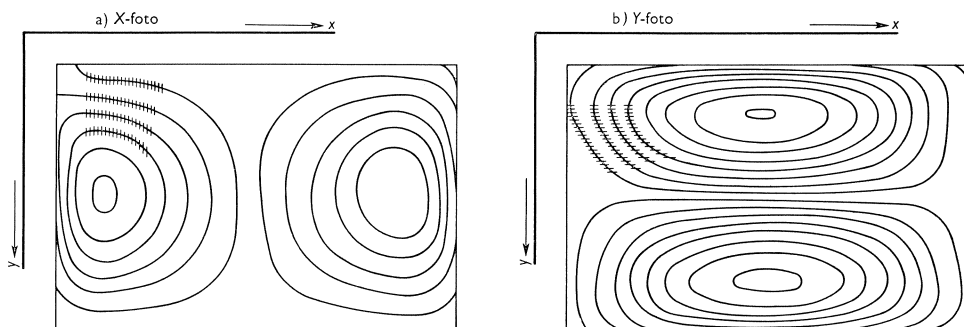


Fig. 7. Schematisch voorgestelde moiré-foto's van een rechthoekige, aan vier zijden ingeklemde plaat, onder gelijkmatig verdeelde belasting.

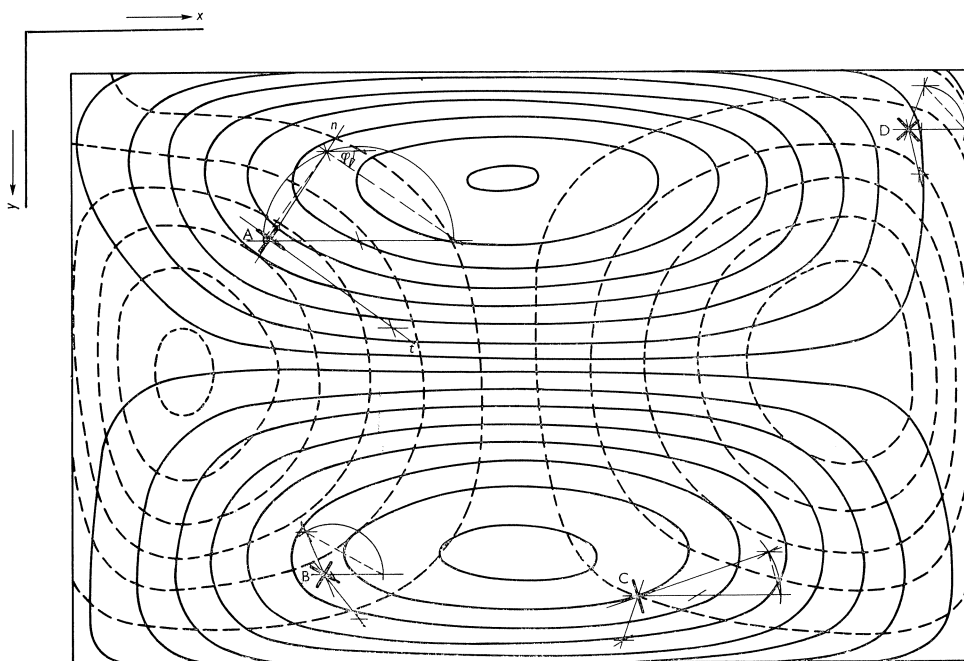


Fig. 8. Moiré-foto's (zie fig. 7) over elkaar gelegd. Constructie van de hoofdspanningsrichtingen in punten A, B, C en D m.b.v. de cirkel van Mohr.

Hierop legt men vervolgens nog een vel transparantpapier waarop de eigenlijke constructie van de hoofdspanningsrichtingen wordt uitgevoerd.

Om het tekenen van assenkruisen en het meten van afstanden van R en P' tot de x -as te vermijden, kan men onder de beide vellen nog een vel millimeterpapier leggen.

De constructie verloopt als volgt (zie punten A, B, C en D in fig. 8):

1. Geef het punt aan waarin de hoofdspanningsrichtingen zullen worden bepaald.
2. Trek in dat punt de normaal ($= n$) op de moirélijn van de X -foto.
3. Trek in datzelfde punt de raaklijn ($= t$) aan de moirélijn van de Y -foto.
4. Kies op een willekeurige afstand van de x -as punt R op de raaklijn t ; punt P' bevindt zich dan op even grote afstand aan de andere zijde van de x -as, op de lijn n . (Hier komt het onderliggende millimeterpapier zeer te pas.).
5. Snijpunt van de x -as en de rechte $\overline{RP'}$ is het middelpunt van de cirkel van MOHR. Bepaal m.b.v. een passer punt S of T.
6. \overline{RS} en \overline{ST} zijn twee loodrecht op elkaar staande hoofdspanningsrichtingen. Breng die over op het betreffende punt, en veeg de rest van de (met potlood getekende) constructie weg.

Deze bewerking herhaalt men in ieder willekeurig punt van de plaat.

Het maakt ook geen verschil of men punt R dan wel punt P' kiest als richtingspunt, omdat RS en TP' resp. RT en SP' aan elkaar evenwijdig zijn.

Opmerkingen

Aangezien de afstand van de punten R en P' willekeurig gekozen wordt, is deze methode wel geschikt om de richting van de hoofdkrommingen snel te bepalen, doch niet om de grootte van de krommingen te vinden. Aangezien echter wel alle verhoudingen van de krommingen uit de Mohr-figuur volgen, is het desgewenst mogelijk om slechts bijvoorbeeld de grootte van $\partial^2 w / \partial x^2$ door differentiëren te bepalen, en alle overige grootheden – dus ook de hoofdkrommingen resp. hoofdspanningen – m.b.v. de cirkel van MOHR af te leiden. Een praktische werkwijze wordt hier overigens niet verder uitgezocht.

In punten waar $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ zijn de hoofdspanningsrichtingen gelijk aan de richtingen der moiré-lijnen. In die punten vallen de moiré-lijnen samen met resp. x - en y -as.

Met de hier beschreven methode kan in een groot aantal punten de richting van de hoofdspanningen geconstrueerd worden. Hun verloop is op overzichtte-

lijke wijze uit te beelden door het tekenen van de hoofdspansingstrajectoriën (zie fig. 9). De in een groot aantal punten gemarkeerde hoofdspansingsrichtingen zijn immers de raaklijnen aan de bedoelde trajectoriën.

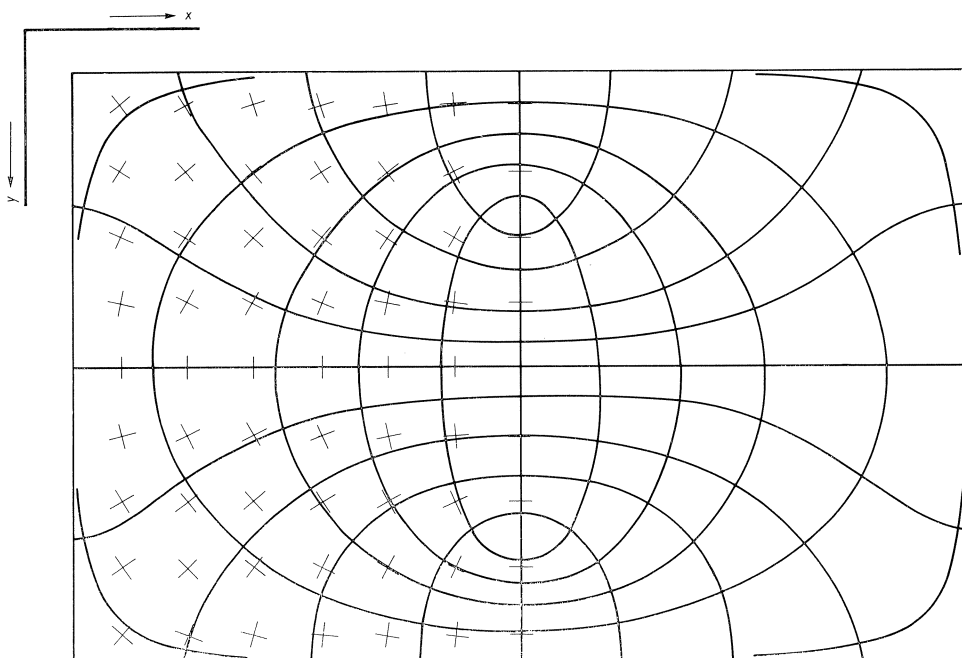


Fig. 9. Trajectoriën van de hoofdspansingsrichtingen bepaald m.b.v. de moiré-methode en de cirkel van Mohr (zie moiré-foto's in fig. 7), en ingetekend in het aldus verkregen met kruisjes bezette plaatvlak.

Literatuur

1. Ir. F. K. LIGTENBERG, Over een methode, om door een eenvoudig experiment de momenten in stijve platen te bepalen. *De Ingenieur* 1952, nr. 9.
2. Ir. M. DRAGOSAVIĆ, Toepassing van de moiré-methode ter bepaling van de hoofdspansingsrichtingen in platen. Rapport nr. B1-64-18 van het T.N.O.-I.B.B.C (1964), (= herschreven versie van het rapport van het Laboratorium voor experimenteel spanningsonderzoek der T.H. Delft (1956)).