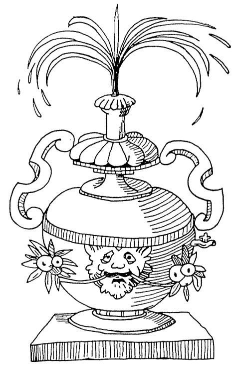
De Heronsfontein

4.



In de theorie betreffende buigingsstijve platen is een van de eenvoudigste oplossingen die voor het geval van een op homogene wringing belaste plaat, dat soms wordt aangeduid als het belastingsgeval van Nadai.

Op de vier hoekpunten van de vlakke, hier vierkant veronderstelde, horizontaal gelegen plaat (fig. 1) werken afwisselend naar boven resp. naar beneden gerichte krachten P.

In een snede evenwijdig aan de diagonaal AC op afstand x van het hoekpunt B heerst het buigende moment Px. De plaattheorie leert dat dit moment zich gelijkmatig over de breedte van de snede verdeelt; aangezien deze breedte $2x$ bedraagt is het verdeelde moment gelijk aan $^1/_2P$ per eenheid van lengte, en derhalve, ongeacht de afstand x tot het betreffende hoekpunt, constant in grootte.

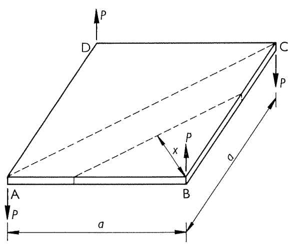


Fig. 1.

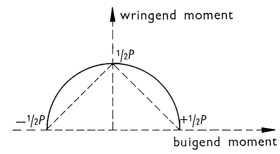


Fig. 2.

Een soortgelijke beschouwing voor sneden evenwijdig aan de diagonaal BD leert, dat het verdeelde moment in die sneden de tegengestelde waarde $-^1/_2P$ heeft. De beschouwde momenten zijn hoofdmomenten in de plaat, en hieruit zijn zonder moeite de momenten voor anders gerichte sneden af te leiden.

De transformatieregels voor momenten zijn dezelfde als voor spanningen (direct in te zien bij beschouwing van de bij die momenten behorende spanningen in de uiterste vezels van doorsneden) en kunnen derhalve met behulp van de cirkelconstructie van Mohr worden voorgesteld. In het bijzonder zal voor een snede evenwijdig aan een der *zijden* van de plaat het buigend moment nul zijn, en het wringend moment, afgezien van het teken de waarde $^1/_2P$ hebben (fig. 2).

Ook deze momenten zijn weer onafhankelijk van de plaats van het beschouwde punt: de krachtsverdeling van een volgens het voorbeeld gebogen plaat is aldus homogeen. Bij inhomogeniteit van de plaat echter ontstaat een inhomogeniteit (afwijking) in de vervormingstoestand. (Hiervan wordt bij de moirémethode gebruik gemaakt om te controleren of het gebruikte plaatmateriaal een constante dikte heeft).

Tot zover lijkt het geschetste belastingsgeval wel passend gekwalificeerd als „eenvoudig''. Dit is echter schijn, want bij nadere analyse wordt men met paradoxale aspecten geconfronteerd, blijkend uit het volgende:

1. In de plaattheorie is de verdeelde dwarskracht evenredig met de eerste afgeleide van de hoofdmomentensom. In het hier beschouwde geval zijn de hoofdmomenten overal elkaars tegengestelde, dus moet de verdeelde dwarskracht overal nul zijn. Beschouwt men nogmaals de sneden evenwijdig aan diagonaal AC dan is het evenzeer duidelijk, dat de totale dwarskracht die hier overgebracht moet worden gelijk P is.
   Deze twee uitspraken lijken derhalve volkomen strijdig met elkaar.
2. Niet minder paradoxaal is het gevolg, als men een snede evenwijdig aan een der zijden van het vierkant beschouwt. In dit geval is de totaal over te brengen dwarskracht nul, wat niet in conflict is met de berekende inwendige krachtsverdeling. Maar nu leidt de bepaling van het door de snede over te brengen totale wringende moment tot een schijnbare tegenspraak: als de zijdelengte van het vierkant a is, dan is de resultante van het verdeelde wringende moment $= {}^1/_2Pa$. Uitwendig wordt echter door de puntlasten een moment Pa uitgeoefend, wat wederom tot tegenstrijdigheid schijnt te leiden.

Bij velen, die het genoemde belastingsgeval experimenteel hebben toegepast, zijn deze intrigerende vragen gerezen. Ook spelen bij enige recente onderzoekingen op het gebied van de plaattheorie verwante moeilijkheden een rol. Aan een correcte oplossing moet dan ook zeker waarde worden gehecht.

Aangezien de verdeelde snedekrachten blijkbaar niet in staat zijn om evenwicht te maken met de uitwendige belasting, zullen ook geconcentreerde snedekrachten een rol moeten spelen. Als zodanig beschouwen wij een verticale kracht ter grootte $^1/_2P$, vlak bij de rand van de plaat op het snedevlak werkend. Deze kracht blijkt in staat het evenwicht te verzekeren. In fig. 3 is dit aangegeven; ter plaatse van elk der sneden worden de verticale krachten geacht aan te grijpen op het plaatmateriaal achter de snede. Voor wat betreft de snede evenwijdig aan de diagonaal is de aldus over te brengen dwarskracht gelijk aan P. De overdracht geschiedt volgens twee geconcentreerde, gelijk gerichte snedekrachten, elk ter grootte van $^1/_2P$.

Op een willekeurige snede evenwijdig aan een der zijden van het vierkant werken eveneens krachten ter grootte van $^1/_2P$, maar zij zijn tegengesteld van teken: aldus vormen zij een koppel dat juist het „ontbrekende" snedemoment $^1/_2Pa$ oplevert!

Opmerking verdient voorts het feit, dat de richting van het snedevlak niet van betekenis is voor de grootte van de geconcentreerde kracht. Dit gestelde is te bewijzen via een evenwichtsbeschouwing: het verticale evenwicht van een driezijdige prisma uit de plaat, waarvan een zijvlak langs de plaatrand valt, vereist, dat de bedoelde kracht inderdaad voor iedere richting van het snedevlak gelijk is aan $^1/_2P$ (zie fig. 4).

Omdat de kracht niet verdeeld is, speelt de lengte van het zijvlak waarop hij werkt geen rol: aldus komt ook de richting van dit vlak niet tot gelding in de vergelijking voor het verticale evenwicht.

Men kan zich nu nog afvragen, hoe deze kracht, noodzakelijk voor het verzekeren van het evenwicht, tot stand komt en wat de verschijningsvorm ervan is. Een beantwoording van deze vragen zou ons te ver voeren. Volstaan moet worden met de opmerking, dat de verticale schuifspanningen die de kracht $^1/_2P$ leveren, beschouwd kunnen worden als aansluitend bij de (horizontale) schuifspanningen van het wringend moment, die in een zone dicht bij de rand van richting veranderen (fig. 5).

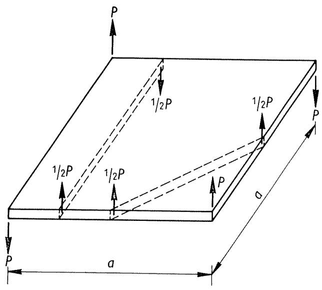


Fig. 3.

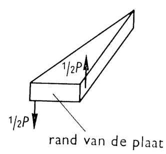


Fig. 4.

Fig. 5.