

R. FILARSKI

INVLOEDSVLAKKEN VOOR DE BEREKENING VAN BUIGENDE MOMENTEN IN DE DEKPLAAT VAN EEN ORTHOTROPE PLAATCONSTRUCTIE *)

U.D.C. 624.041.63: 624.073.74

Een benaderende methode wordt ontwikkeld om uit in de literatuur beschikbare invloedsvlakken voor buigende momenten in enkelvoudige platen, voor orthotrope plaatconstructies de momenten te bepalen via een grafische integratie. De methode richt zich in het bijzonder op het berekenen van buigende momenten veroorzaakt door gelijkmatige partiële belasting der velden.

0 Inleiding

Orthotrope plaatconstructies vinden als rijvloer meer en meer toepassing in de bruggenbouw. Voor de berekening van de buigende momenten in een stalen rijdekplaat werd tot nu toe vaak gebruik gemaakt van het M.A.N. Forschungsheft [1].

Voorwaarde voor de toepassing van deze berekeningsmethode is, dat de belastingbreedte gelijk of bijna gelijk aan de afstand der verstijvingsribben gekozen moet worden. De arbeidseconomie dwingt de constructeur er echter toe een steeds grotere ribafstand toe te passen, waardoor aan de bovengenoemde voorwaarde niet meer altijd voldaan kan worden. Past men de berekeningsmethode van het M.A.N. Forschungsheft toe zonder aan de beginvoorwaarde te voldoen, dan zullen de aldus berekende momenten in de dekplaat sterk afwijken van de werkelijk optredende momenten [2].

Tot nu toe bestond er geen eenvoudige methode om de buigende momenten in de rijdekplaat bij een willekeurige belasting te berekenen. In het navolgende wordt een benaderende methode ontwikkeld om met behulp van invloedsvlakken die buigende momenten in een stalen rijdekplaat met voor de praktijk voldoende nauwkeurigheid op relatief eenvoudige wijze te bepalen.

Tevens zullen transformatieformules worden afgeleid, waardoor de methode ook bruikbaar wordt voor de berekening van orthotrope plaatconstructies in gewapend beton.

*) Gedeelte van het afstudeerwerk, verricht onder leiding van Prof. Ir. A. L. BOUMA en Prof. Ir. A. A. VAN DOUWEN, ter verkrijging van het diploma van civiel ingenieur.

Fig. 1 geeft een schetsmatig beeld van een orthotrope plaat, met de daarbij in dit artikel gebruikte coördinaten en aanduidingen.

Behandeld zullen worden:

het veldmoment

$$M_y \text{ (in } x = y = 0)$$

het veldmoment

$$M_x \text{ (in } x = y = 0)$$

het overgangsmoment

$$M_y \text{ (in } x = 0; y = 1/2l)$$

De invloedsvlakken gelden voor stalen platen ($\nu = 0,3$).

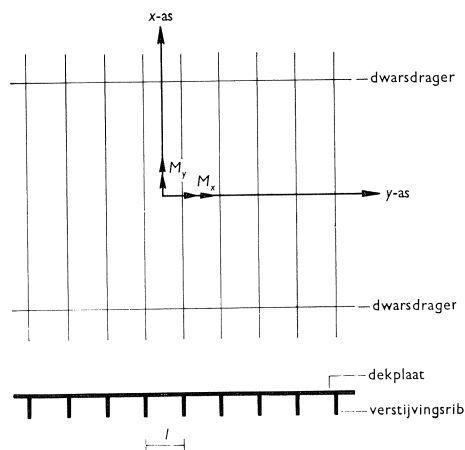


Fig. 1

1 De veldmomenten

Beschouw een over vele starre steunpunten doorgaande plaat, met op alle velden een periodieke gelijkmatig verdeelde belasting $1/2q$ volgens fig. 2.

Stel, men wil de veldmomenten M_y en M_x in punt M bepalen. Men kan de plaat dan in D en E ingeklemd denken (fig. 3). Het berekenen van de veldmomenten M_y en M_x in punt M van de doorgaande plaat van fig. 2 komt nu neer op het bepalen van de veldmomenten M_y en M_x in punt M van de tweezijdig ingeklemde plaat van fig. 3.

Vervolgens wordt dezelfde doorgaande plaat met een alternerende gelijkmatig verdeelde belasting $1/2q$ belast, zie fig. 4. De veldmomenten M_y en M_x in punt M zijn nu gelijk aan de veldmomenten M_y en M_x in punt M van de vrij opgelegde plaat van fig. 5.

Sommeert men de belastingen van fig. 2 en fig. 4, dan vindt men een belastingpatroon volgens fig. 6. De belastingen op de velden BC en FG hebben reeds weinig invloed op de veldmomenten M_y en M_x in punt M; van nog verder af gelegen belastingen is de invloed geheel te verwaarlozen.

Bij deze beschouwingen zijn de ondersteuning star verondersteld; in werkelijkheid zullen bij een orthotrope plaat de verstijvingsribben t.g.v. een belasting echter enigszins doorbuigen. Rekent men met starre ondersteuning, dan vindt men iets te kleine veldmomenten. Berekent men de veldmomenten in punt M van een orthotrope plaat, alsof de belasting geplaatst is volgens fig. 6, terwijl de belasting in werkelijkheid alleen tussen D en E geplaatst is (fig. 8), dan vindt men iets te grote veldmomenten.

De zojuist genoemde invloeden zijn ongeveer even groot en heffen elkaar vrijwel op.

Conclusie: De veldmomenten in de dekplaat van een orthotrope plaat met overspanning l zijn vrijwel gelijk aan het gemiddelde van de veldmomenten in een plaat met twee ingeklemde tegenoverliggende randen resp. een plaat met twee vrij opgelegde tegenoverliggende randen, beide platen van dezelfde overspanning.

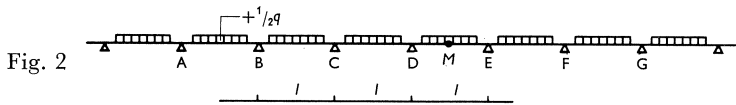


Fig. 2

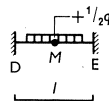


Fig. 3

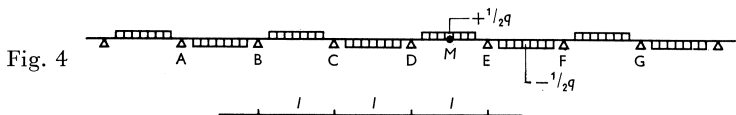


Fig. 4

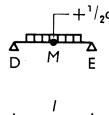


Fig. 5

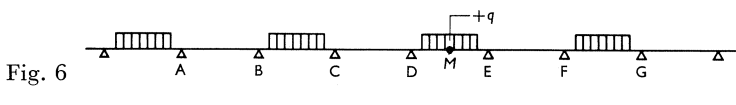


Fig. 6

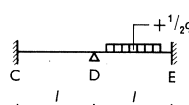


Fig. 7

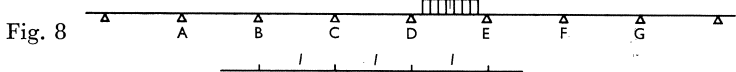


Fig. 8

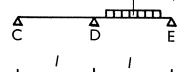


Fig. 9

2 Het overgangsmoment

Het overgangsmoment M_y in punt D in de dekplaat van een doorgaande orthotrope plaat (fig. 8) is vrijwel het *gemiddelde* van het overgangsmoment in een over 3 ondersteuning doorgaande, aan de uiteinden ingeklemde ligger (fig. 7) en dat in een over 3 ondersteuning doorgaande vrij opgelegde ligger (fig. 9).

Een globaal bewijs voor de juistheid van deze veronderstelling is niet gemakkelijk te leveren. Berekeningen voor een groot aantal verschillende belastingen tonen aan, dat het overgangsmoment M_y berekend volgens fig. 9 maximaal 40% groter is, dan het overgangsmoment berekend volgens fig. 8.

Ten opzichte van het bovenbedoelde gemiddelde is de afwijking in ieder geval kleiner dan 20%.

Bij metingen aan een in de Willemsbrug te Rotterdam ingebouwd proefstuk bleek voorts dat de berekende spanningen vrij goed overeenkwamen met de gemeten spanningen.

Het op bovenstaande manier door middeling berekende overgangsmoment is het overgangsmoment bij theoretisch lijnvormige ondersteuning.

Wegens de in werkelijkheid aanwezige 'breedte' van de ondersteuning zal het overgangsmoment over die breedte iets kleiner uitvallen.

3 Invloedsvlakken

Met behulp van wat in 1 en 2 gesteld werd, is de berekening van de belangrijkste momenten in de dekplaat van een orthotrope plaat nu te koppelen aan bekende literatuurgegevens inzake momenten-invloedsvlakken daarvoor.

Invloedsvlakken voor de berekening van *veldmomenten* in een ingeklemde respectievelijk vrij opgelegde plaat vindt men bij PUCHER [3]; invloedsvlakken voor de berekening van *overgangsmomenten* in een over 3 ondersteuning door gaande vrij opgelegde, respectievelijk langs de rand ingeklemde, plaat vindt men bij HOELAND [4].

Uitwerking van berekeningen met behulp van de hierboven genoemde invloedsvlakken is evenwel nog vrij tijdrovend, omdat de invloedsvlakken in de gedaante van 'hoogtelijnen' gegeven zijn.

Met behulp van [3] en [4] zijn nu nieuwe invloedsvlakken samengesteld, opgebouwd uit een groot aantal rechthoeken.

Als voorbeeld wordt het invloedsvlak van het veldmoment M_y van een aan twee lange zijden vrij opgelegde oneindig lange plaat beschouwd. Voor de overige invloedsvlakken is een overeenkomstige berekeningswijze van toepassing.

Volgens de plaattheorie geldt:

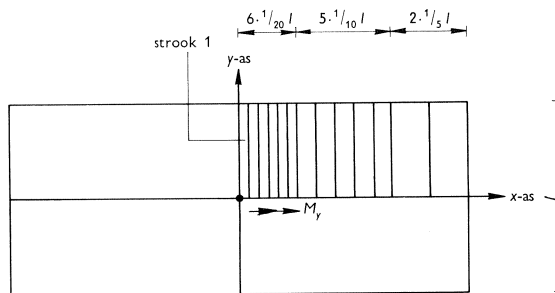
$$M_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

PUCHER [1] geeft invloedsvlakken voor

$$-K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{en} \quad -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Uit symmetrieoverwegingen volgt dat slechts het $1/4$ gedeelte van de plaat beschouwd hoeft te worden. Dit oppervlak wordt verdeeld in 13 stroken (fig. 10), in drie verschillende breedten, variërend van $1/20l$ tot $1/5l$, als l de plaatbreedte is.

Volgens PUCHER [3] geldt $M_y = \beta ql^2$, waarin β een factor is, die met behulp van de door PUCHER gegeven invloedsvlakken bepaald kan worden.



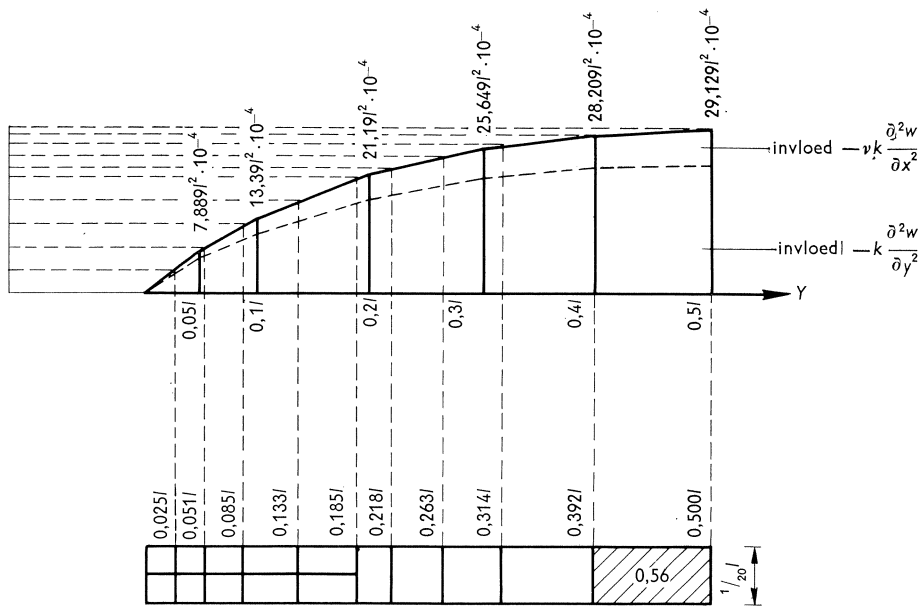


Fig. 11

Met behulp van de integratiemethode van SIMPSON, is β nu uit de invloedsvlakken van PUCHER voor elk der stroken berekend als functie van y . Vervolgens zijn de stroken onderverdeeld in rechthoeken, zodanig dat elke niet gearceerde rechthoek voorstelt $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$, en elke gearceerde rechthoek $\beta = 2 \times$ het in de rechthoek geschreven getal $\times 10^{-4}$. Een voorbeeld betreffende strook 1 vindt men in fig. 11.

In fig. 12 is de verdeling voor alle aldus behandelde stroken gegeven, en voor de duidelijkheid in alle 4 kwadranten getekend. Op deze wijze is een voorstelling ontstaan van het invloedsvlak voor het veldmoment M_y van een tweezijdig vrij opgelegde, oneindig lange plaat. In fig. 13 t/m 17 zijn de invloedsvlakken voor de overige standaard-gevallen weergegeven.

4 Berekening der momenten in de dekplaat van een orthotrope plaat m.b.v. invloedsvlakken

Stel, men wil het veldmoment M_y in een oneindig lange, *vrij opgelegde* plaat bepalen t.g.v. een gelijkmatig verdeelde belasting q binnen een willekeurige omgrenzingsvorm en op een bepaalde plaats. Daarvoor gaat men als volgt te werk:

Teken de vorm der belasting op schaal en op zijn plaats in fig. 12 in. Bepaal het aantal door de belasting omsloten rechthoeken. Een gearceerde rechthoek telt hierbij slechts mee met een factor < 1 , die in de rechthoek staat; de blanco rechthoeken hebben als factor 1.

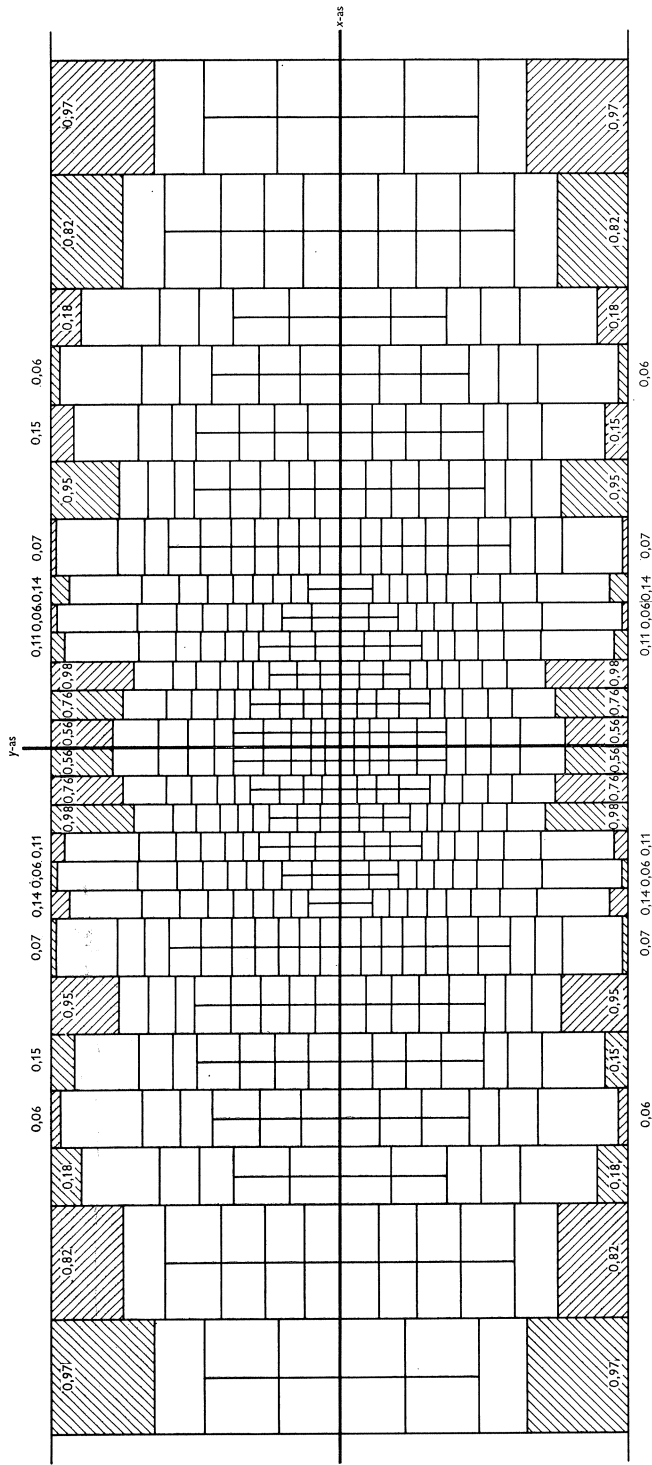
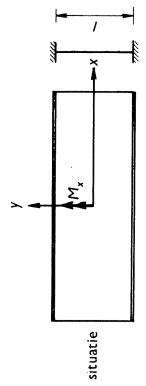


Fig. 12. Invloedsvlak veldmoment, vrij opgelegde plaat.
 $M_y = 2Aql^2 \cdot 10^{-4}$ kgf voor het punt $x = y = 0$
 A = aantal door de belasting omsloten rechthoeken
 q = gelijkmatig verdeelde belasting
 l = plaatbreedte (plaatlengte : plaatbreedte ≥ 3)



Voor het veldmoment M_y geldt nu:

$$M_y = 2Aql^2 \cdot 10^{-4}$$

In deze formule is:

A = aantal door de belastingfiguur omsloten rechthoeken.

q = gelijkmatig verdeelde belasting.

l = plaatbreedte.

Teneinde het veldmoment M_y in een oneindig lange tweezijdig *ingeklemde* plaat te berekenen, gaat men op overeenkomstige wijze te werk met behulp van fig. 13.

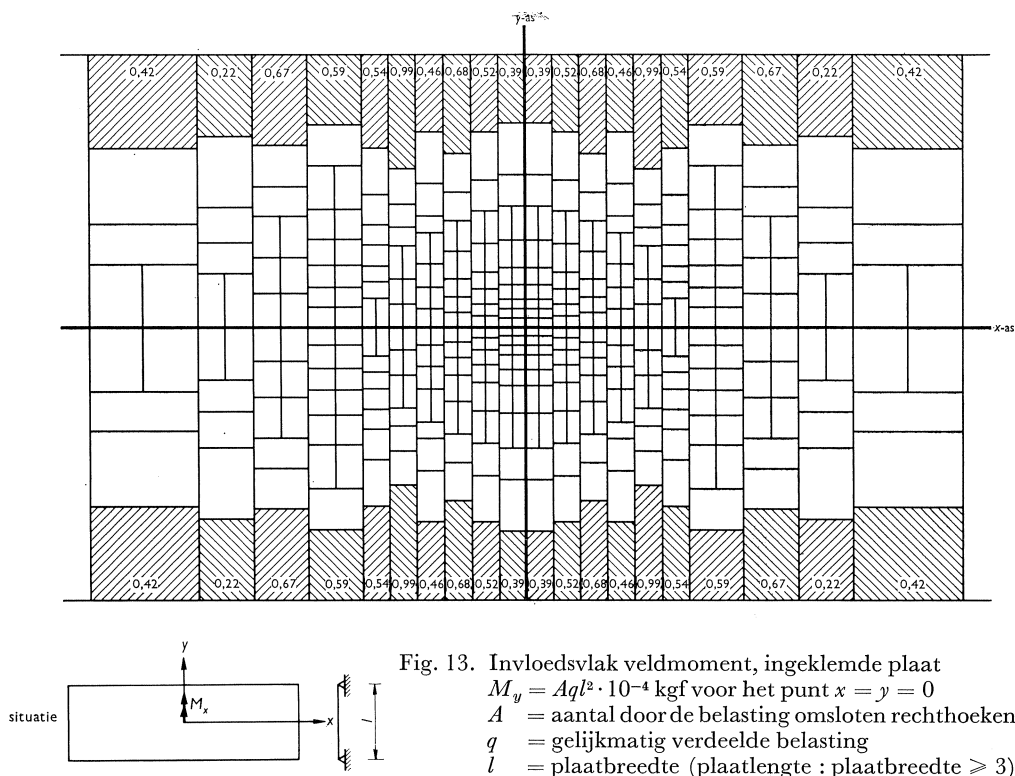


Fig. 13. Invloedsvlak veldmoment, ingeklemde plaat
 $M_y = Aql^2 \cdot 10^{-4}$ kgf voor het punt $x = y = 0$
 A = aantal door de belasting omsloten rechthoeken
 q = gelijkmatig verdeelde belasting
 l = plaatbreedte (plaatlengte : plaatbreedte ≥ 3)

Hier geldt:

$$M_y = Aql^2 \cdot 10^{-4}$$

Overeenkomstig het in 1 gestelde, geldt nu voor het veldmoment M_y in de dekplaat van een orthotrope plaat:

$$M_y = \frac{(2A_{v.o} + A_i)}{2} ql^2 \cdot 10^{-4}$$

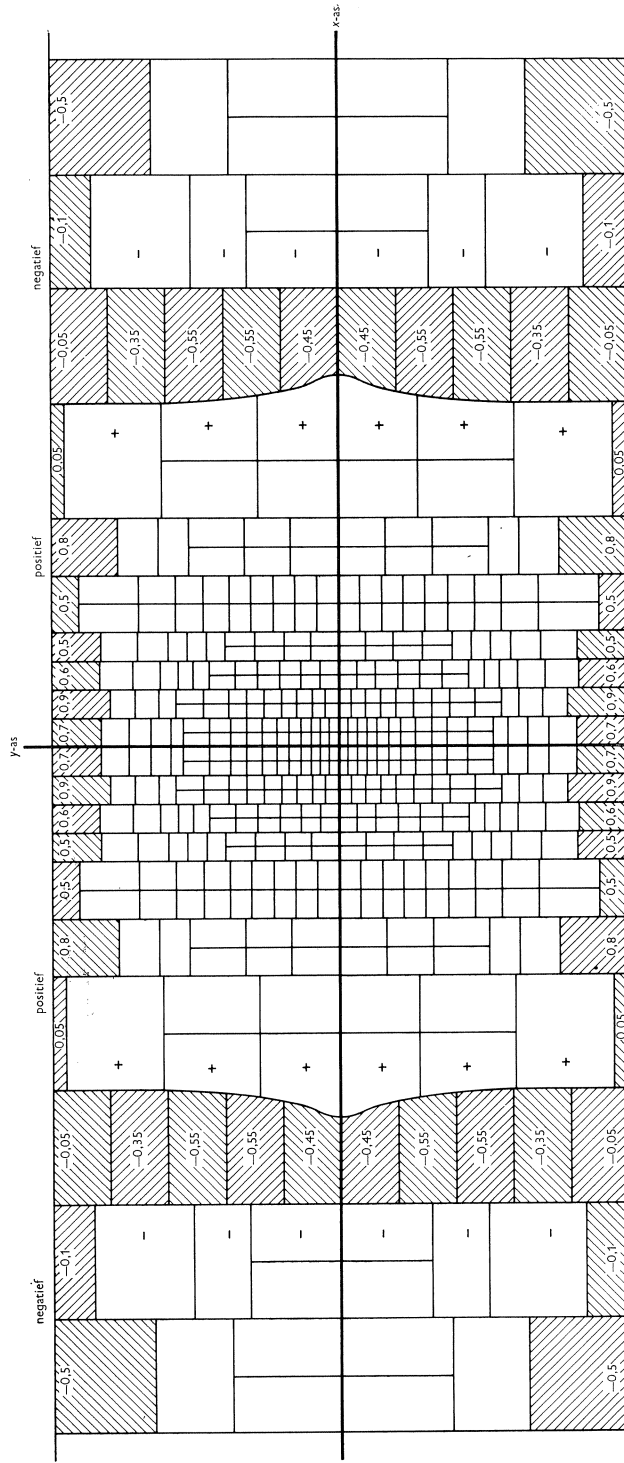
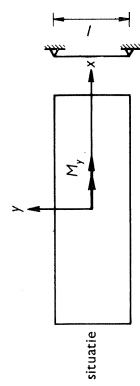


Fig. 14. Invloedsvlak veldmoment, ingeklemde plaat.
 $M_y = Aql^2 \cdot 10^{-4}$ kgf voor het punt $x = y = 0$
 A = aantal door de belasting omsloten rechthoeken
 q = gelijkmatig verdeelde belasting
 l = plaatbreedte (plaatlengte : plaatbreedte ≥ 3)



In deze formule is:

$A_{v.o}$ = aantal door de belastingfiguur omsloten rechthoeken bij een vrij opgelegde plaat, volgens fig. 12.

A_i = aantal door de belastingfiguur omsloten rechthoeken bij een tweezijdig ingeklemde plaat, volgens fig. 13.

q = gelijkmatig verdeelde belasting.

l = afstand der ondersteuningën.

Voor het veldmoment M_x in de dekplaat van een orthotrope plaat is voorts:

$$M_x = \frac{(A_{v.o} + A_i)}{2} ql^2 \cdot 10^{-4}$$

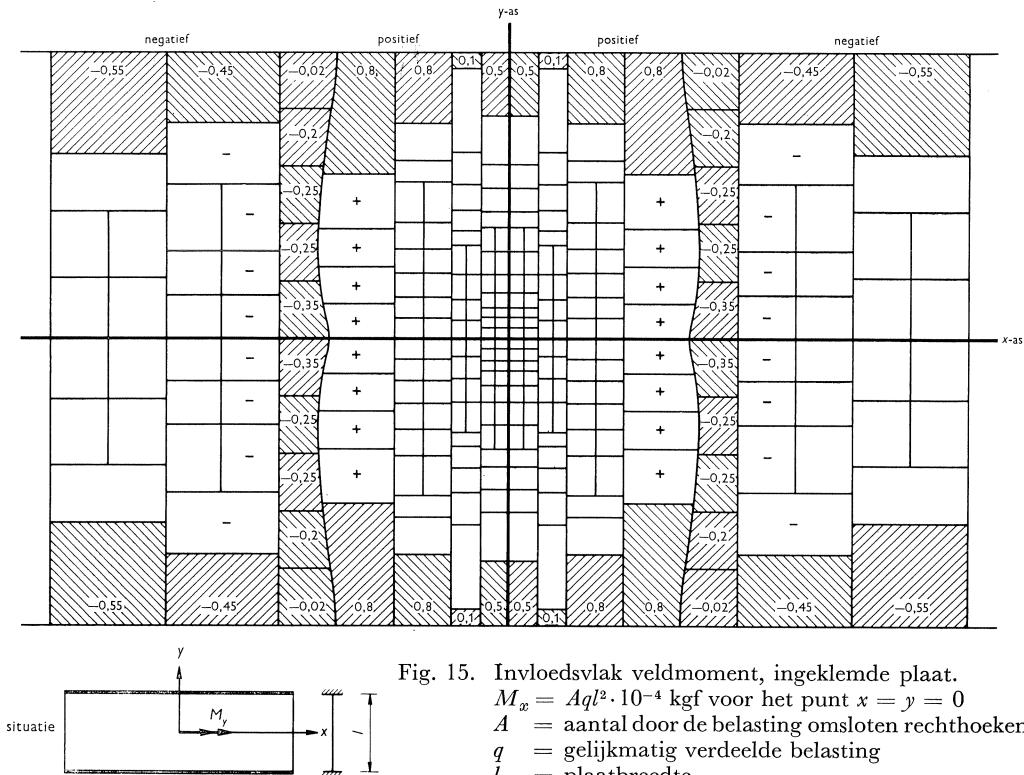
In deze formule is:

$A_{v.o}$ = aantal door de belastingfiguur omsloten rechthoeken bij een vrij opgelegde plaat, volgens fig. 14.

A_i = aantal door de belastingfiguur omsloten rechthoeken bij een tweezijdig ingeklemde plaat, volgens figuur 15.

q = gelijkmatig verdeelde belasting.

l = afstand der ondersteuningën.



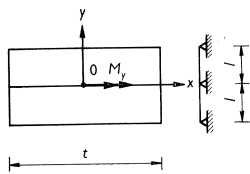
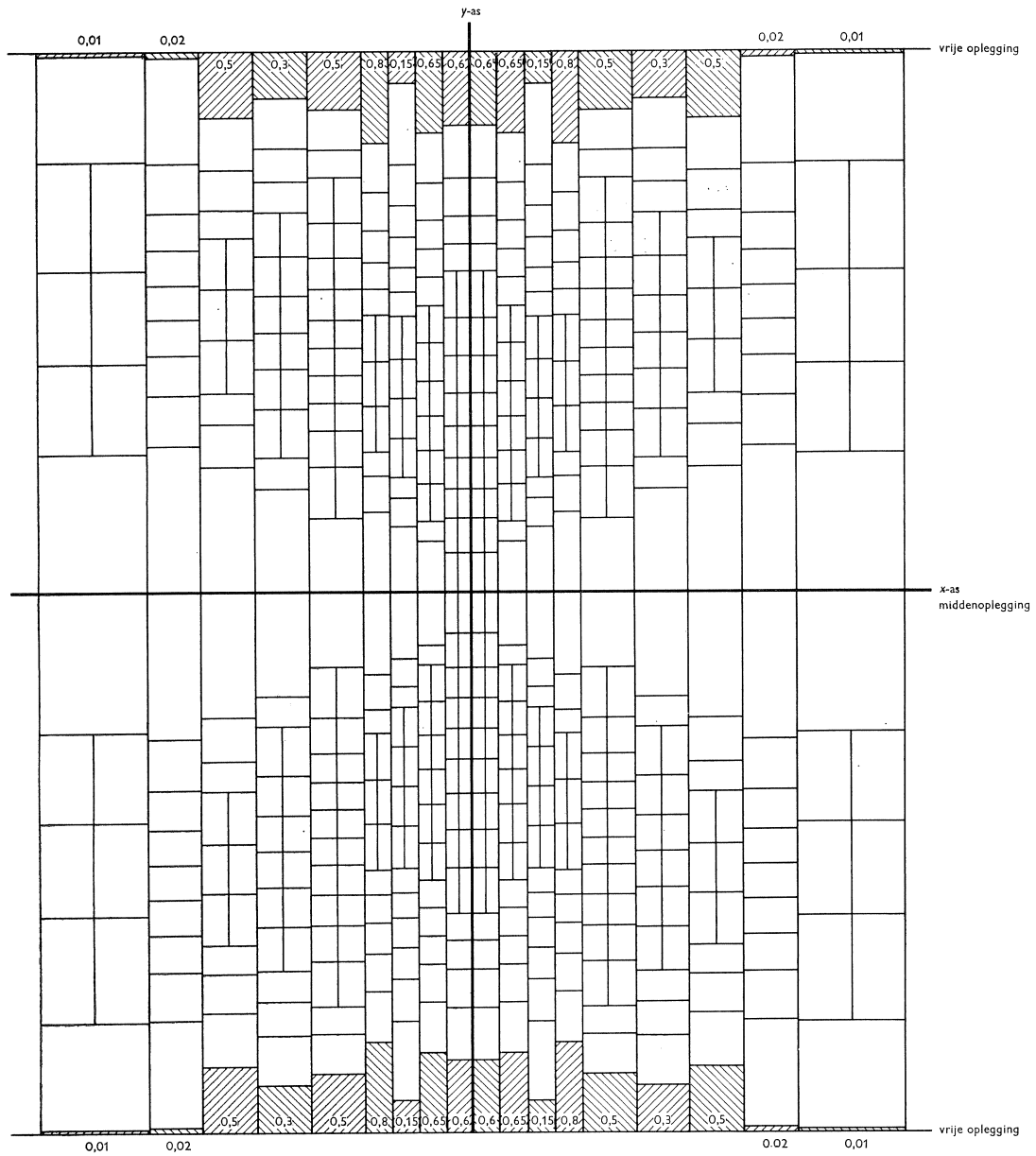


Fig. 16. Invloedsvlak overgangsmoment, vrij opgelegde plaat voor het punt $x = y = 0$.

$$M_y = 2Aql^2 \cdot 10^{-4} \text{ kgf}$$

A = aantal door de belasting omsloten rechthoeken

q = gelijkmatig verdeelde belasting

l = veldlengte ($t : l \geq 3$)

Hierbij moet rekening worden gehouden met het feit, dat het invloedsvlak behalve positieve ook negatieve gedeelten vertoont.

Voor het *overgangsmoment* M_y geldt overeenkomstig het in 2 gestelde en volgens fig. 16 en 17:

$$M_y = \frac{2(A_{v.o.} + A_i)}{2} ql^2 \cdot 10^{-4}$$

In deze formule is:

$A_{v.o.}$ = aantal door de belastingfiguur omsloten rechthoeken bij een over 3 ondersteuning doorlopende vrij opgelegde plaat, volgens fig. 16.

A_i = aantal door de belastingfiguur omsloten rechthoeken, bij een over 3 ondersteuning doorlopende aan de uiteinden ingeklemde plaat, volgens fig. 17.

q = gelijkmatig verdeelde belasting.

l = afstand der ondersteuning.

Hierbij zou een reductie in rekening kunnen worden gebracht wanneer de middenondersteuning „breedte” heeft (zie 2).

5 Afleiding van transformatieformules voor de berekening van orthotrope platen in gewapend beton

In het algemeen gelden de plaatformules:

$$M_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

$$M_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

Voor staal worden deze:

$$M_{ys} = -K_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots \dots \dots (3)$$

$$M_{xs} = -K_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_s \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots \dots \dots (4)$$

Voor beton:

$$M_{yb} = -K_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots \dots \dots (5)$$

$$M_{xb} = -K_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots \dots \dots (6)$$

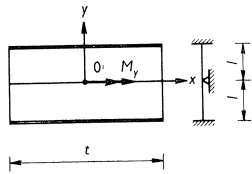
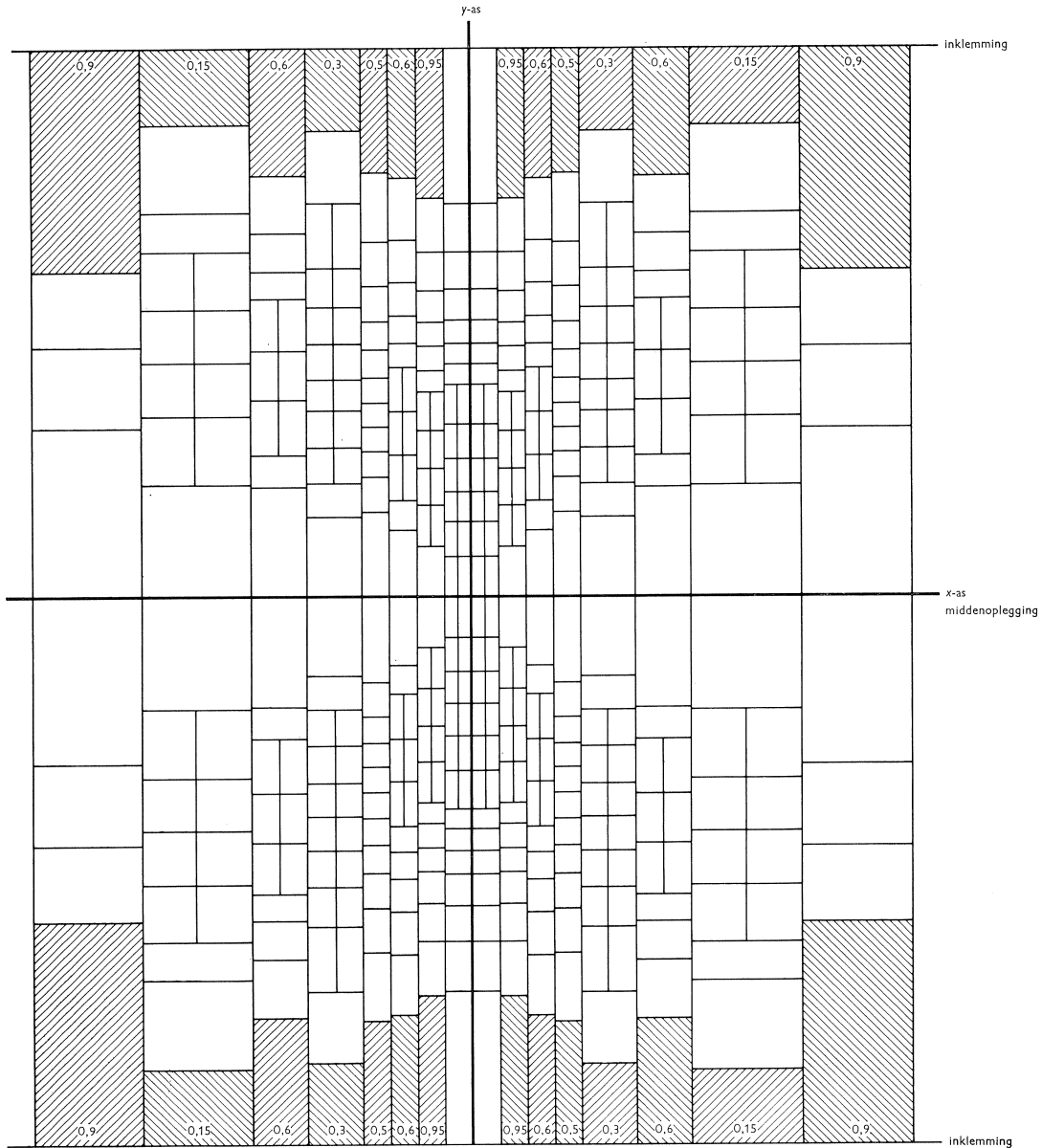


Fig. 17. Invloedsvlak overgangsmoment, ingeklemde plaat voor het punt $x = y = 0$.

$$M_y = 2Aql^2 \cdot 10^{-4} \text{ kgf}$$

A = aantal door de belasting omsloten rechthoeken

q = gelijkmatig verdeelde belasting

l = veldlengte ($t : l \geq 3$)

waarin:

- K_s = buigingsstijfheid staalplaat
- K_b = buigingsstijfheid betonplaat
- M_{ys} en M_{xs} = momenten in het staal
- M_{yb} en M_{xb} = momenten in het beton
- ν_s = coëfficiënt van Poisson, voor staal $\approx 0,3$
- ν_b = coëfficiënt van Poisson, voor beton $\approx 0,2$

De plaatvergelijkingen zijn respectievelijk $K_s \Delta \Delta w_s = q$ en $K_b \Delta \Delta w_b = q$. De platen dragen dezelfde belasting q . Gezien het feit dat in de randvoorwaarden ν niet voorkomt, zijn de doorbuigingsfiguren van de staal- en betonplaat gelijkvormig en geldt:

$$w_b = \frac{K_s}{K_b} w_s \dots \dots \dots (7)$$

waarin w_b = doorbuiging betonplaat;
 w_s = doorbuiging staalplaat.

De oorspronkelijke aanname was die van starre ondersteuning. In hun nabijheid geldt dan:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ en dus volgt met (3), (5) en (7) dat } M_{ys} = M_{yb}$$

Voor de *overgangsmomenten* behoeven dus geen transformatieformules te worden opgesteld.

Voor de *veldmomenten* kan het volgende worden afgeleid:

$$\begin{aligned} M_{ys} &= -K_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - \nu_s K_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \nu_s M_{xs} &= -\nu_s^2 K_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - \nu_s K_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \hline M_{ys} - \nu_s M_{xs} &= -K_s (1 - \nu_s^2) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{aligned}$$

zodat:

$$-\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = \frac{M_{ys} - \nu_s M_{xs}}{K_s (1 - \nu_s^2)} \dots \dots \dots (8)$$

Evenzo heeft men:

$$-\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \frac{M_{xs} - \nu_s M_{ys}}{K_s (1 - \nu_s^2)} \dots \dots \dots (9)$$

Vult men (8) en (9) in (5) in, rekening houdend met (7) dan ontstaat:

$$M_{yb} = + \left\{ \frac{(M_{ys} - \nu_s M_{xs})}{(1 - \nu_s^2)} + \frac{\nu_b (M_{xs} - \nu_s M_{ys})}{(1 - \nu_s^2)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{1 - \nu_s^2} [M_{ys} - \nu_s M_{xs} + \nu_b M_{xs} - \nu_b \nu_s M_{ys}]$$

Met $\nu_s = 0,3$ resp.
 $\nu_b = 0,2$

wordt verkregen:

$$M_{yb} = \frac{M_{ys} - 0,3M_{xs} + 0,2M_{xs} - 0,06M_{ys}}{1 - 0,09} = \frac{0,94M_{ys} - 0,1M_{xs}}{0,91}$$

$$M_{yb} = 1,03M_{ys} - 0,11M_{xs} \dots \dots \dots (10)$$

Op analoge wijze ontstaat verder:

$$M_{xb} = 1,03M_{xs} - 0,11M_{ys} \dots \dots \dots (11)$$

Aldus zijn uitkomsten te verkrijgen, geldig voor een constructie in gewapend beton op grondslag van de berekeningsuitkomsten voor eenzelfde orthotrope constructie in staal.

6 Normaalspanningen

Behalve spanningen t.g.v. buigende momenten treden in de dekplaat ook normaalspanningen op. Deze normaalspanningen ontstaan doordat de dekplaat als bovenflens van de op buiging belaste verstijvingsribben en dwarsdragers fungeert.

De normaalspanningen die door de dwarsdragers in de dekplaat ontstaan zijn meestal zo hoog, dat zij niet verwaarloosd mogen worden.

Nadere gegevens over deze normaalspanningen en de wijze waarop zij berekend worden vindt men in [5].

7 Literatuur

1. PELIKAN, W. en M. ESSLINGER, Die Stahlfahrbahn, M.A.N. Forschungsheft 7 (1956).
2. FILARSKI, R. en A. R. MANUEL, Oriënterend onderzoek naar het gedrag van een orthotrope plaat met polyurethaan slijtlaag onder verkeersbelasting. T.N.O.-rapport no. B-65-10.
3. PUCHER, A., Einflussfelder elastischer Platten. Springer Verlag. 1953.
4. HOELAND, G., Stützmomenten-Einflussfelder durchlaufender Platten. Springer Verlag. 1957.
5. HAWRANEK, A. en O. STEINHARDT, Theorie und Berechnung der Stahlbrücken. Springer Verlag. 1958.