

Ir. J. WITTEVEEN

HET BEREKENEN VAN PLATEN MET SPRONGSGEWIJS VERANDERENDE DIKTE MET BEHULP VAN DE DIFFERENTIEMETHODE

U.D.C. 624.041.62 : 624.073.74

De bekende differentiemethode bij het berekenen van platen met constante dikte, welke tot voor enkele jaren zeer bewerkelijk was, verdient opnieuw de aandacht, omdat dit bezwaar door de komst van elektronische rekenmachines is ondervangen.

Het wordt nu ook interessant aan de methode een uitbreiding te geven voor platen waarvan de dikte in twee richtingen op regelmatige afstanden sprongsgewijs verandert. Platen met openingen vormen hiervan een bijzonder geval. Het blijkt dat de in dit artikel afgeleide differentievergelijking voor een plaat met sprongsgewijs veranderende dikte tevens gebruikt kan worden voor het opstellen van de voorwaarden voor willekeurige randen. Deze vergelijking geeft namelijk rechtstreeks, dus zonder het invoeren van de in de bestaande literatuur gebruikelijke buitenpunten, een differentievergelijking voor de punten op de rand en de punten gelegen op één maaswijde afstand hiervan.

Aan de hand van een rekenvoorbeeld wordt de theorie toegelicht en op grond van een moiré-model werd de uitkomst geverifieerd.

Gewezen wordt op de mogelijkheid het gehele proces te programmeren.

0 Inleiding

In isotrope platen van constante dikte, en dus van constante stijfheid tegen buiging, wordt de spanningstoestand onder belasting beheerst door de algemeen bekende biharmonische differentiaalvergelijking in de verplaatsingen w loodrecht op het vlak van de plaat:

$$K\Delta\Delta w = q \dots \dots \dots (1)$$

Hierin is q de belasting, K de buigstijfheid van de plaat en Δ de operator van Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \dots \dots \dots (2)$$

waarin voorts h de plaatdikte, ν de contractiecoëfficiënt en E de elasticiteitsmodulus van het materiaal betekenen. Voor geschikt gekozen plaatvormen en meestal niet gecompliceerde randvoorwaarden zijn analytische oplossingen

van de differentiaalvergelijking (1) bekend (zie o.a. de uitgebreide literatuur in [1] en [2]).

In die gevallen dat de plaat een meer gecompliceerde begrenzing heeft en de randvoorwaarden langs de begrenzing ook nog kunnen veranderen, is meestal niet op eenvoudige wijze en vaak zelfs in het geheel niet tot een oplossing in een gesloten analytische vorm te geraken.

Een van de methoden die dan nog ter beschikking staan is de differentierekening. Hierbij wordt de plaat niet behandeld als een continuüm maar blijft de berekening beperkt tot een aantal geschikt gekozen plaatpunten, waarvan de verplaatsingen w als onbekenden worden ingevoerd [1, 2, 3]. De differentiaalvergelijking (1) wordt in ieder punt vervangen door een lineaire vergelijking in de verplaatsingen van dat punt en van een aantal omliggende punten.

Doet men dit voor n plaatpunten, dan is het oplossen van de differentiaalvergelijking (1) herleid tot het oplossen van n onafhankelijke lineaire vergelijkingen met n onbekenden.

De methode is alleen aantrekkelijk als zo'n stelsel van n vergelijkingen op eenvoudige wijze kan worden opgelost.

Vóór de ontwikkeling van elektronische rekenmachines was een directe oplossing slechts voor $n \leq 20$ in een enigszins redelijke tijd mogelijk, zodat men destijds naar mogelijkheden heeft gezocht om de stelsels iteratief op te lossen. Als voorbeeld hiervan kan worden genoemd de relaxatie-methode van SOUTHWELL [4].

Omdat ook deze methoden nog zeer bewerkelijk waren, is de berekening van platen met behulp van differentierekening tot voor kort slechts in beperkte mate toegepast. Nu evenwel elektronische rekenmachines ter beschikking staan is dit bezwaar ondervangen en wordt het aantrekkelijk meer van deze methode gebruik te maken.

Daarom is het ook van belang aan de methode een uitbreiding te geven voor platen waarvan de dikte sprongsgewijs verandert. De behoefte hiertoe werd gevoeld bij het berekenen van de spanningsverdeling in een strokenvloer op kolommen [5] en van vloeren met uitkragende balkons [6].

1 Toepassing van differentierekening voor platen van constante dikte

De methodiek van de differentierekening zoals die wordt toegepast bij de bepaling van de krachtswerking in platen van constante dikte berust in het kort op het volgende:

Voor platen van constante dikte geldt de differentiaalvergelijking:

$$K\Delta\Delta w = q \dots \dots \dots (1)$$

De uitdrukkingen voor de momenten (m) en de dwarskrachten (q) luiden:

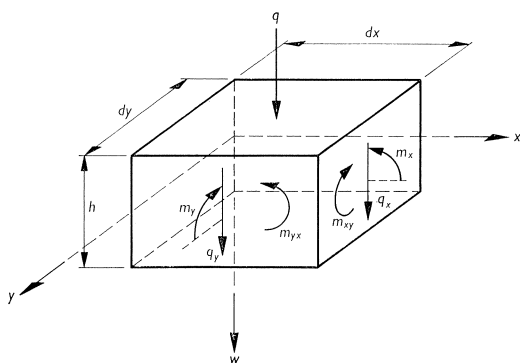


Fig. 1.

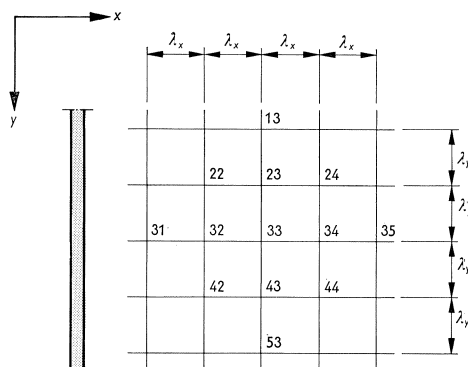


Fig. 2.

$$\left. \begin{aligned}
 m_x &= -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] & q_x &= -K \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \\
 m_y &= -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] & q_y &= -K \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \\
 m_{xy} &= -K(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & &
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

De tekenafpraak voor deze grootheden is vastgelegd in fig. 1.

Bij de differentiemethode wordt over de plaat een differentienet aangebracht, meestal een rechthoekig of vierkant stramien van rechte lijnen (zie fig. 2). Het snijpunt van twee netlijnen heet „netpunt”. Het enkelvoudige plaatdeel dat door vier lijnen is ingesloten wordt „veld” genoemd. De differentievergelijking voor een netpunt kan rechtstreeks worden afgeleid uit de differentiaalvergelijking (1), door de differentiaaloperaties om te zetten in differentiebewerkingen.

Voor een vierkant net ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda$) zijn in fig. 3 hiertoe de belangrijkste differentieschema's aangegeven, betrokken op het assenkruis van fig. 2 (zie b.v. litt. [2]).

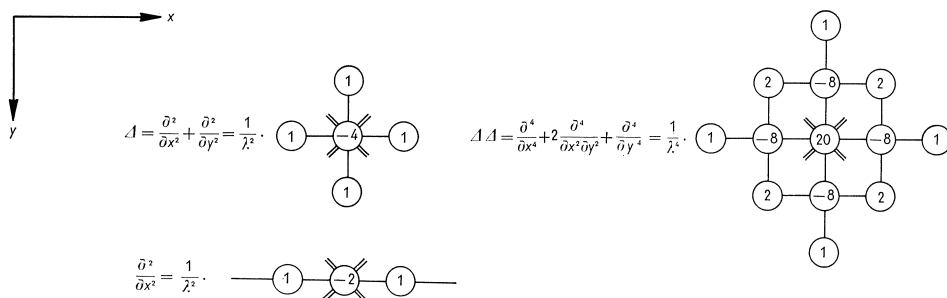


Fig. 3. Centrale differentieschema's ter vervanging van differentiaaluitdrukkingen t.p.v. het middelste punt.

Zo geldt voor netpunt 33 de differentievergelijking (schema $\Delta\Delta$):

$$K[20w_{33} - 8(w_{23} + w_{32} + w_{43} + w_{34}) + 2(w_{22} + w_{42} + w_{44} + w_{24}) + (w_{13} + w_{31} + w_{53} + w_{35})] = q\lambda^4 \quad \dots \quad (4)$$

Voor platen met sprongsgewijs veranderende dikte is het niet mogelijk het gedrag met één differentiaalvergelijking te beschrijven. Daar is het dan ook niet mogelijk de differentievergelijking af te leiden uit een differentiaalvergelijking. Men kan de betreffende vergelijking echter ook rechtstreeks afleiden zoals in hoofdstuk 2 zal worden uitgevoerd.

Om de lezer nu reeds vertrouwd te maken met de dan gebruikte methodiek wordt deze afleiding eerst gegeven voor vlakke platen. Hiertoe wordt gebruik

gemaakt van een analogie-model waarvan de werking overeenkomt met de volgens de differentierekening geschematiseerde plaat (fig. 4) onder verwaarlozing van de dwarscontractie. De belasting die geconcentreerd wordt gedacht in een aantal op regelmatige afstanden gelegen plaatpunten wordt zowel door buiging als door wringing overgebracht.

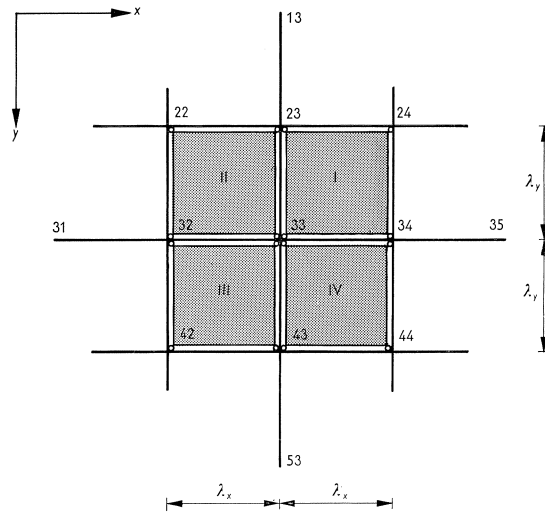


Fig. 4. Analogiemodel bestaande uit buigstijve balken en wringpanelen van een op buiging en wringing belaste vlakke plaat.

In het model wordt daartoe de plaat vervangen door een aantal buigstijve doch wringslappe balken welke samen vallen met de lijnen van het differentienet. De buigstijfheid van deze balken be-

draagt λK . Het aandeel van de wringing wordt in het model geleverd door in de hoekpunten van het aldus gevormde balkrooster platen met stijfheid K scharnierend op te hangen. Men beschouwe het evenwicht van punt 33 (fig. 4).

De belasting op punt 33 bedraagt $q\lambda_x\lambda_y$, indien q de belasting per eenheid van oppervlakte is en λ_x en λ_y de maaswijdte in x - resp. y -richting voorstellen.

Genoemde belasting moet evenwicht maken met de som van de dwarskrachten overgebracht door de balken (R_b) en door de in punt 33 afgegeven reacties van de wringpanelen (R_w) zodat:

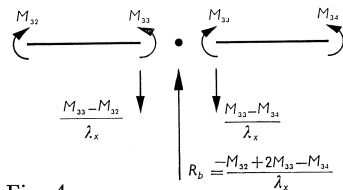


Fig. 4a.

$$q\lambda_x\lambda_y = R_b + R_w \quad \dots \quad (5)$$

De som van de door de balken overgedragen dwarskracht (R_b) bedraagt (fig. 4a):

$$R_b = \frac{-[M_x]_{32} + 2[M_x]_{33} - [M_x]_{34}}{\lambda_x} + \frac{-[M_y]_{43} + 2[M_y]_{33} - [M_y]_{23}}{\lambda_y} \dots (6)$$

Vervolgens worden de momenten van vgl. (6) uitgedrukt in de verplaatsingen van de netpunten.

Het moment in x -richting in punt 33 is:

$$[M_x]_{33} = -\lambda_y K \kappa_x, \text{ zodat } \kappa_x = -\frac{[M_x]_{33}}{\lambda_y} \frac{1}{K}$$

Het verband tussen het moment en de verplaatsingen wordt nu berekend met de benadering dat de kromming κ_x over de aansluitende balkdelen 32-33 resp. 33-34 een constante waarde heeft. Het moment is dan evenredig met de pijl van de boog 32-33-34 van de doorbuigingslijn, die gelijk is aan:

$$w_{33} - \frac{1}{2}(w_{32} + w_{34}) = -\frac{1}{2}(w_{32} - 2w_{33} + w_{34})$$

Stel punt 33 is horizontaal ingeklemd, dan geldt: ¹⁾

$$w_{32} = \frac{1}{2}\kappa_x \lambda_x^2; \quad w_{33} = 0; \quad w_{34} = \frac{1}{2}\kappa_x \lambda_x^2$$

Derhalve:

$$\frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2} = \kappa_x$$

Uitgedrukt in het moment in punt 33:

$$\frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2} = -\frac{[M_x]_{33}}{\lambda_y} \frac{1}{K}$$

Hieruit volgt:

$$[M_x]_{33} = -\lambda_y K \frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2}$$

¹⁾ Vergelijk het „vergeet-mij-nietje” voor een ingeklemde ligger met constant moment:

$$w = \frac{Ml^2}{2EI} = \frac{1}{2}\kappa l^2.$$

De in vgl. (6) voorkomende momenten zijn dan achtereenvolgens:

$$\left. \begin{aligned} [M_x]_{32} &= -\lambda_y K \frac{w_{31} - 2w_{32} + w_{33}}{\lambda_x^2} \\ [M_x]_{33} &= -\lambda_y K \frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2} \\ [M_x]_{34} &= -\lambda_y K \frac{w_{33} - 2w_{34} + w_{35}}{\lambda_x^2} \\ [M_y]_{43} &= -\lambda_x K \frac{w_{53} - 2w_{43} + w_{33}}{\lambda_y^2} \\ [M_y]_{33} &= -\lambda_x K \frac{w_{43} - 2w_{33} + w_{23}}{\lambda_y^2} \\ [M_y]_{23} &= -\lambda_x K \frac{w_{33} - 2w_{23} + w_{13}}{\lambda_y^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Vgl. (7) gesubstitueerd in vgl. (6) levert:

$$R_b = \lambda_y K \frac{w_{31} - 4w_{32} + 6w_{33} - 4w_{34} + w_{35}}{\lambda_x^3} + \lambda_x K \frac{w_{53} - 4w_{43} + 6w_{33} - 4w_{23} + w_{13}}{\lambda_y^3} \quad (8)$$

Ter bepaling van de in de netpunten afgegeven reacties van de wringpanelen beschouwe men fig. 4b. De scharnierverbindingen brengen verticale krachten (P) over, die op grond van het evenwicht niet anders verdeeld kunnen zijn dan zoals in fig. 4b is aangegeven. Het paneel is dus onderworpen aan het belastingsgeval van NADAI¹⁾, waarbij een over de oppervlakte van het paneel constante verwringing κ_{xy} optreedt, gelijk aan (bijvoorbeeld voor veld I):

$$[\kappa_{xy}]_I = \frac{-w_{33} + w_{34} - w_{24} + w_{23}}{\lambda_x \lambda_y}$$

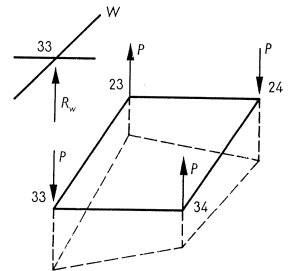


Fig. 4b.

Het wringend moment in dit paneel bedraagt dan:

$$[m_{xy}]_I = -K \frac{-w_{33} + w_{34} - w_{24} + w_{23}}{\lambda_x \lambda_y} \dots \dots \dots (9)$$

De wringende momenten op de randen van een paneel kunnen vervangen worden gedacht door statisch equivalente krachten $P = 2m_{xy}$ in de hoeken van het paneel, zodat

$$P_I = 2[m_{xy}]_I = 2K \frac{w_{33} - w_{34} + w_{24} - w_{23}}{\lambda_x \lambda_y} \dots \dots \dots (10)$$

¹⁾ Dit belastingsgeval werd besproken in de vierde aflevering van de Heronsfontein, zie Heron, jaargang 13 no. 2.

De index I duidt het betreffende wringpaneel aan (fig. 4). In punt 33 wordt totaal aan reactie afgegeven:

$$\begin{aligned}
 R_w &= P_I - P_{II} + P_{III} - P_{IV} = \\
 &= 2K \left[\frac{w_{33} - w_{34} + w_{24} - w_{23}}{\lambda_x \lambda_y} + \frac{w_{33} - w_{23} + w_{22} - w_{32}}{\lambda_x \lambda_y} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{w_{33} - w_{32} + w_{42} - w_{43}}{\lambda_x \lambda_y} + \frac{w_{33} - w_{43} + w_{44} - w_{34}}{\lambda_x \lambda_y} \right] \\
 &= 2K \frac{4w_{33} - 2w_{34} - 2w_{23} - 2w_{32} - 2w_{43} + w_{24} + w_{22} + w_{42} + w_{44}}{\lambda_x \lambda_y} \dots \quad (11)
 \end{aligned}$$

Vgl. (8) en (11) ingevuld in vgl. (5) geeft de differentievergelijking voor punt 33:

$$\begin{aligned}
 K \left[\frac{w_{31} - 4w_{32} + 6w_{33} - 4w_{34} + w_{35}}{\lambda_x^4} + \frac{w_{53} - 4w_{43} + 6w_{33} - 4w_{23} + w_{13}}{\lambda_y^4} + \right. \\
 \left. + \frac{8w_{33} - 4w_{34} - 4w_{23} - 4w_{32} - 4w_{43} + 2w_{24} + 2w_{22} + 2w_{42} + 2w_{44}}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} \right] = q \dots \quad (12)
 \end{aligned}$$

Voor een vierkant differentienet ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda$) is vgl. (12) identiek met vlg. (4).

De vergelijking geldt voor alle netpunten die op minstens twee maaswijdten afstand van de rand liggen. Voor punten gelegen op één maaswijdte afstand van de rand en voor de punten op de rand dient de differentievergelijking te worden gemodificeerd, omdat deze punten de invloed van de rand ondergaan. Op welke wijze dit kan geschieden wordt later uitvoerig besproken.

De differentievergelijkingen voor alle netpunten tezamen vormen een stelsel lineaire vergelijkingen in de verplaatsingen. Voor de oplossing van dit stelsel zal men in de meeste gevallen van een elektronische rekenmachine gebruik maken.

Zijn aldus de verplaatsingen verkregen, dan kunnen daaruit de momenten en de dwarskrachten worden bepaald.

De buigende momenten in de balken van het analogiemodel kunnen worden bepaald met behulp van vgl. (7). Deze momenten kunnen worden vertaald in plaatmomenten per eenheid van breedte.

In punt 33 van fig. 2 vindt men zo voor de buigende momenten:

$$\left. \begin{aligned}
 [m_x]_{33} &= -K \frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2} \\
 [m_y]_{33} &= -K \frac{w_{23} - 2w_{33} + w_{43}}{\lambda_y^2}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

De constante wringende momenten in de panelen van het analogiemodel kunnen worden bepaald met vgl. (9), en rechtstreeks voor de plaat worden gebruikt.

B.v. voor veld 33-32-22-23:

$$[m_{xy}]_I = -K \frac{w_{33} - w_{32} + w_{22} - w_{23}}{\lambda_x \lambda_y} \dots \dots \dots (14)$$

Ter bepaling van de dwarskrachten in het analogiemodel wordt eerst het aandeel hierin t.g.v. de wringing aan een nadere beschouwing onderworpen. De reacties P in de hoeken van de wringpanelen veroorzaken dwarskrachten ter grootte van $\frac{1}{2}P$, die zich niet als verdeelde krachten, doch als constante geconcentreerde krachten langs de randen manifesteren (zie de Heronsfontein 4 in Heron, jaargang 13 no. 2). Bij het vertalen van de dwarskrachten in het analogiemodel in die van de plaat moet worden bedacht dat langs de gemeenschappelijke zijden van de panelen deze geconcentreerde dwarskrachten elkaar gedeeltelijk opheffen.

Zo heffen bij éénzelfde verkanting van bijvoorbeeld de panelen II en III de dwarskrachten $-\frac{1}{2}P_{II}$ en $\frac{1}{2}P_{III}$ elkaar juist op. Bij een verschillende verkanting van de panelen, wat in het algemeen het geval zal zijn, is de resulterende dwarskracht in x -richting:

$$Q_x = \frac{1}{2}P_{III} - \frac{1}{2}P_{II}$$

Omdat op de gemeenschappelijke zijde van de panelen geen discontinuïteit te verwachten is, is, omgerekend voor de plaat, deze dwarskracht gelijkmatig verdeeld, zodat:

$$q_x = \frac{1}{2} \frac{P_{III} - P_{II}}{\lambda_y}$$

De dwarskrachten in de balken van het analogiemodel zijn, omgerekend voor de plaat, eveneens gelijkmatig verdeeld. De som van de dwarskrachten in het analogiemodel, b.v. op het traject 32-33, in de balk en de aangrenzende wringpanelen II en III is:

$$Q_x = \frac{[M_x]_{33} - [M_x]_{32}}{\lambda_x} + \frac{1}{2}P_{III} - \frac{1}{2}P_{II}$$

Voor de plaat uitgedrukt in dwarskrachten per eenheid van breedte:

$$q_x = \frac{[m_x]_{33} - [m_x]_{32}}{\lambda_x} + \frac{[m_{xy}]_{III} - [m_{xy}]_{II}}{\lambda_y} \dots \dots \dots (15)^1$$

2 Platen met sprongsgewijs veranderende dikte

In fig. 5 is een gedeelte van een plaat weergegeven, waarvan de dikte sprongsgewijs verandert; het gebruikelijke differentienet is tevens afgebeeld. Ter

¹⁾ Door de momenten in vgl. (15) uit te drukken in de verplaatsingen en ze daarna te hergroeperen vindt men de bekende formule:

$$q_x = \frac{[m_x + m_y]_{33} - [m_x + m_y]_{32}}{\lambda_x}$$

plaatse van de differentielijnen kan de dikte van de plaat sprongsgewijs overgaan in een andere. In het meest algemene geval verschillen alle velden onderling in dikte. In de figuur is ieder veld aangeduid met een Romeins cijfer. De stijfheid van een veld wordt K genoemd met het betreffende cijfer als index.

Bij de afleiding van de differentievergelijking zal de invloed van de flenswerking en de dwarscontractie buiten beschouwing worden gelaten.

Wat betreft flenswerking kan hierbij het volgende worden aangetekend. Bij de afleiding van de elementaire plaatvergelijking wordt er van uitgegaan, dat tengevolge van de belasting

uitsluitend momenten en dwarskrachten ontstaan. Bij platen waarvan het middenvlak geen plat vlak is, bijvoorbeeld omdat de randen dikker zijn uitgevoerd dan het midden, ontstaan echter tengevolge van flenswerking tevens normaalkrachten in het vlak van de plaat. Hoewel het in beginsel mogelijk is flenswerking in een berekening volgens de differentiemethode te introduceren is uit een dienaangaand onderzoek [7] gebleken dat in de meeste gevallen flenswerking zonder bezwaar buiten beschouwing kan worden gelaten.

Bij de opstelling van de differentievergelijking (fig. 5) wordt weer gebruik gemaakt van het hiervoor reeds beschreven analogiemodel. Met de vlakke plaat is er echter dit verschil dat zowel de buigstijve balken als de wringpanelen allen een verschillende stijfheid bezitten. De balken van het model kunnen, omdat ze wringslap worden verondersteld, worden gedacht te bestaan uit twee vrij naast elkaar liggende balken elk met een stijfheid van $\frac{1}{2}\lambda$ maal de plaatstijfheid van de aangrenzende plaatdelen.

Ter plaatse van de netpunten worden *de in elkaars verlengde* liggende balken buigstijf aan elkaar verbonden.

Op deze wijze ontstaan knooppunten van vier elkaar loodrecht kruisende balken, welke alle los van elkaar liggen, doch dezelfde verplaatsing ondergaan. Uit het navolgende zal nog nader blijken, waarom juist op deze wijze de balken van het analogiemodel met elkaar zijn verbonden.

Daar de dikte van de plaat binnen een differentievak niet varieert is de stijfheid van ieder wringpaneel constant. Beschouwt men het evenwicht van punt 33 dan gelden hiervoor dezelfde vergelijkingen als afgeleid voor de vlakke plaat (vgl. (5) en (6)); immers evenwichtsvergelijkingen worden niet beïnvloed door diktevariatiën. De volgende stap is nu het uitdrukken van de momenten van vgl. (6) in de verplaatsingen van de plaat.

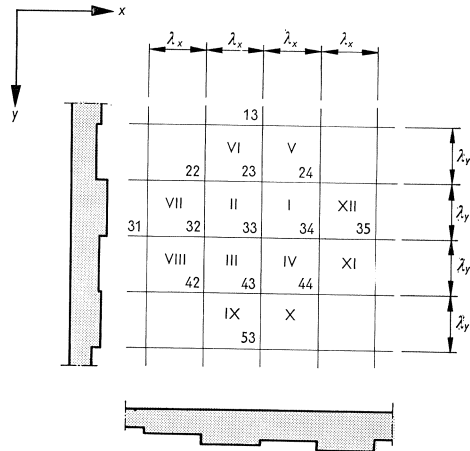


Fig. 5.

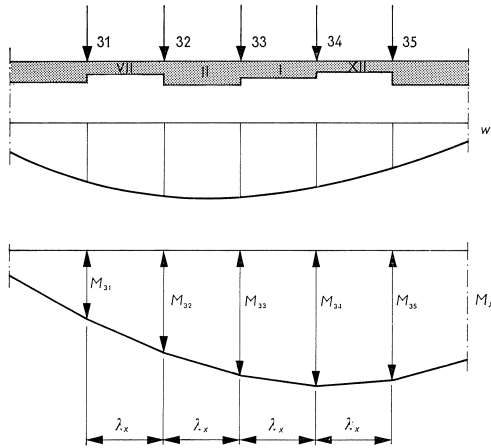


Fig. 6.

Beschouwd wordt de buiging in x -richting van de balk liggend op de netlijn 31–32–33–34–35 aan de zijde van de velden VII–II–I–XII en met een sprongsgewijs variërende stijfheid van $\frac{1}{2}\lambda$ maal de waarde van K voor die van genoemde velden. Bedoelde balk is in fig. 6 weergegeven met het verloop van de verplaatsingen w en het moment M_x .

Omdat ter plaatse van de netpunten de balkdelen met verschillende stijfheden buigstijf met elkaar zijn verbonden heerst links

en rechts hetzelfde moment; de kromming verandert er dan sprongsgewijs. links van punt 33:

$$[M_x]_{33} = -\frac{1}{2}\lambda_y K_{II} \kappa_{II}; \quad \text{zodat } \kappa_{II} = -\frac{[M_x]_{33}}{\frac{1}{2}\lambda_y} \frac{1}{K_{II}}$$

rechts van punt 33:

$$[M_x]_{33} = -\frac{1}{2}\lambda_y K_I \kappa_I; \quad \text{zodat } \kappa_I = -\frac{[M_x]_{33}}{\frac{1}{2}\lambda_y} \frac{1}{K_I}$$

Het verband tussen het moment en de verplaatsingen wordt nu berekend met de benadering dat κ_I en κ_{II} over de aansluitende balkdelen 32–33, resp. 33–34 een constante waarde hebben.

Het moment is dan evenredig met de pijl van de boog 32–33–34 van de doorbuigingslijn, die gelijk is aan:

$$w_{33} - \frac{1}{2}(w_{32} + w_{34}) = -\frac{1}{2}(w_{32} - 2w_{33} + w_{34})$$

Stel punt 33 is horizontaal ingeklemd, dan geldt:

$$w_{32} = \frac{1}{2}\kappa_{II}\lambda_x^2; \quad w_{33} = 0; \quad w_{34} = \frac{1}{2}\kappa_I\lambda_x^2$$

Derhalve:

$$\frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2} = \frac{1}{2}[\kappa_I + \kappa_{II}]$$

Uitgedrukt in het moment in punt 33:

$$\frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2} = -\frac{[M_x]_{33}}{\lambda_y} \left[\frac{1}{K_I} + \frac{1}{K_{II}} \right]$$

Hieruit volgt:

$$[M_x]_{33} = -\lambda_y \frac{K_I K_{II}}{K_I + K_{II}} \cdot \frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2}$$

Op dezelfde wijze kan ook het moment in punt 33 van de balk aan de zijde van de velden VIII–III–IV–XI worden bepaald. De som van beide momenten in punt 33 van de twee balken bedraagt dan:

$$[M_x]_{33} = -\lambda_y \left[\frac{K_I K_{II}}{K_I + K_{II}} + \frac{K_{III} \cdot K_{IV}}{K_{III} + K_{IV}} \right] \cdot \frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2}$$

De vorm tussen rechte haken zal in het vervolg „vervangingsstijfheid” worden genoemd. Ter vereenvoudiging van de schrijfwijze van de formules wordt de volgende notatie ingevoerd:

$$\begin{aligned} f_{32} &= \frac{K_{VII} K_{II}}{K_{VII} + K_{II}} + \frac{K_{VIII} K_{III}}{K_{VIII} + K_{III}} & g_{23} &= \frac{K_{II} K_{VI}}{K_{II} + K_{VI}} + \frac{K_I K_V}{K_I + K_V} \\ f_{33} &= \frac{K_{II} K_I}{K_{II} + K_I} + \frac{K_{III} K_{IV}}{K_{III} + K_{IV}} & g_{33} &= \frac{K_{III} K_{II}}{K_{III} + K_{II}} + \frac{K_{IV} K_I}{K_{IV} + K_I} \\ f_{34} &= \frac{K_I K_{XII}}{K_I + K_{XII}} + \frac{K_{IV} K_{XI}}{K_{IV} + K_{XI}} & g_{43} &= \frac{K_{IX} K_{III}}{K_{IX} + K_{III}} + \frac{K_X K_{IV}}{K_X + K_{IV}} \end{aligned}$$

Dan zijn de in vgl. (6) voorkomende momenten achtereenvolgens:

$$\left. \begin{aligned} [M_x]_{32} &= -\lambda_y f_{32} \frac{w_{31} - 2w_{32} + w_{33}}{\lambda_x^2} \\ [M_x]_{33} &= -\lambda_y f_{33} \frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2} \\ [M_x]_{34} &= -\lambda_y f_{34} \frac{w_{33} - 2w_{34} + w_{35}}{\lambda_x^2} \\ [M_y]_{43} &= -\lambda_x g_{43} \frac{w_{53} - 2w_{43} + w_{33}}{\lambda_y^2} \\ [M_y]_{33} &= -\lambda_x g_{33} \frac{w_{43} - 2w_{33} + w_{23}}{\lambda_y^2} \\ [M_y]_{23} &= -\lambda_x g_{23} \frac{w_{33} - 2w_{23} + w_{13}}{\lambda_y^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7a)$$

Vgl. (7a) gesubstitueerd in vgl. (6) levert:

$$\left. \begin{aligned} R_b &= \lambda_y f_{32} \frac{w_{31} - 2w_{32} + w_{33}}{\lambda_x^3} - 2\lambda_y f_{33} \frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^3} \\ &+ \lambda_y f_{34} \frac{w_{33} - 2w_{34} + w_{35}}{\lambda_x^3} + \lambda_x g_{43} \frac{w_{53} - 2w_{43} + w_{33}}{\lambda_y^3} \\ &- 2\lambda_x g_{33} \frac{w_{43} - 2w_{33} + w_{23}}{\lambda_y^3} + \lambda_x g_{23} \frac{w_{33} - 2w_{23} + w_{13}}{\lambda_y^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots (8a)$$

Bepaling van de in de netpunten afgegeven reacties van de wringpanelen ge-

schiedt op dezelfde wijze als in hoofdstuk 1 bij platen van constante dikte is beschreven. Elk wringpaneel levert een reactie P gelijk aan tweemaal de stijfheid vermenigvuldigd met de verwringing van het betreffende paneel (vgl. 10).

In punt 33 wordt totaal aan reactie afgegeven:

$$R_w = 2K_I \frac{w_{33} - w_{34} + w_{24} - w_{23}}{\lambda_x \lambda_y} + 2K_{II} \frac{w_{33} - w_{23} + w_{22} - w_{32}}{\lambda_x \lambda_y} + 2K_{III} \frac{w_{33} - w_{32} + w_{42} - w_{43}}{\lambda_x \lambda_y} + 2K_{IV} \frac{w_{33} - w_{43} + w_{44} - w_{34}}{\lambda_x \lambda_y} \dots \quad (11a)$$

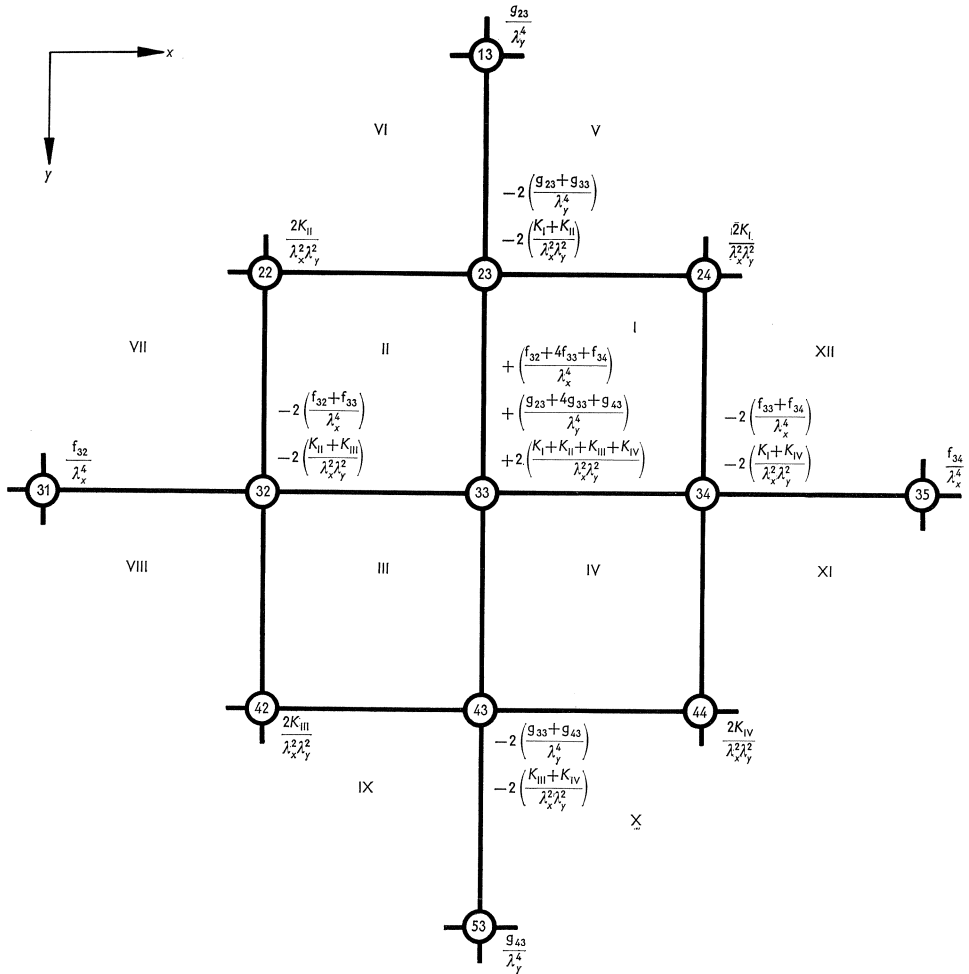


Fig. 7. Coëfficiënten van de differentievergelijking (12a).

Vgl. (8a) en (11a) ingevuld in vgl. (5) geeft de differentievergelijking voor punt 33:

$$\begin{aligned}
 & f_{32} \frac{w_{31} - 2w_{32} + w_{33}}{\lambda_x^4} - 2f_{33} \frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^4} \\
 & + f_{34} \frac{w_{33} - 2w_{34} + w_{35}}{\lambda_x^4} + g_{43} \frac{w_{53} - 2w_{43} + w_{33}}{\lambda_y^4} \\
 & - 2g_{33} \frac{w_{43} - 2w_{33} + w_{23}}{\lambda_y^4} + g_{23} \frac{w_{33} - 2w_{23} + w_{13}}{\lambda_y^4} \\
 & + 2K_I \frac{w_{33} - w_{34} + w_{24} - w_{23}}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + 2K_{II} \frac{w_{33} - w_{23} + w_{22} - w_{32}}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} \\
 & + 2K_{III} \frac{w_{33} - w_{32} + w_{42} - w_{43}}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + 2K_{IV} \frac{w_{33} - w_{43} + w_{44} - w_{34}}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} = q \dots \quad (12a)
 \end{aligned}$$

De eerste zes termen van vgl. (12a) zijn buigingstermen, de overige zijn wringstermen. In fig. 7 zijn de coëfficiënten van vgl. (12a) in de vorm van een differentieschema weergegeven.

Het ligt voor de hand vgl. (12a) te toetsen aan enkele bijzondere plaatvormen. Voor het geval van een vlakke plaat zijn de vervangingsstijfheden f en g gelijk aan K , waardoor vgl. (12a) overgaat in vgl. (12) voor de plaat met constante dikte.

Voor een plaat waarvan de differentievelden schaakbordsgewijs een stijfheid K resp. een stijfheid nul bezitten zijn de vervangingsstijfheden f en g gelijk nul.

De belasting zou dan alleen kunnen worden overgebracht door de weerstand van de panelen tegen wringing. In het algemeen is dit slechts voor zeer bepaalde belastingen en/of randvoorwaarden mogelijk.

Een rechthoekige plaat met het vermelde schaakbordpatroon waarvan twee overstaande zijden vrij zwevend zijn, kan in de vorm van een cilinder worden opgerold, d.w.z. iedere vervorming zonder verwringing kan vrijelijk optreden. Dit verschijnsel kan met een eenvoudig proefje worden geverifieerd, wat tevens een rechtvaardiging betekent van de keuze van het analogiemodel. Immers slechts de in elkaars verlengde liggende balken zijn buigstijf met elkaar verbonden, waardoor in dit geval de balken geen buiging kunnen overbrengen.

De resterende buigingsstijfheid van het plaatje met schaakbordpatroon is zo gering, dat men kan stellen dat de vervangingsbalken zoals 33-34 van veld I en 32-33 van veld III niet buigstijf met elkaar zijn verbonden.

In hoofdstuk 1 is er reeds op gewezen dat voor de punten gelegen op één maaswijdte afstand van de rand van de plaat en voor de randpunten zelf, de differentievergelijking afhankelijk van de aard van de randvoorwaarde moet worden gemodificeerd. Bij het opstellen van de differentievergelijking voor

deze punten liggen één of meer van de omringende punten welke moeten worden beschouwd buiten de plaat.

Dit probleem wordt in de bestaande literatuur opgelost door aan deze „buitenpunten” een oordeelkundige verplaatsing te geven in overeenstemming met de ter plaatse geldende randvoorwaarden. Daar het aantal onbekende buitenpunten gelijk is aan het aantal randvoorwaarden is de in te voeren verplaatsing van deze punten éénduidig bepaald. Voor een ingeklemde rand bijvoorbeeld zijn de verplaatsingen, toegekend aan de buitenpunten op één maaswijdte afstand van de rand gelijk aan de verplaatsingen van de punten op gelijke afstand binnen de rand. Voor gecompliceerder randvoorwaarden als vrije randen en hoeken is het uitdrukken van de verplaatsingen van de buitenpunten in die van de binnenpunten tamelijk bewerkelijk.

Sneller komt men echter tot een resultaat door gebruik te maken van de hiervoor afgeleide differentievergelijking voor platen met sprongsgewijs veranderende stijfheid (vgl. 12a). Deze vergelijking geeft namelijk rechtstreeks, dus zonder gebruik te maken van buitenpunten, een differentievergelijking voor de punten op de rand en de punten gelegen op één maaswijdte afstand hiervan. Als voorbeelden worden achtereenvolgens een drietal randvoorwaarden behandeld:

a. *ingeklemde rand*

Stel dat in fig. 5 de netlijn 24–34–44 een inklemming voorstelt met de plaat links daarvan.

Rechts van de netlijn zijn alle stijfheden oneindig groot, terwijl de verplaatsingen van de punten op de netlijn nul zijn. De differentievergelijking voor punt 33 kan nu als volgt worden bepaald:

De vervangingsstijfheden f en g zijn achtereenvolgens, bij een overigens constante plaatdikte:

$$f_{32} = K; f_{33} = K; f_{34} = 2K$$

$$g_{23} = K; g_{33} = K; g_{43} = K$$

Het invullen van deze stijfheden in het differentieschema van fig. 7 levert voor een vierkant net ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda$) het schema volgens fig. 8a.

Wanneer de verplaatsingen van de rand zijn voorgeschreven dan verkrijgt men het differentieschema van fig. 8b.

b. *vrije rand*

Stel dat in fig. 5 de netlijn 13–23–33–43–53 een vrije rand voorstelt met de plaat links daarvan. Rechts van de netlijn zijn alle stijfheden nul.

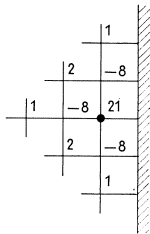
De differentievergelijking voor punt 33 kan nu als volgt worden bepaald:

De vervangingsstijfheden f en g zijn achtereenvolgens, bij een constante plaatdikte:

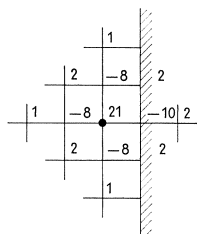
$$f_{32} = K; f_{33} = 0; f_{34} = 0$$

$$g_{23} = \frac{1}{2}K; g_{33} = \frac{1}{2}K; g_{43} = \frac{1}{2}K$$

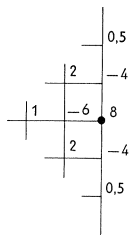
Het invullen van deze stijfheden in het differentieschema volgens fig. 7 levert voor een vierkant net ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda$) het schema volgens fig. 8c.



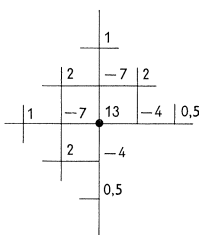
a. Inklemming $K \Sigma w = q\lambda^4$.



b. Inklemming $K \Sigma w = q\lambda^4$.



c. Vrije rand $K \Sigma w = \frac{1}{2}q\lambda^4$.



d. Zwevende binnenhoek $K \Sigma w = \frac{3}{4}q\lambda^4$.

Fig. 8. Differentieschema's voor punten in de omgeving van randen voor een vierkant differentienet ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda$).

c. zwevende binnenhoek

Stel dat in fig. 5 de hoek 43–33–34 een binnenhoek is, waar twee vrij zwevende randen samen komen.

De differentievergelijking voor punt 33 kan worden bepaald uit de algemene vergelijking door binnen de rechte hoek een plaat met stijfheid nul aanwezig te veronderstellen.

De vervangingsstijfheden f en g zijn achtereenvolgens, bij een constante plaatdikte:

$$f_{32} = K; f_{33} = \frac{1}{2}K; f_{34} = \frac{1}{2}K$$

$$g_{23} = K; g_{33} = \frac{1}{2}K; g_{43} = \frac{1}{2}K$$

Het invullen van deze stijfheden in het differentieschema volgens fig. 7 levert voor een vierkant net ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda$) het schema volgens fig. 8d.

Uit het bovenstaande zal het duidelijk zijn dat met de algemene differentievergelijking zoals gegeven in vgl. (12a) de differentievergelijkingen voor alle

plaatpunten kunnen worden opgeschreven. Voor die velden van het differentienet welke samenvallen met b.v. een gat of een oneindig stijf plaatdeel heeft in de vergelijking slechts $K = 0$, resp. $K = \infty$ te worden ingevuld.

Platen van constante dikte met gaten bijvoorbeeld vormen op deze wijze een bijzonder geval van de sprongsgewijs in dikte veranderende plaat.

Zijn aldus voor alle door het differentienet bepaalde punten van de plaat differentievergelijkingen opgesteld dan is het probleem herleid tot het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen uitgedrukt in de verplaatsingen. De coëfficiëntenmatrix van dit stelsel bezit een aantal bijzondere eigenschappen, die enerzijds een controle geven op de berekende coëfficiënten en waarvan anderzijds gebruik kan worden gemaakt bij het oplossen van het stelsel.

In de eerste plaats kan worden opgemerkt dat de som van de coëfficiënten in vgl. (12a) (zie ook fig. 7) nul is, omdat ieder deel waaruit vgl. (12a) is opgebouwd een coëfficiëntensom nul heeft.

Fysisch kan dit worden verklaard door te bedenken dat bij een starre verticale verplaatsing \bar{w} van een onbelaste plaat, de plaat zelf geen weerstand tegen die verplaatsing ontwikkelt. Wanneer in vgl. (12a) voor iedere w de waarde \bar{w} wordt ingevuld is alleen het rechter lid nul ($q = 0$) als de som der coëfficiënten nul is.

Ook bij een starre rotatie om een willekeurige lijn, waarbij tussen de verplaatsingen een lineair verband bestaat, moet het rechter lid van vgl. (12a) nul zijn. Voor de matrix betekent dit dat er een verband bestaat tussen de coëfficiënten van elke rij.

Beide eigenschappen geven een controle op de grootte van de coëfficiënten.

Voor punten naast of op vrij zwevende randen kan hetzelfde argument worden gehanteerd; daarom gelden dezelfde controles ook voor de betreffende rij van de coëfficiëntenmatrix. Voor punten naast ingeklemde of scharnierend opgelegde randen geldt echter niet hetzelfde, indien reeds gebruik gemaakt is van de voorwaarde dat op de rand de verplaatsing nul is.

Staat men toe, dat een verplaatsing van de rand wordt voorgeschreven, dan krijgt men een iets ander differentieschema waarvoor de bedoelde controles wel gelden. Voor een ingeklemde rand gebruike men dan het schema van fig. 8b in plaats van dat van fig. 8a.

Een volgende belangrijke eigenschap is de wederkerigheidsbetrekking, die bestaat tussen de coëfficiënten in de vergelijking voor verschillende netpunten. Noemt men a_{ij} de coëfficiënt van de verplaatsing w_j in de vergelijking voor punt i en a_{ji} de coëfficiënt van de verplaatsing w_i in de vergelijking voor punt j dan wordt de bedoelde wederkerigheid uitgedrukt door $a_{ij} = a_{ji}$.

Men kan deze eigenschap afleiden met de wet van Maxwell. De consequentie hiervan is dat de coëfficiëntenmatrix symmetrisch is om de hoofd-diagonaal, mits ook voor die punten welke worden beïnvloed door de randvoorwaarden de differentievergelijking met behulp van vgl. (12a) wordt bepaald.

Voor het oplossen van lineaire vergelijkingen met symmetrische coëfficiëntenmatrix met behulp van de elektronische rekenautomaat zijn speciale programma's te gebruiken, welke minder machinetijd vergen en bij een gegeven geheugencapaciteit grotere stelsels toelaten dan programma's voor vergelijkingen met een willekeurige coëfficiëntenmatrix. Hierbij komt nog dat ook het relatief grote aantal nullen in de matrix een winst kan betekenen indien van oplosprogramma's gebruik wordt gemaakt die deze eigenschap benutten.

Omdat het mogelijk is gebleken vgl. (12a) te gebruiken voor alle punten van het differentienet, inclusief de punten in de omgeving van en op de rand, kan het zinvol zijn hiervoor een speciaal programma te maken.

De bepaling van de momenten en de dwarskrachten geschiedt op analoge wijze als in hoofdstuk 1 bij platen met constante dikte is beschreven.

Voor punt 33 van fig. 5 wordt dit voor het buigend moment toegelicht. Aan de zijde van veld I en II geldt:

$$\left. \begin{aligned} [m_x]_{33} &= -2 \frac{K_I K_{II}}{K_I + K_{II}} \frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2} \\ \text{Aan de zijde van veld III en IV geldt:} \\ [m_x]_{33} &= -2 \frac{K_{III} K_{IV}}{K_{III} + K_{IV}} \frac{w_{32} - 2w_{33} + w_{34}}{\lambda_x^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13a)$$

Hier zijn rechtstreeks de verdeelde momenten opgeschreven die gelden voor een zone ter breedte $\frac{1}{2}\lambda_y$ naast de systeemlijn.

Het wringend moment in b.v. veld 33-32-22-23 bedraagt:

$$[m_{xy}]_{II} = -K_{II} \frac{w_{33} - w_{32} + w_{22} - w_{23}}{\lambda_x \lambda_y} \dots \dots \dots (14a)$$

Evenals dit bij de behandeling van platen met constante dikte is geschied wordt eerst het aandeel in de dwarskracht t.g.v. de wringing aan een nadere beschouwing onderworpen.

Ook bij platen met variabele dikte zullen langs de gemeenschappelijke zijde van de panelen de geconcentreerde dwarskrachten elkaar gedeeltelijk opheffen. Nu is echter slechts een gedeelte van het verschil der geconcentreerde dwarskrachten gelijkmatig verdeeld, de rest blijft als een geconcentreerde dwarskracht aanwezig.

Het is plausibel te maken dat in het meest algemene geval als bijvoorbeeld $K_{III} > K_{II}$ in de panelen II en III een gelijkmatig verdeelde dwarskracht in x -richting heerst, groot:

$$q_x = \frac{1}{2} \frac{\frac{K_{II}}{K_{III}} \cdot P_{III} - P_{II}}{\lambda_y}$$

en in het paneel met stijfheid K_{III} langs de gemeenschappelijke zijde een geconcentreerde dwarskracht:

$$R_x = \frac{1}{2} \frac{K_{III} - K_{II}}{K_{III}} P_{III}$$

Ter toelichting worden drie limietgevallen geschouwd:

- a. als $K_{II} = K_{III}$ vervalt de geconcentreerde dwarskracht en is de gelijkmatig verdeelde dwarskracht in beide panelen:

$$q_x = \frac{1}{2} \frac{P_{III} - P_{II}}{\lambda_y}$$

- b. als $K_{II} = 0$ is er alleen een geconcentreerde dwarskracht op de rand van paneel III:

$$R_x = \frac{1}{2} P_{III}$$

- c. als $K_{III} > K_{II}$ en de beide panelen hebben dezelfde verkanting dan is er geen gelijkmatig verdeelde dwarskracht maar heerst in het paneel met stijfheid K_{III} langs de gemeenschappelijke zijde een geconcentreerde dwarskracht:

$$R_x = \frac{1}{2} P_{III} - \frac{1}{2} P_{II}$$

De dwarskrachten in de balken van het analogiemodel zijn, omgerekend voor de plaat, gelijkmatig verdeeld over een zone, breed $\frac{1}{2}\lambda$, naast de systeemlijn.

Indien $K_{III} > K_{II}$ is dus de gelijkmatig verdeelde dwarskracht in x -richting op het traject 32-33 aan de zijde van veld II:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{[m_x]_{33} - [m_x]_{32}}{\lambda_x} + \frac{1}{2} \frac{\frac{K_{II}}{K_{III}} \cdot P_{III} - P_{II}}{\lambda_y} \\ &= \frac{[m_x]_{33} - [m_x]_{32}}{\lambda_x} + \frac{\frac{K_{II}}{K_{III}} [m_{xy}]_{III} - [m_{xy}]_{II}}{\lambda_y} \end{aligned}$$

en op het traject 32-33 aan de zijde van veld III:

$$q_x = \frac{[m_x]_{33} - [m_x]_{32}}{\lambda_x} + \frac{\frac{K_{II}}{K_{III}} [m_{xy}]_{III} - [m_{xy}]_{II}}{\lambda_y} \quad \dots \dots \dots (15a)$$

Voorts werkt nog een geconcentreerde kracht langs de rand van paneel III:

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{1}{2} \frac{K_{III} - K_{II}}{K_{III}} P_{III} \\ &= \frac{K_{III} - K_{II}}{K_{III}} [m_{xy}]_{III} \end{aligned}$$

3 Rekenvoorbeeld

De hiervóór behandelde theorie wordt nu toegelicht aan de hand van een voorbeeld, te weten de berekening van de krachtswerking in een strokenvloer op kolommen. Dit vloertype vormt een overgang tussen paddestoelvloeren en vloeren ondersteund door balken die van kolom tot kolom dragen. Het essentiële verschil is echter dat bij laatstgenoemde vloeren het gedrag zodanig is, dat met goede benadering de balken en de vloeren afzonderlijk kunnen worden berekend, terwijl bij strokenvloeren de constructie in zijn geheel moet worden beschouwd. Bij strokenvloeren zal men in het algemeen geen of kleine kolomkoppen toepassen, aangezien immers verzwaarde stroken aanwezig zijn. De juiste vorm van de kolomkop kan dan worden verwaarloosd, zodat berekening met de differentiemethode mogelijk is [5].

In fig. 9 is een vierkant ideaal middenveld weergegeven, waarop een gelijkmatig verdeelde belasting q werkt. Onder een ideaal middenveld wordt verstaan een veld van een dergelijke vloer op een zodanige afstand van de rand dat bij gelijkmatig verdeelde belasting de verbindingslijnen van de kolommen als symmetrielijnen voor het doorbuigingsvlak kunnen worden beschouwd.

De dikte van de plaat h_1 verhoudt zich tot de dikte van de strook h_2 als 1 tot 1,5, zodat, indien de stijfheid in het midden K wordt genoemd, de stijfheid van de strook $(h_2/h_1)^3 K = 3,375K$ bedraagt. De breedte van de strook is $3/7$ van de afstand tussen de kolommen.

Wegens symmetrie behoeft slechts een halfkwadrant $= \Delta BCD$ van het vierkante veld te worden beschouwd. Over de plaat is een vierkant differentienet aangebracht met maaswijdte $\lambda = 1/7a$.

De plaatbreedte en de breedte van de stroken is zodanig gekozen dat de overgang tussen plaat en strook samenvalt met een systeemlijn van het diffe-

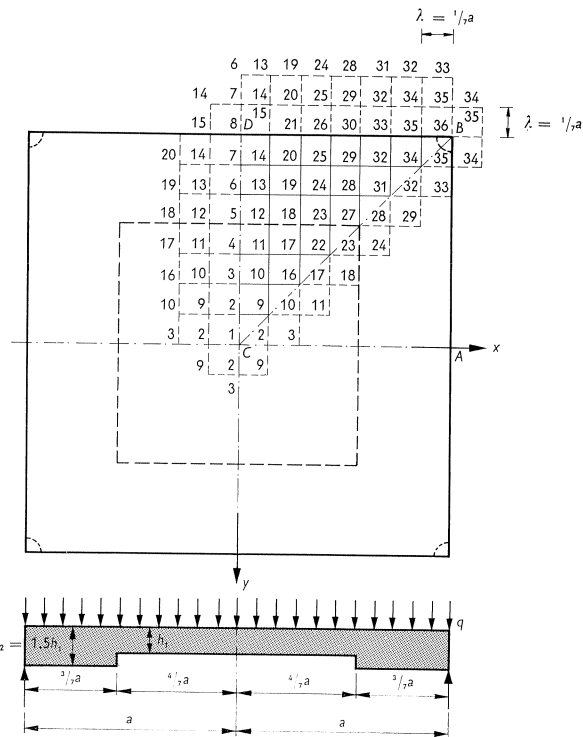


Fig. 9. Vierkant ideaal middenveld van een strokenvloer op kolommen.

rentienet. De ondersteuning van de plaat wordt vervangen gedacht door een „puntvormige” ondersteuning, zodat als voorwaarde in punt 36 geldt: $w=0$. Voor de overige punten langs de drie begrenzingslijnen van het beschouwde octant wordt aan de randvoorwaarden (helling en dwarskracht loodrecht op genoemde begrenzingslijnen zijn nul) voldaan door het net symmetrisch over de drie symmetrielijnen naar buiten voort te zetten (zie fig. 9).

Voor elk punt van de plaat geldt vgl. (12a), hetgeen tezamen leidt tot een stelsel van 35 vergelijkingen voor de 35 onbekende verplaatsingen w_1 t/m w_{35} ($w_{36} = 0$).

Na het oplossen hiervan kunnen uit de berekende verplaatsingen de momenten en de dwarskrachten worden bepaald.

Op welke wijze de vergelijkingen worden opgesteld wordt nu, als voorbeeld, voor de punten 1, 5 en 27 toegelicht.

punt 1: Hiervoor geldt vgl. (4)

$$20w_1 - 8[w_2 + w_2 + w_2 + w_2] + 2[w_9 + w_9 + w_9 + w_9] + [w_3 + w_3 + w_3 + w_3] = \frac{q\lambda^4}{K}$$

of:

$$20w_1 - 32w_2 + 8w_9 + 4w_3 = \frac{q\lambda^4}{K}$$

Ter verkrijging van een symmetrische matrix wordt de vergelijking met 1/8 vermenigvuldigd. Dit houdt verband met het feit dat slechts een achtste van de gehele plaat wordt beschouwd.

$$2,5w_1 - 4w_2 + w_9 + 0,5w_3 = 0,125 \frac{q\lambda^4}{K} \dots \dots \dots (\bar{w}_1)$$

punt 5: Hiervoor geldt vgl. (12a)

De vervangingsstijfheden zijn achtereenvolgens:

$$f_5 = f_{12} = \frac{3,375K \cdot 3,375K}{3,375K + 3,375K} + \frac{K \cdot K}{K + K} = 2,187500K$$

$$g_5 = \frac{K \cdot 3,375K}{K + 3,375K} + \frac{K \cdot 3,375K}{K + 3,375K} = 1,542857K$$

$$g_4 = K$$

$$g_6 = 3,375K$$

Derhalve:

$$\begin{aligned} & 2,187500[w_{18} - 2w_{12} + w_5] - 2 \cdot 2,187500[w_{12} - 2w_5 + w_{12}] + \\ & \qquad \qquad \qquad + 2,187500[w_5 - 2w_{12} + w_{18}] + \\ & + 1 \cdot [w_3 - 2w_4 + w_5] - 2 \cdot 1,542857[w_4 - 2w_5 + w_6] + 3,375[w_5 - 2w_6 + w_7] + \\ & + 2 \cdot 3,375[w_5 - w_{12} + w_{13} - w_6] + 2 \cdot 3,375[w_5 - w_6 + w_{13} - w_{12}] + \\ & + 2 \cdot 1[w_5 - w_{12} + w_{11} - w_4] + 2 \cdot 1[w_5 - w_4 + w_{11} - w_{12}] = \frac{q\lambda^4}{K} \end{aligned}$$

Ter verkrijging van een symmetrische matrix wordt deze vergelijking in zijn geheel vermenigvuldigd met $\frac{1}{2}$.

Gerangschikt ontstaat dan:

$$0,5w_3 - 4,542857w_4 + 20,585714w_5 - 11,667857w_6 + \\ + 1,6875w_7 + 2w_{11} - 17,5w_{12} + 6,75w_{13} + 2,1875w_{18} = 0,5 \frac{q\lambda^4}{K} \dots \dots \dots (\bar{w}_5)$$

punt 27: Ook hiervoor geldt vgl. (12a)

$$f_{23} = g_{23} = \frac{3,375K \cdot 3,375K}{3,375K + 3,375K} + \frac{K \cdot K}{K + K} = 2,187500K$$

$$f_{27} = g_{27} = \frac{3,375K \cdot 3,375K}{3,375K + 3,375K} + \frac{K \cdot 3,375K}{K + 3,375K} = 2,458929K$$

$$f_{28} = g_{28} = 3,375K \qquad \text{Derhalve:}$$

$$3,375[w_{29} - 2w_{28} + w_{27}] - 2 \cdot 2,458929[w_{28} - 2w_{27} + w_{23}] + \\ + 2,1875[w_{27} - 2w_{23} + w_{18}] + 2,1875[w_{18} - 2w_{23} + w_{27}] - \\ - 2 \cdot 2,458929[w_{23} - 2w_{27} + w_{28}] + 3,375[w_{27} - 2w_{28} + w_{29}] + \\ + 2 \cdot 3,375[w_{27} - w_{23} + w_{24} - w_{28}] + 2 \cdot 3,375[w_{27} - w_{28} + w_{31} - w_{28}] + \\ + 2 \cdot 3,375[w_{27} - w_{28} + w_{24} - w_{23}] + 2 \cdot [w_{27} - w_{23} + w_{22} - w_{23}] = \frac{q\lambda^4}{K}$$

Deze vergelijking, om dezelfde reden vermenigvuldigd met $\frac{1}{2}$, geeft na rangschikking der termen:

$$2,1875w_{18} + w_{22} - 18,042858w_{23} + 6,75w_{24} + 26,523216w_{27} - \\ - 25,167858w_{28} + 3,375w_{29} + 3,375w_{31} = 0,5 \frac{q\lambda^4}{K} \dots \dots \dots (\bar{w}_{27})$$

Op deze wijze zijn alle vergelijkingen op te bouwen. Het stelsel vergelijkingen is genoteerd in tabel I (zie blz. 116 en 117).

De hieruit met behulp van een elektronische rekenmachine bepaalde oplossing is vermeld in tabel II.

Tabel II. Verplaatsingen in $q\lambda^4/K$ ($\lambda = 1/7a$).

$w_1 = 83,2289$	$w_{13} = 59,8927$	$w_{25} = 42,3732$
$w_2 = 81,8197$	$w_{14} = 56,5443$	$w_{26} = 40,7655$
$w_3 = 77,8793$	$w_{15} = 55,3466$	$w_{27} = 44,5941$
$w_4 = 72,2690$	$w_{16} = 72,2321$	$w_{28} = 37,3359$
$w_5 = 66,4242$	$w_{17} = 66,2487$	$w_{29} = 31,8817$
$w_6 = 61,7240$	$w_{18} = 59,8976$	$w_{30} = 29,7643$
$w_7 = 58,4810$	$w_{19} = 54,6436$	$w_{31} = 28,2032$
$w_8 = 57,3246$	$w_{20} = 50,9553$	$w_{32} = 20,9734$
$w_9 = 80,3921$	$w_{21} = 49,6216$	$w_{33} = 17,9229$
$w_{10} = 76,3961$	$w_{22} = 59,7801$	$w_{34} = 11,5967$
$w_{11} = 70,6940$	$w_{23} = 52,7368$	$w_{35} = 6,9448$
$w_{12} = 64,7264$	$w_{24} = 46,7134$	$w_{36} = 0$

Tabel I. (derde gedeelte)

	w_{19}	w_{20}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{24}	w_{25}	w_{26}	w_{27}
1									
2									
3									
4									
5									
6	3,375								
7		3,375							
8			1,6875						
9									
10									
11				1					
12	6,75				2,1875				
13	-27	6,75				3,375			
14	6,75	-27	6,75				3,375		
15		6,75	-13,5					1,6875	
16				1					
17	1,542857			-8	3				
18	-23,335714	3,375		2	-17,5	6,75			2,1875
19	65,667857	-27	3,375		6,75	-27	6,75		
20	-27	70,875	-27			6,75	-27	6,75	
21	3,375	-27	33,75				6,75	-13,5	
22				10,542857	-9,085714	1,542857			1
23	6,75			-9,085714	43,442853	-23,335714	3,375		-18,042858
24	-27	6,75		1,542857	-23,335714	65,667857	-27	3,375	6,75
25	6,75	-27	6,75		3,375	-27	70,875	-27	
26						3,375	-27	33,75	
27		6,75	-13,5			6,75			26,523216
28	3,375			1	-18,042858	-27	6,75		-25,167858
29		3,375			9,208933	-27	-27	6,75	3,375
30			1,6875			6,75	6,75	-13,5	
31						3,375			3,375
32							3,375		
33								1,6875	
34									
35									

Tabel I. (vierde gedeelte)

	w_{28}	w_{29}	w_{30}	w_{31}	w_{32}	w_{33}	w_{34}	w_{35}	q^{λ^2}/k
1									0,125
2									0,50
3									0,50
4									0,50
5									0,50
6									0,50
7									0,50
8									0,25
9									0,5
10									1
11									1
12									1
13									1
14									1
15									0,5
16									0,5
17									1
18									1
19	3,375								1
20		3,375							1
21			1,6875						0,5
22									0,5
23	9,208933								1
24	-27	6,75		3,375					1
25	6,75	-27	6,75		3,375				1
26		6,75	-13,5			1,6875			0,5
27	-25,167858	3,375		3,375					0,5
28	73,333925	-27	3,375	-27	10,125				1
29	-27	70,875	-27	6,75	-27	6,75	3,375		1
30	3,375	-27	33,75		6,75	-13,5		1,6875	0,5
31	-27	6,75		33,75	-27	3,375	3,375		0,5
32	10,125	-27	6,75	-27	77,625	-27	-27	10,125	1
33		6,75	-13,5	3,375	-27	33,75	6,75	-13,5	0,5
34		3,375		3,375	-27	6,75	37,125	-27	0,5
35			1,6875		10,125	-13,5	-27	42,1875	0,5

Vervolgens kunnen de momenten (vgl. (13a, 14a)) en de dwarskrachten (vgl. (15a)) uit de berekende verplaatsingen worden bepaald.

Ter illustratie volgen weer enkele voorbeelden.

In de strook ter plaatse van punt 5 (vgl. (13a)):

$$m_x = -3,375K \frac{w_{12} - 2w_5 + w_{12}}{\lambda^2} = 11,4601q\lambda^2 = 0,2338qa^2$$

In de plaat ter plaatse van punt 5:

$$m_x = -K \frac{w_{12} - 2w_5 + w_{12}}{\lambda^2} = 3,3956q\lambda^2 = 0,0693qa^2$$

Op de overgang van strook en plaat ter plaatse van punt 5:

$$m_y = -2 \cdot \frac{K \cdot 3,375K}{K + 3,375K} \frac{w_4 - 2w_5 + w_6}{\lambda^2} = -1,7660q\lambda^2 = -0,0361qa^2$$

Op de overgang van plaat en strook ter plaatse van punt 27:

$$m_x = -2 \cdot \frac{K \cdot 3,375K}{K + 3,375K} \frac{w_{23} - 2w_{27} + w_{28}}{\lambda^2} = -1,3647q\lambda^2 = -0,0278qa^2$$

In het veld 12-5-6-13 (vgl. (14a)):

$$m_{xy} = -3,375K \frac{w_{12} - w_5 + w_6 - w_{13}}{\lambda^2} = -0,4505q\lambda^2 = -0,0092qa^2$$

In het veld 11-4-5-12:

$$m_{xy} = -K \frac{w_{11} - w_4 + w_5 - w_{12}}{\lambda^2} = -0,1228q\lambda^2 = -0,0025qa^2$$

In de strook op het traject tussen punt 12 en 5 (vgl. (15a)):

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{[m_x]_{12} - [m_x]_5}{\lambda} + \frac{-\frac{1}{3,375} [m_{xy}]_{\text{strook}} + [m_{xy}]_{\text{plaat}}}{\lambda} \\ &= [10,5667 - 11,4601 + 0,1335 - 0,1228] \\ &= -0,8827q\lambda = -0,1261qa \end{aligned}$$

In de plaat op het traject tussen punt 12 en 5:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{[m_x]_{12} - [m_x]_5}{\lambda} + \frac{-\frac{1}{3,375} [m_{xy}]_{\text{strook}} + [m_{xy}]_{\text{plaat}}}{\lambda} \\ &= [3,1309 - 3,3956 + 0,1335 - 0,1228] \\ &= -0,2540q\lambda = -0,0363qa \end{aligned}$$

De geconcentreerde dwarskracht langs de rand van de strook tussen punt 12 en 5 bedraagt:

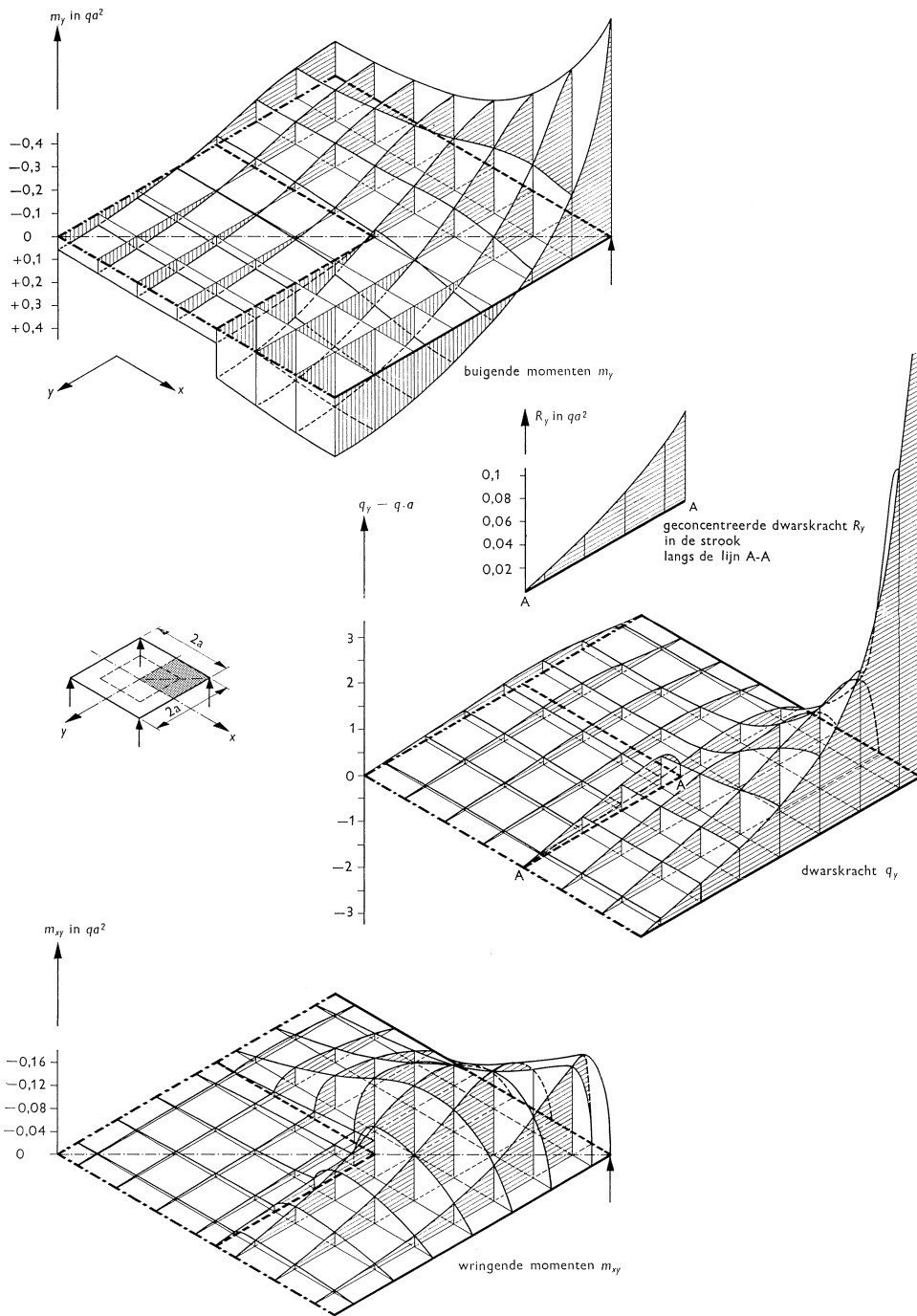


Fig. 10.

$$\begin{aligned}
 R_x &= - \frac{3,375-1}{3,375} [m_{xy}]_{\text{strook}} \\
 &= - \frac{2,375}{3,375} \cdot 0,4505 = -0,317q\lambda^2 = -0,0065qa^2
 \end{aligned}$$

In fig. 10 is het momenten- en dwarskrachtenverloop weergegeven.

Een eerste indicatie omtrent de betrouwbaarheid van de methode kan worden verkregen door een aantal evenwichtscontroles uit te voeren.

Voor het in fig. 9 aangegeven kwadrant ABCD geldt dat voldaan moet zijn aan de volgende evenwichtsvoorwaarde:

$$- \sum_A^B m_x + \sum_D^C m_x = 49q\lambda^2 \cdot 3,5\lambda = 171,5q\lambda^3$$

immers langs de randen van het kwadrant zijn wegens symmetrie de wringende momenten en de dwarskrachten nul.

$$\begin{aligned}
 \text{Uit sommatie van de momenten volgt: } & - \sum_A^B m_x = 121,5639 \\
 & + \sum_D^C m_x = 49,9166 \\
 & \text{totaal} \quad \quad \quad \underline{\quad\quad\quad} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad 171,4805
 \end{aligned}$$

De relatieve fout bedraagt slechts 0,12⁰/100.

Ook andere evenwichtscontroles, met name die voor de dwarskracht, zijn zeer bevredigend in uitkomst gebleken.

4 Modelproef

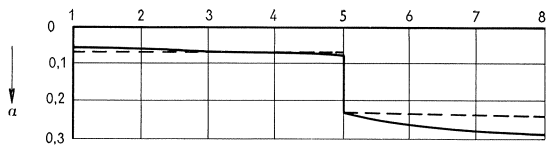
Teneinde de berekening te verifiëren is een model van perspex vervaardigd, waarvan met behulp van de moiré-methode de momenten zijn bepaald.

In fig. 11 zijn enkele resultaten weergegeven.

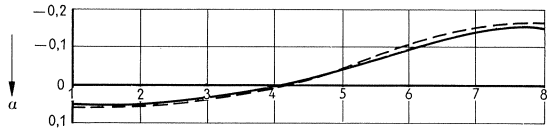
Zoals gezegd is in de berekening $\nu = 0$ gesteld. De overeenstemming met de modelresultaten kan daarom niet volkomen zijn, daar voor perspex $\nu \approx 0,4$ geldt. Uit de met de moiré-methode gevonden krommingen zijn de momenten berekend met $\nu = 0$, zodat in feite niet de momenten maar de krommingen worden vergeleken.

Uitgezonderd in de omgeving van de kolom is de overeenstemming tussen berekening en modelproef zeer goed te noemen.

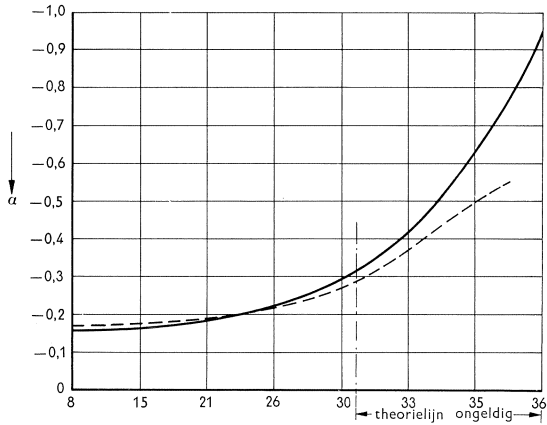
Tengevolge van de relatief grote afmeting van de maaswijdte van het differentienet worden de momenten in de omgeving van de kolom niet nauwkeurig weergegeven. Bovendien is de grootte van de werkelijke ondersteuning niet in rekening gebracht, zodat voor de bepaling van de krachtswerking in de



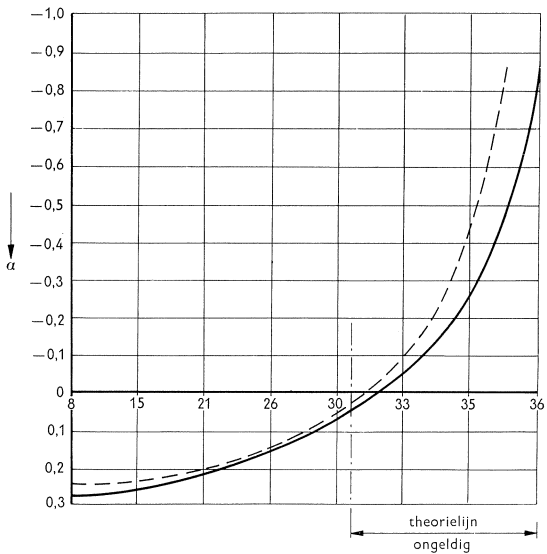
M_x langs de lijn (dwarsmoment)
1-2-3-4-5-6-7-8 (veldstrook)
in $aq a^2$



M_y langs de lijn (langsmoment)
1-2-3-4-5-6-7-8 (veldstrook)
in $aq a^2$



M_y langs de lijn (dwarsmoment)
8-15-21-26-30-33-35-36 (kolomstrook)
in $aq a^2$



M_x langs de lijn (langsmoment)
8-15-21-26-30-33-35-36 (kolomstrook)
in $aq a^2$

Fig. 11. Vergelijking van de momenten volgens uit de berekening (—) en die uit modelonderzoek (----)

omgeving hiervan een aanvullende berekening moet worden uitgevoerd. Hier-voor wordt naar de desbetreffende literatuur verwezen [5, 8, 9].

5 Slotbeschouwing

Uit het bovenstaande moge blijken dat voor de berekening van platen met spronggewijs veranderende stijfheid en met willekeurige randvoorwaarden de differentierekening goede mogelijkheden biedt.

Op verschillende manieren kan aan de methode nog uitbreiding worden gegeven. In onderzoek is bijvoorbeeld hoe voor platen door balken ondersteund een soortgelijke berekening zou kunnen worden opgezet.

Hierbij doen zich nog een aantal problemen voor, met name vormt het invoeren van de wringstijfheid van de balken een moeilijkheid. Indien de belasting wordt gevormd door puntlasten is voorzichtigheid met de verkregen resultaten geboden. Hetzelfde geldt indien de plaat wordt ondersteund door kolommen, speciaal wanneer deze buigende momenten op de plaat uitoefenen. Door netverfijning of door toevoeging van een analytisch oplossingsaandeel kan men trachten de nauwkeurigheid op te voeren.

Tenslotte wil de schrijver gaarne zijn erkentelijkheid betuigen aan verschillende medewerkers van het Stevin-laboratorium (groep Toegepaste Wiskunde) en van het Instituut T.N.O. voor Bouwmaterialen en Bouwconstructies voor hun waardevolle opmerkingen en suggesties.

6 Literatuur

1. GIRKMANN, K., Flächentragwerke, 5e druk – Springer, Wien 1959.
2. TIMOSHENKO, S. and S. WOINOWSKI-KRIEGER, Theory of plates and shells, 2e druk – McGraw-Hill, New York 1959.
3. MARCUS, H., Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten – Springer, Berlin 1924.
4. SOUTHWELL, R. V., Relaxation methods in Engineering Science; Relaxation methods in theoretical physics (in twee banden) – Clarendon Press, Oxford. Van de drie boeken geeft het laatste de toepassing op biharmonische vergelijkingen.
5. WITTEVEEN, J., Strokenvloeren op kolommen – Rapport BI-63-63 Instituut T.N.O. voor Bouwmaterialen en Bouwconstructies 1963.
6. BLAAUWENDRAAD, Ir. J. en Ir. J. WITTEVEEN, Berekening van een plaat met een vrij uitkragend balkon met behulp van differentierekening – Rapport BI-65-34 Instituut T.N.O. voor Bouwmaterialen en Bouwconstructies 1965.
7. WITTEVEEN, J., Onderzoek naar de flenswerking in cirkelvormige platen met variërende stijfheid – Rapport BI-63-61 Instituut T.N.O. voor Bouwmaterialen en Bouwconstructies 1963.
8. Paddestoelvroeren, theorie en modelonderzoek – C.U.R.-rapport 29a, 1965.
9. VREEDENBURGH, Prof. Ir. C. G. J. and O. STOKMAN, Some new elements in the calculation of flat slab floors – Biezeno Anniversary Volume on Applied Mechanics 1953, blz. 252–280.