

BENADERINGSMETHODE VOOR HET OVERGANGSMOMENT VAN DOORGAANDE LIGGERS MET VELE VELDEN

U.D.C. 624.041.62: 624.072.23

Analytisch wordt ingegaan op het door R. Filarski in „Invloedsolakken voor de berekening van buigende momenten in de dekplaat van een orthotrope plaatconstructie” (Heron 14, no. 1) gestelde omtrent de benadering van het overgangsmoment van doorgaande liggers door het gemiddelde te nemen van het overgangsmoment van een ligger op 3 steunpunten met vrije en eenzelfde ligger met volledig ingeklemde uiteinden. Deze analyse bevestigt, dat die methode een voor praktische doeleinden goed bruikbaar hulpmiddel is.

0 Inleiding

Dat voor de praktijk de grootte van het overgangsmoment van een ligger op ∞ vele steunpunten met voldoende nauwkeurigheid gelijk is te stellen aan het rekenkundig gemiddelde van het overgangsmoment van een ligger op 3 steunpunten met vrij opgelegde einden en dat van een soortgelijke ligger met vast ingeklemde einden is door R. FILARSKI op grond van berekeningservaring gesteld onder 2 van het voorgaande artikel in dit nummer.

Deze benadering verdient wegens haar eenvoud en wegens haar belang voor de praktijk analytisch getoetst te worden; de navolgende beschouwingen zijn hierop afgestemd, met als conclusie de algehele bevestiging van de bruikbaarheid dezer benadering.

Om de nauwkeurigheid van de bedoelde aanname te beoordelen is uitgegaan van de analytische uitdrukkingen voor de *invloedslijntak* voor het overgangsmoment in de drie gevallen:

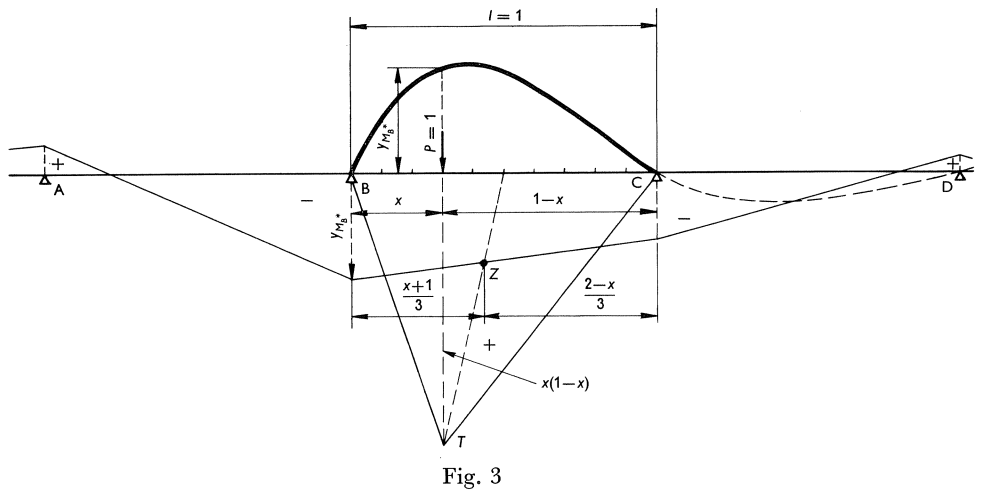
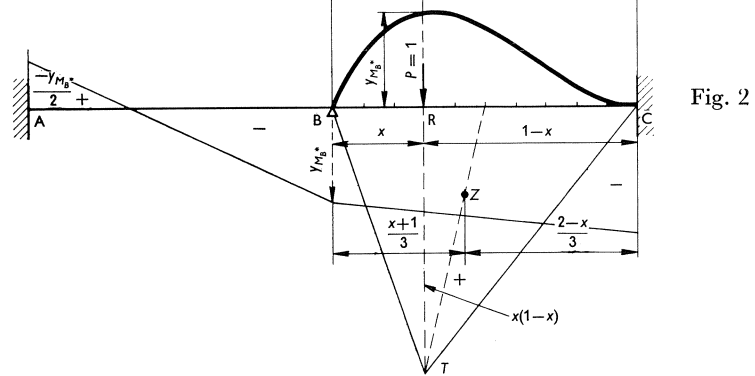
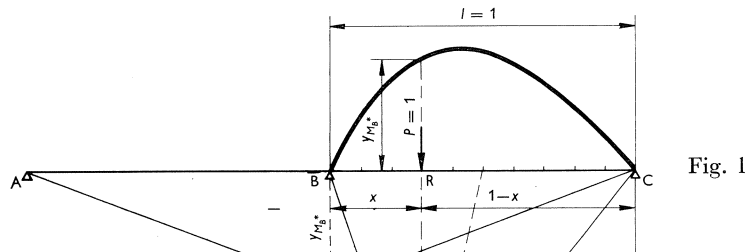
- a. een ligger op 3 steunpunten (A, B, C), met vrij opgelegde uiteinden (A, C);
- b. een ligger als onder a, doch uiteinden vast ingeklemd;
- c. ligger doorgaande over ∞ vele steunpunten.

Zoals bekend, zijn deze invloedslijnen 3e graadsparabooltakken. Alle veldlengten worden gelijk genomen, lengte = 1. De invloedsgrootte voor het overgangsmoment dat ontstaat door de eenheidslast op het aangrenzende liggerveld ter plaatse x ($0 < x < 1$, gerekend van het betreffende steunpunt) wordt als dimensieloze ordinaat y_{MB}^* van de invloedslijn analytisch bepaald.

1 Afleiding van de functies voor y_{MB}^*

- a. Ligger op 3 steunpunten, einden vrij (zie fig. 1)

Het momentenvlak van het vrij opgelegd gedachte liggerdeel BC is $\triangle BCT$



met RT als het door de eenheidslast in R (abscis = x) veroorzaakte liggermoment ter grootte van $x(1-x)$.

Het statische moment (S_C) van $\triangle BCT$ ten opzichte van C is

$$S_C = \frac{x}{3}(1-x)(1-0,5x)$$

De driemomentenvergelijking levert in dit enkelvoudig statisch onbepaalde geval: $4y_{MB}^* = -6S_C$, zodat de invloedsfunctie luidt:

$$y_{MB}^* = -\frac{x}{2}(1-x)(1-0,5x) \dots \dots \dots (1)$$

b. *Ligger op 3 steunpunten, einden ingeklemd* (zie fig. 2)

Het statische moment S_C is hetzelfde als in het vorige geval, en het statische moment S_B (t.o.v. steunpunt B) wordt:

$$S_B = \frac{x}{2}(1-x)\frac{(1+x)}{3} = \frac{x}{6}(1-x)(1+x)$$

Tweevoudige toepassing van de driemomentenstelling is nu nodig om y_{MB}^* te bepalen; wegens de ingeklemde uiteinden is voorts $y_{MA}^* = -1/2 y_{MB}^*$.

Men krijgt op die wijze:

I. $y_{MA}^* + 4y_{MB}^* + y_{MC}^* = -6S_C = -2x(1-x)(1-0,5x)$

ofwel: $3^{1/2}y_{MB}^* + y_{MC}^* = -2x(1-x)(1-0,5x)$

II. $y_{MB}^* + 2y_{MC}^* = -6S_B = -x(1-x)(1+x)$

Na eliminatie van y_{MC}^* uit I en II vindt men tenslotte:

$$y_{MB}^* = -\frac{x}{2}(1-x)^2 \dots \dots \dots (2)$$

c. *Overgangsmoment van een ligger op ∞ vele steunpunten* (zie fig. 3)

Bij een ligger op ∞ vele steunpunten bestaat een *constante* verhouding tussen de opeenvolgende overgangsmomenten van de zich ∞ ver uitstrekkende, onbelaste velden ter weerszijden van het ene belaste veld (zie bijv. KLOPPER, Leerboek der Toegepaste Mechanica, Deel III, 2e druk, blz. 133).

Deze verhouding heeft een negatieve waarde ter grootte $-(2-\sqrt{3})$, bij benadering gelijk aan $-0,26795$ of rond $-0,268$. Dienovereenkomstig is nu in fig. 3:

$$y_{MA}^* = -0,268y_{MB}^* \quad \text{en} \quad y_{MD}^* = -0,268y_{MC}^*$$

Toepassing vervolgens van twee malen de driemomentenvergelijking op de liggerlengten ABC en BCD geeft:

$$\text{I. } \quad y_{MA}^* + 4y_{MB}^* + y_{MC}^* = -6S_C \quad \therefore \quad 3,732y_{MB}^* + y_{MC}^* = -6S_C$$

$$\text{II. } \quad y_{MB}^* + 4y_{MC}^* + y_{MD}^* = -6S_B \quad \therefore \quad y_{MR}^* + 3,732y_{MC}^* = -6S_B$$

S_C en S_B hebben dezelfde waarden als eerder onder b vermeld; invoering dezer waarden in I resp. II en eliminatie van y_{MC}^* levert ten slotte:

$$y_{MB}^* = -\frac{x}{2}(1-x)(1-0,732x) \quad \dots \quad (3)$$

2 Onderlinge vergelijking der uitkomsten (1), (2) en (3)

Als rekenkundig *gemiddelde* van de vergelijkingen (1) en (2) is onmiddellijk te schrijven

$$\text{gem } y_{MB}^* = -\frac{x}{2}(1-x)(1-0,75x) \quad \dots \quad (3a)$$

Hiertegenover luidt (3):

$$y_{MB}^* = -\frac{x}{2}(1-x)(1-0,732x)$$

De nabije verwantschap is duidelijk: slechts binnen de uiterst rechtse haakjes-term is enig verschil in de factor van x op te merken.

Aangetekend zij, dat in plaats van het rekenkundig middelen van (1) en (2) zoals hier is geschied, een nog betere benadering van de formule (3) is te verkrijgen, zo hieraan behoefte bestaat.

Neemt men namelijk $\{0,536 \times (1) + 0,464 \times (2)\}$ dan volgt exact (3). Iets „grover” zal $0,54 \times (1) + 0,46 \times (2)$ leiden tot $y_{MB}^* = -\frac{1}{2}x(1-x)(1-0,730x)$, wat in de factor van de laatste x slechts 0,002 verschilt van de waarde 0,732 in (3).

Uit (3a) en (3) is verder te zien, dat de y -waarden van deze betrekkingen zich verhouden als de desbetreffende laatste haakjestermen, dus als $\frac{1-0,75x}{1-0,732x} = \varphi$.

Over de veldlengte tussen $x = 0$ en $x = 1$ varieert de bedoelde verhouding van $\varphi = 1,000$ tot $\varphi = 0,933$. Zo te zien niet geheel onbetekenend, doch hier staat tegenover dat de betreffende krommen voor $x \rightarrow 1$ kleine ordinaatwaarden vertonen, zodat het aandeel van het invloedsooppervlak aldaar op zichzelf reeds van geringe betekenis is in de opbouw van het overgangsmoment.

3 Aaneengesloten deelbelasting (q) ter lengte (a) op veld BC

De verkregen uitdrukkingen voor de invloedslijntakken van veld BC stellen

in staat om te onderzoeken hoe de onderlinge verhouding is van de desbetreffende maximale belastingsuitwerkingen.

De vergelijkingen (1), (2) en (3) zijn van de vorm

$$y_{MB}^* = -\frac{x}{2}(1-x)(1-\beta x)$$

of als veelterm geschreven:

$$y_{MB}^* = -\frac{x}{2} + \frac{1+\beta}{2}x^2 - \frac{\beta}{2}x^3 \dots \dots \dots (4)$$

De parameter β is afhankelijk van de inklemmingsvoorwaarden bij A en C.

We kiezen ter bepaling van de stand van de deelbelasting over basis a , de abscis van het midden van a , en noemen die m .

De stand waarbij het veroorzaakte overgangsmoment maximaal is heeft tot criterium, dat de begrenzendende ordinaten van de figuur met basis a *onderling gelijke* lengte hebben.

Immers, bij gelijkgerichte verschuiving over dx van de twee ordinaten is de verandering in de grootte van het oppervlak

$$dF = -y_1 dx + y_2 dx$$

Daar voor een maximum $dF/dx = 0$, moeten dus y_1 en y_2 onderling gelijk zijn.

Invoering in (4) van de x -waarden behorende bij m , nl. eenmaal $x_1 = m - a/2$ en de tweede maal $x_2 = m + a/2$, levert 2 vergelijkingen, die van elkaar afgetrokken 0 moeten opleveren.

Na deze bewerkingen en vereenvoudiging ontstaat de betrekking:

$$1 - 2(1+\beta)m + 3\beta m^2 + \frac{\beta a^2}{4} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Deze vierkantsvergelijking in m (c.q. a) levert als bruikbare wortels:

$$m = \frac{(1+\beta) - \sqrt{(1-\beta) + \beta^2(1 - 3/4a^2)}}{3\beta} \dots \dots \dots (6)$$

resp.:

$$a = 2 \sqrt{\frac{2(1+\beta)}{\beta} m - 3m^2 - \frac{1}{\beta}} \dots \dots \dots (7)$$

Als absciswaarde (m) van het midden der maximaal uitwerkende belastinglengte (a) levert (6) nu voor het „gemiddelde” geval ($\beta = 0,75$):

$$m_{\text{gem}} = \frac{1,75 - \sqrt{0,25 + 0,5625(1 - 0,75a^2)}}{2,25} = \frac{14 - \sqrt{52 - 27a^2}}{18} \dots \dots (6a)$$

en voor de ∞ doorgaande ligger ($\beta = 0,732$):

$$m_{\infty} = \frac{4,732 - \sqrt{6 - 3a^2}}{6} = \frac{14,196 - \sqrt{54 - 27a^2}}{18} \dots \dots \dots (6b)$$

Door het op éénzelfde noemerwaarde brengen van deze uitkomsten wijzen de tellers uit hoe nabij de overeenstemming der waarden voor m is.

Inderdaad wijkt de ligging van de „maximale” belastingstand in de besproken gevallen zeer weinig onderling af.

Zo is bij	$a = 0,3$	$0,5$	$0,7$
	$m_{\text{gem}} = 0,38663$	$0,40406$	$0,43185$
	$m_{\infty} = 0,38971$	$0,40679$	$0,43394$

Voor praktische doeleinden zijn deze verschillen in grootte van m geheel te verwaarlozen, evenals het verschil in grootte van het erdoor bepaalde maximum oppervlak volgens elk dezer oplossingen.

4 Analytische uitdrukking voor F_{max}

Uit de algemene formule (4) is, met inachtnaam van de uitkomst (6), de grootte van het maximum oppervlak (F_{max}) als gevolg van de gevonden ongunstigste stand (m) der belastinglengte (a) te berekenen. Van deze bewerking luidt de uitkomst:

$$F_{\text{max}} = \frac{a}{48} \{ 24m + 4a - 2(1 + \beta)(12m^2 + 4am + a^2) + \beta(24m^3 + 12m^2a + 6ma^2 + a^3) \} \dots (8)$$

Door vermenigvuldiging van F_{max} met $-ql^2$ (q = belastinggrootte per strekkende lengte-eenheid, l = de veldlengte in dezelfde lengte-eenheid uitgedrukt) wordt ten slotte de grootte van het gezochte maximum overgangsmoment gevonden.

Daar (8) zowel m als a bevat, en a meestal wel gegeven zal zijn, dient voordat (8) kan worden uitgeschreven de waarde van m te worden bepaald volgens (6).

Vergelijking (7) kan soms van nut zijn, nl. in het geval dat men wil nagaan welke grootte a moet hebben om bij een gegeven ligging van m het maximale moment te veroorzaken. Hierbij zij nog opgemerkt, dat de waarden van m tussen vrij enge grenzen besloten liggen, nl. de absciswaarde van de top der betreffende invloedslijn, en het midden van zijn basis, de veldlengte. Voor het geval van verg. (3a) bijv. zijn deze grenswaarden 0,377 en 0,500.

5 Grafisch-analytische bepaling van F_{max}

Aangenomen wordt, dat de „gemiddelde” invloedslijn in tekening is gebracht door puntsgewijze berekening volgens regelmatige abscisintervallen (bijv. 0,1) met behulp van verg. (3a). (Zie fig. 4). Nu volgen de bewerkingen:

- 1e stap: bereken m uit a , volgens (6a);
 2e stap: bereken de grootte van de beginordinaat (y_1) van de belaste lengte (a) ter plaatse $x = m - a/2$ door uitwerking van verg. (3a) met deze x -waarde;

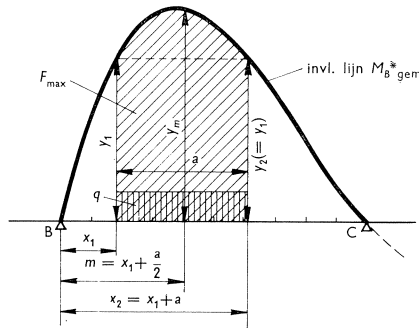


Fig. 4

In de invloedslijnfiguur trekt men de aldus bepaalde ordinaat ter plaatse $x = m - a/2$. Verder trekt men de (evengroot uitvallende) ordinaat (y_2) ter plaatse $x = m + a/2$. Het gezochte invloedsooppervlak is nu vastgelegd.

3e stap: bereken de ordinaatgrootte (y_m) behorende bij het midden van a , wederom met verg. (3a) door hierin $x = m$ in te voeren.

De regel van SIMPSON levert nu:

$$F_{\max} = \frac{y_1 + y_2 + 4y_m}{6} \cdot a, \quad \text{of,} \quad \text{daar } y_1 \equiv y_2$$

$$F_{\max} = \frac{y_1 + 2y_m}{3} \cdot a \dots \dots \dots (9)$$

Het produkt $-F_{\max} \times ql^2$ levert dan de grootte van het gezochte maximale overgangsmoment in de daarvoor geldende eenheden.

6 Bijkomende aspecten

Waar in het vorenstaande sprake is van statisch onbepaalde liggervelden zal – onder dezelfde abstractie en uitbreiding tot het onderwerp van de doorgaande orthotrope plaat zoals behandeld in het voorgaande artikel van R. FRLARSKI – het over *liggers* bij deze analytische beschouwing vermelde mutatis mutandis van nat kunnen zijn bij het berekenen van *orthotrop platens*.

Of men te maken heeft met uitvoering in staalconstructie (draagvloer en ondersteuningsribben met geringe dikte-afmetingen) dan wel als betonplaat-liggerconstructie met haar zwaarder aspect, in wezen treden weinig markante verschillen op. Slechts daar, waar, zoals reeds door de genoemde auteur is aangevoerd, de ondersteuningsribben aan de plaat meer oplegbreedte bieden

dan verwaarloosbaar om als lijnoplegging te gelden, zal de werkelijkheid niet meer met deze theorie in overeenstemming kunnen zijn. De afwijkingen die hierbij optreden blijven echter in de meest voorkomende gevallen binnen redelijke grenzen en leveren voor de praktijk geen bezwaar op.

Tot besluit de opmerking, dat de vorenstaande aanvullende beschouwingen – zoals in de Inleiding reeds aangegeven – in beginsel bedoeld zijn om de theoretische achtergrond te verkennen van de vondst van de genoemde auteur: de eenvoudige methode van benadering van het overgangsmoment van doorgaande liggers. De bruikbaarheid van het door hem gestelde als hulpmiddel voor de praktijk is door deze analyse volledig bevestigd kunnen worden.