

HET ELEKTRONISCH BEREKENEN VAN RUIMTELIJKE STAAFCONSTRUCTIES, MET BIJZONDERE TOEPASSING OP EEN HOGE WAND

U.D.C. 624.022. 4:
624.032.22:
624.042.12:
624.042.41.

Een bij het Instituut TNO voor Bouwmaterialen en Bouwconstructies vervaardigd programma voor het berekenen van ruimtelijke staafconstructies wordt beknopt besproken.

In deel I wordt aangegeven hoe het programma is opgebouwd, wat in rekening kan worden gebracht (buiging, torsie, normale rek, zetting van steunpunten, enz.) en welke toepassingsmogelijkheden in de praktijk kunnen bestaan.

In deel II, dat zonder bezwaar los van het eerste deel kan worden gelezen, wordt als een bijzondere toepassing een praktijkvoorbeeld, zijnde een hoge wand met openingen (windschijf) behandeld. Het zal blijken dat hiervoor de onderhavige methode in sommige opzichten voordelen heeft boven de gebruikelijke analytische methode van Beck en Rosman.

0 Inleiding

Het aantal mogelijkheden om mechanica-vraagstukken met behulp van een elektronische rekenmachine te berekenen neemt voortdurend toe.

Sommige vraagstukken die tot voor kort alleen oplosbaar waren als men de constructie eerst vergaand schematiseerde, kunnen nu vrij exact worden berekend.

Veelal wordt zo het toepassingsgebied van een rekenmethode verruimd, soms is ook de wijze van berekenen zelf geheel anders geworden.

Elektronisch rekenen leidt bijvoorbeeld al spoedig tot het toepassen van matrixrekening. Dit brengt mee dat klassieke staticaproblemen nu opnieuw moeten worden geformuleerd in matrixnotatie. In een der vorige nummers van Heron [1] werd uiteengezet hoe dit kan geschieden voor schaalconstructies. Hoe dit verloopt voor een ruimtelijke staafconstructie wordt in dit artikel in het kort aangegeven en toegelicht.

De verhandeling bestaat in beginsel uit twee delen die afzonderlijk van elkaar kunnen worden gelezen.

In deel I wordt nagegaan hoe een staafprobleem moet worden beschreven en genoteerd om een programmeerbaar geheel te verkrijgen. De behandeling is zo algemeen mogelijk opgezet en omvat ook constructies waarin de staven excentrisch zijn aangesloten terwijl voorts in het algemeen rekening wordt gehouden met de vervorming door normaalkrachten, door buigende momenten in de twee hoofdtraagheidsrichtingen van de staafdoorsnede en door wringende

momenten. Alleen de vervorming ten gevolge van dwarskrachten wordt niet in de beschouwing betrokken.

Het is mogelijk aan een willekeurig knooppunt een verplaatsing voor te schrijven (bijv. zettingen van steunpunten).

De uiteenzettingen van dit eerste deel worden afgesloten met het aangeven van enige toepassingsmogelijkheden van het vervaardigde programma op het gebied van staal- en betonconstructies.

In het tweede deel wordt het probleem van een als windschijf dienende hoge wand met openingen behandeld. Deze constructie verdient, wegens haar toepassing in de huidige hoogbouw, bijzondere aandacht. Diverse berekeningsmethoden zijn voorgesteld [2], [3], [4]. Als voorbeeld is de hoge wand vooral geschikt om uit te doen komen hoe een constructie, die op het eerste gezicht niet geschikt lijkt voor het staafconstructie-programma, er toch goed mee kan worden berekend.

De nauwkeurigheid is minstens even groot als die welke wordt bereikt met de analytische methoden volgens BECK, ROSMAN en GOESELNIKOW, terwijl zal blijken, dat meer invloeden in rekening kunnen worden gebracht.

Deel I

OPZET EN MOGELIJKHEDEN VAN HET PROGRAMMA VOOR STAAFCONSTRUCTIES

1 Beschrijving van de methode en het programma

1.1 Basis en gang van de berekening

De krachtsverdeling in een ruimtelijke staafconstructie kan worden berekend met behulp van de *methode van onbekende verplaatsingen*. De theoretische grondslagen van deze werkwijze zijn o.a. behandeld in het artikel van Ir. H. W. Loof en medewerkers in Heron 12 (1964) no. 2, en wel in paragraaf 4: „Matrixberekening van constructies volgens de verplaatsingsmethode”. Voor ruimtelijke staafconstructies wordt in het navolgende de theorie nader uitgewerkt.

De beschouwde constructie bestaat uit rechte staven die in knooppunten onderling verbonden zijn. In eerste aanleg wordt ondersteld dat de staven prismatisch zijn en dat zij in de knooppunten centrisc en in alle richtingen vast aan elkaar zijn verbonden. Een staaf kan dan in het algemeen op een knooppunt een normaalkracht, twee dwarskrachten, twee buigende momenten en een wringend moment uitoefenen. De belasting in de vorm van krachten en momenten grijpt in de knooppunten aan. Deze voorlopige vereenvoudigende aannamen beïnvloeden de methode niet wezenlijk maar maken het bespreken iets overzichtelijker.

Het is nl. eenvoudiger achteraf aan te geven welke veranderingen nodig zijn

als zich complicaties voordoen, zoals bijv. niet-centrische aansluiting, zettingen van steunpunten, niet-prismatische staven enz., dan uit te gaan van alles bestrijkende uitgangsvoorwaarden en hieruit achteraf naar behoefte te schrappen.

De verplaatsingen (inclusief verdraaiingen) van de knooppunten zijn onbekenden in de berekening. Het blijkt mogelijk een stelsel onafhankelijke lineaire vergelijkingen op te stellen waaruit na oplossing de onbekende verplaatsingen kunnen worden gevonden. Aldus zijn dan van iedere staaf de vervormingen bekend. De in de staven heersende krachten en momenten worden uit die vervormingen afgeleid; als dit voor iedere staaf is gebeurd, is de berekening in principe voltooid.

Als gevolg van de belasting zal in het algemeen een knooppunt in drie onderling loodrechte richtingen (x , y en z) verplaatsen en verdraaien. Een knooppunt kan dus 6 verplaatsingscomponenten (3 verplaatsingen en 3 rotaties) bezitten. De mogelijkheid van het optreden van een verplaatsingscomponent wordt een kinematische vrijheidsgraad van de constructie genoemd. Sommige verplaatsingsmogelijkheden kunnen zijn uitgesloten door de opleggingswijze. Het totaal aantal kinematische vrijheidsgraden van de staafconstructie is dus 6 maal het aantal knooppunten of minder.

Van alle voorkomende knooppunten tezamen kunnen de vrije verplaatsingscomponenten in één gezamenlijke verplaatsingsvector \mathbf{v} voor de gehele constructie worden gerangschikt.

In elk knooppunt worden alle krachten en momenten ontbonden in dezelfde drie onderling loodrechte richtingen die voor de verplaatsingen gelden. De belastingscomponenten van alle knooppunten worden weer in één belastingsvector voor de gehele constructie ondergebracht.

Tussen de verplaatsingsvector \mathbf{v} en de belastingsvector \mathbf{k} bestaat de relatie:

$$\mathbf{Sv} = \mathbf{k} \dots \dots \dots (1)$$

Hierin is \mathbf{S} een vierkante matrix die stijfheidsmatrix genoemd wordt. Uit de wet van Maxwell volgt dat \mathbf{S}^{-1} en daarmee ook \mathbf{S} symmetrisch is ten opzichte van de hoofddiagonaal [1], [6]. De coëfficiënten van de matrix \mathbf{S} hangen af van de geometrie van de constructie, de materiaal- en staafeigenschappen en van de aard van de verbindingen tussen de staven.

Het uit 3 onderdelen bestaande berekeningsverloop omvat dus:

- het opbouwen van het stelsel $\mathbf{Sv} = \mathbf{k}$;
- het oplossen van het stelsel vergelijkingen (1) met de verplaatsingen \mathbf{v} als onbekenden;
- het uit de berekende knooppuntsverplaatsingen afleiden van de grootte der krachten en momenten in de staven.

1.2 *Opbouwen van de stijfheidsmatrix voor volledig vaste verbindingen*

In [6] werd de matrix \mathbf{S} , in navolging van BESSELING [7], opgebouwd met be-

hulp van het principe van minimum potentiële energie. Loof bespreekt in [1] hoe men de matrix op meer directe wijze kan samenstellen. Deze laatste methode zal in dit artikel worden aangehouden.

Van de te berekenen constructie worden eerst alle knooppunten en staven benoemd. Bij de n knooppunten dient men twee soorten te onderscheiden.

De eerste soort bestaat uit knooppunten waarvan de verplaatsingscomponenten vrij zijn (ongelijk nul). Deze worden genummerd van 1 tot en met m . De tweede soort bevat de zogenaamde „starre” punten waarvoor alle zes verplaatsingscomponenten per definitie nul zijn. Deze worden genummerd van $m+1$ tot en met n met als voorwaarde $(m+1 \leq n)$.

Deze knooppunten-nummering geeft nu ook het middel om de staven aan te duiden. De staaf tussen de knooppunten i en j wordt namelijk staaf ij genoemd (eenvoudshalve kan men steeds voor i het laagste nummer per staaf aanhouden). Iedere staaf ij heeft nu twaalf vrijheidsgraden, te weten zes verplaatsingen in elk der punten i en j , welke kunnen worden samengevat in de kolomvector \bar{v}_{ij} :

$$(\bar{v}_{ij})' = (v_i(\bar{x}), v_i(\bar{y}), v_i(\bar{z}), \varphi_i(\bar{x}), \varphi_i(\bar{y}), \varphi_i(\bar{z}), v_j(\bar{x}), v_j(\bar{y}), v_j(\bar{z}), \varphi_j(\bar{x}), \varphi_j(\bar{y}), \varphi_j(\bar{z})) \dots \dots \dots (2)$$

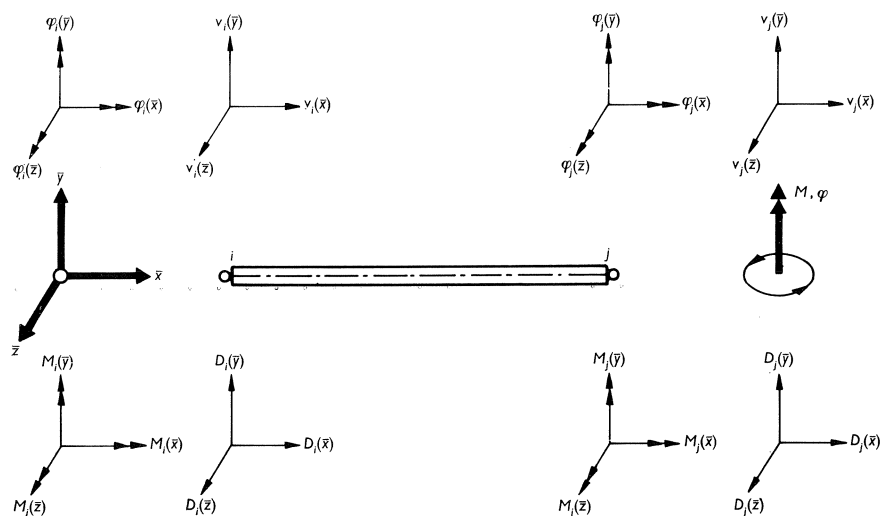


Fig. 1. Notatie van krachten en verplaatsingen van een staaf.

Zoals hier genoteerd en verder aangeduid in fig. 1 zijn de verplaatsingen betrokken op een rechthoekig assenstelsel $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ dat bij de staaf ij hoort. Voor de in fig. 1 aangegeven zin worden de verplaatsingen positief gerekend.

De \bar{x} -as valt samen met de staafas en loopt in positieve richting van i naar j . De \bar{y} - en \bar{z} -as liggen alsdan in het vlak van de einddoorsnede i . Indien de hoofdtraagheidsmomenten ongelijk zijn, wordt de ligging van de assen nader be-

paald door te stellen dat de \bar{y} -as moet vallen langs de hoofdtraagheidsas waarvoor de traagheidsstraal het grootst is en de \bar{z} -as langs de andere hoofdtraagheidsas. De positieve zin langs de assen wordt zodanig gekozen, dat het $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$ -assenstelsel rechtsdraaiend is.

Een staaf in de ruimte heeft in het algemeen zes vervormingsparameters. Hieronder worden verstaan die verplaatsingsgrootheden welke alle vervormingen voor de gehele staaf vastleggen.

Voor een staaf die aan één uiteinde „star” wordt vastgehouden, bestaan de bedoelde zes parameters bijvoorbeeld uit de drie onderling loodrechte verplaatsingen en de drie rotaties van het vrije uiteinde.

Voor een staaf die voorkomt in een constructie met meerdere staven en waarvan dus beide uiteinden kunnen verplaatsen, kan men (dit voorbeeld voor ogen houdend) als vervormingsparameters het verschil nemen van de overeenkomstige verplaatsingen en rotaties in beide knooppunten.

Door velen wordt dit inderdaad zo gedaan. Bij het kiezen van de vervormingsparameters kan men echter ook denken aan een ligger op twee steunpunten. In de figuren 2a en 2b is voor zo'n staaf de vervormde toestand in beeld gebracht. In deze figuren wordt de buigingstoestand geheel beheerst door de hellingsverandering $\varphi(i)$ en $\varphi(j)$ in elk der uiteinden.

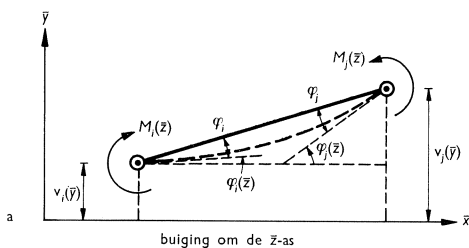


Fig. 2a

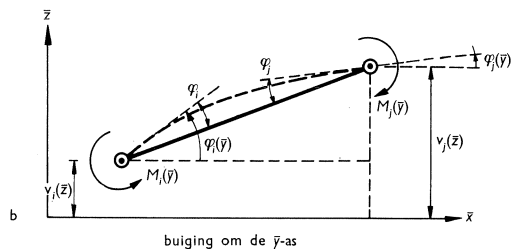


Fig. 2b

Deze twee grootheden zullen hier worden aangehouden als vervormingsparameters voor buiging in een bepaalde hoofdtraagheidsrichting.

Voor de twee hoofdrichtingen samen geeft dit totaal vier vervormingsparameters.

Voor de normaalkrachtvervorming en de wringing is er slechts één mogelijkheid. Voor de normaalkrachtvervorming wordt als parameter aangehouden de verandering van de staaf lengte en voor de wringing het verschil in hoekverdraaiing $\varphi(\bar{x})$ van de beide uiteinden.

Al deze parameters worden verzameld in een vector \mathbf{e} . Het eerste element hiervan betreft de lengteverandering, het tweede en derde de buiging om de \bar{z} -as, het vierde en vijfde de buiging om de \bar{y} -as en het zesde de wringing.

Uit fig. 2 moge duidelijk zijn dat de 6 vervormingsparameters uit \mathbf{e} alle kunnen worden uitgedrukt in de 12 verplaatsingsgrootheden (elementen van \mathbf{v}) die bij een staaf horen. Dit verband kan worden uitgedrukt met behulp van een combinatiematrix $\bar{\mathbf{C}}_{ij}$ van 6 rijen en 12 kolommen:

$$\bar{\mathbf{e}}_{ij} = \bar{\mathbf{C}}_{ij} \bar{\mathbf{v}}_{ij} \dots \dots \dots (3)$$

In een voor zichzelf sprekend schema geplaatst t.o.v. de vector \mathbf{e}_{ij} en \mathbf{v}_{ij} is de matrix:

$$\bar{\mathbf{e}}_{ij} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} v_i(\bar{x}) & v_i(\bar{y}) & v_i(\bar{z}) & \varphi_i(\bar{x}) & \varphi_i(\bar{y}) & \varphi_i(\bar{z}) & v_j(\bar{x}) & v_j(\bar{y}) & v_j(\bar{z}) & \varphi_j(\bar{x}) & \varphi_j(\bar{y}) & \varphi_j(\bar{z}) \end{pmatrix}$$

$$= \bar{\mathbf{C}}_{ij} \dots \dots (4)$$

Hierin is l_{ij} de lengte van de staaf.

Alle krachten en momenten kunnen in de vervormingsparameters worden uitgedrukt.

De normaalkracht is

$$D(\bar{x}) = \frac{EF}{l_{ij}} e_1$$

Uit fig. 2a kan verder worden afgeleid:

$$M_i(\bar{z}) = \frac{4EI(\bar{z})}{l_{ij}} e_2 - \frac{2EI(\bar{z})}{l_{ij}} e_3$$

$$M_j(\bar{z}) = \frac{-2EI(\bar{z})}{l_{ij}} e_2 + \frac{4EI(\bar{z})}{l_{ij}} e_3$$

Evenzo uit fig. 2b:

$$M_i(\bar{y}) = \frac{4EI(\bar{y})}{l_{ij}} e_4 - \frac{2EI(\bar{y})}{l_{ij}} e_5$$

$$M_j(\bar{y}) = \frac{-2EI(\bar{y})}{l_{ij}} e_4 + \frac{4EI(\bar{y})}{l_{ij}} e_5$$

Het wringend moment is:

$$M(\bar{x}) = \frac{GI(\bar{x})}{l_{ij}} \cdot e_6; \quad \text{met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

De normaalkracht, de buigende momenten aan de uiteinden en het wringende moment worden gecombineerd tot een krachtenvector $\bar{\mathbf{k}}_{ij}$.

$$\bar{\mathbf{k}}_{ij} = (D(\bar{x}), M_i(\bar{z}), M_j(\bar{z}), M_i(\bar{y}), M_j(\bar{y}), M(\bar{x})) \dots \dots \dots (5)$$

Tussen deze krachtenvector van 6 elementen en de vervormingsvector $\bar{\mathbf{e}}$ bestaat een éénduidige relatie, als hiervoor is afgeleid. In matrixnotatie luidt deze betrekking:

$$\bar{\mathbf{k}}_{ij} = \bar{\mathbf{S}}_{ij} \bar{\mathbf{e}}_{ij} \dots \dots \dots (6)$$

Hierin is de matrix $\bar{\mathbf{S}}_{ij}$ een vierkante zes bij zes matrix:

$$\bar{\mathbf{S}}_{ij} = \begin{pmatrix} S_{\bar{x}\bar{x}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4S_{\bar{z}} & -2S_{\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2S_{\bar{z}} & 4S_{\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4S_{\bar{y}} & -2S_{\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2S_{\bar{y}} & 4S_{\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{\bar{x}} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

waarin

- $S_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{EF}{l_{ij}} =$ normaalstijfheid in \bar{x} -richting
- $S_{\bar{z}} = \frac{EI(\bar{z})}{l_{ij}} =$ stijfheid tegen buiging om de \bar{z} -as
- $S_{\bar{y}} = \frac{EI(\bar{y})}{l_{ij}} =$ stijfheid tegen buiging om de \bar{y} -as
- $S_{\bar{x}} = \frac{GI(\bar{x})}{l_{ij}} =$ stijfheid tegen wringing om de \bar{x} -as

Zoals hier beschreven zijn de vectoren $\bar{\mathbf{v}}_{ij}$, $\bar{\mathbf{e}}_{ij}$, $\bar{\mathbf{k}}_{ij}$ en de matrix $\bar{\mathbf{S}}_{ij}$ betrokken op het assenstelsel \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} dat bij een willekeurige staaf ij hoort. Voor de gehele constructie zullen niet alle staven dezelfde oriëntatie in de ruimte hebben en er zijn dus verschillende coördinatensystemen \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} . De beweging van iedere staaf zal ook beschreven worden ten opzichte van een coördinatenstelsel x , y , z dat voor de gehele constructie geldt. Dit algemeen geldige assenstelsel is ook nodig om de plaats van de knopen in de ruimte vast te leggen. De vector van de verplaatsingen van de knooppunten t.o.v. dit assenstelsel wordt met \mathbf{v} (zonder overstreping) aangeduid.

De verplaatsingen $\bar{\mathbf{v}}_{ij}$ ten opzichte van het staafstelsel \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} kunnen nu worden afgeleid door een transformatie van de verplaatsingen \mathbf{v}_{ij} t.o.v. het algemeen stelsel x , y , z met behulp van de matrix \mathbf{T}_{ij} .

$$\bar{\mathbf{v}}_{ij} = \mathbf{T}_{ij} \mathbf{v}_{ij} \dots \dots \dots (8)$$

De vierkante (twaalf bij twaalf) transformatiematrix is:

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \text{ waarin } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\bar{x},x), \cos(\bar{x},y), \cos(\bar{x},z) \\ \cos(\bar{y},x), \cos(\bar{y},y), \cos(\bar{y},z) \\ \cos(\bar{z},x), \cos(\bar{z},y), \cos(\bar{z},z) \end{pmatrix} \dots \quad (9)$$

Bij invoering van de combinatiematrix (zonder overstreping) $\mathbf{C}_{ij} = \bar{\mathbf{C}}_{ij} \mathbf{T}_{ij}$ kunnen de vectoren $\bar{\mathbf{e}}_{ij}$ en $\bar{\mathbf{k}}_{ij}$ uit (3) en (6) nu worden geschreven als:

$$\bar{\mathbf{e}}_{ij} = \mathbf{C}_{ij} \mathbf{v}_{ij} \dots \dots \dots (10)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{ij} = \bar{\mathbf{S}}_{ij} \mathbf{C}_{ij} \mathbf{v}_{ij} \dots \dots \dots (11)$$

De krachten (inclusief momenten) die samen de vector $\bar{\mathbf{k}}_{ij}$ vormen zijn zelf nog steeds betrokken op de \bar{x} , \bar{y} en \bar{z} -richting. Als men $\bar{\mathbf{k}}_{ij}$ vervangt door een krachtenvector \mathbf{k}_{ij} , waarvan de elementen ontbonden zijn volgens de assen van het stelsel x, y, z , geldt:

$$\mathbf{k}_{ij} = (\mathbf{C}_{ij})' \bar{\mathbf{k}}_{ij} \dots \dots \dots (12)$$

Hierin is \mathbf{k}_{ij} nu een vector van 12 elementen.

Deze elementen zijn in feite de 6 krachten en de 6 momenten die als belasting in elk der punten i en j worden aangebracht. Substitutie van (11) in (12) geeft als evenwichtsvergelijkingen voor de staaf ij :

$$\mathbf{k}_{ij} = (\mathbf{C}_{ij})' \bar{\mathbf{S}}_{ij} \mathbf{C}_{ij} \mathbf{v}_{ij} \dots \dots \dots (13)$$

De vierkante matrix $(\mathbf{C}_{ij})' \bar{\mathbf{S}}_{ij} \mathbf{C}_{ij}$ is nu de nieuwe stijfheidsmatrix \mathbf{S}_{ij} voor de staaf ij :

$$\mathbf{S}_{ij} = (\mathbf{C}_{ij})' \bar{\mathbf{S}}_{ij} \mathbf{C}_{ij} \dots \dots \dots (14)$$

Hiermede wordt (13):

$$\mathbf{S}_{ij} \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{k}_{ij} \dots \dots \dots (15)$$

Omdat in vgl. (15) \mathbf{v}_{ij} en \mathbf{k}_{ij} elk uit twee delen bestaan, nl. \mathbf{v}_i en \mathbf{v}_j respectievelijk \mathbf{k}_i en \mathbf{k}_j , kan (15) ook worden genoteerd als volgt:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{ii} & \mathbf{S}_{ij} \\ \mathbf{S}_{ji} & \mathbf{S}_{jj} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_i \\ \mathbf{k}_j \end{pmatrix} \dots \dots \dots (16)$$

De vectoren \mathbf{v}_i en \mathbf{v}_j maken deel uit van de vector \mathbf{v} voor de gehele constructie:

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{v}_1' \dots, \mathbf{v}_i', \dots, \mathbf{v}_j', \dots, \mathbf{v}_m')$$

Men mag in (16) deze vector \mathbf{v} invoeren mits de stijfheidsmatrix en de krachtenvector met nullen worden aangevuld. Men krijgt dan: $\mathbf{S}_{ij}^\circ \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k}_{ij}^\circ$, waarin

$$\mathbf{S}_{ij}^\circ = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1' & \mathbf{v}_i' & \mathbf{v}_j' & \mathbf{v}_m' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{ii} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{ij} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{ji} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{jj} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \mathbf{k}_{ij}^\circ = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_j \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \dots \dots (17)$$

Men kan dit voor alle staven doen en is dan in staat de stijfheidsmatrices bij elkaar op te tellen.

Uit de sommatie van alle betrekkingen (17) volgt dan $\mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{k}$, reeds genoemd als vergelijking (1). Hierin is \mathbf{S} de stijfheidsmatrix voor de gehele constructie en \mathbf{k} de sommatie van alle vectoren \mathbf{k}_{ij} . De matrix \mathbf{S} is betrokken op de verplaatsingen van alle m vrij verplaatsbare knooppunten.

Als men dit wil programmeren is het niet nodig van alle staven de matrix \mathbf{S}_{ij}° in het geheugen op te slaan.

Men begint namelijk de gehele matrix \mathbf{S} te vullen met nulelementen en plaatst daarna voor iedere staaf ij de submatrices \mathbf{S}_{ii} , \mathbf{S}_{ij} , \mathbf{S}_{ji} en \mathbf{S}_{jj} in de matrix \mathbf{S} voor de gehele constructie. Zo kan staaf voor staaf worden afgewerkt en men heeft voldoende aan de geheugenruimte voor de éne matrix \mathbf{S} . Als op de aangegeven velden reeds eerder voor vorige staven getallen zijn weggezet, wordt voor de nieuwe staaf het stijfheidsdeel bij de oude inhoud van dat veld opgeteld. In het geval dat een staafuiteinde, bijv. punt j , een vast inklemmingspunt is met verplaatsingen en rotaties die per definitie gelijk nul zijn, dan wordt alleen de submatrix \mathbf{S}_{ii} in \mathbf{S} weggezet. De bewerkingen die nodig zijn om \mathbf{S} op te bouwen zijn dus zeer eenvoudig en kunnen gemakkelijk aan de machine worden opgedragen.

1.3 *Oplossen van de vergelijkingen*

In beginsel is het oplossen van een stelsel vergelijkingen een wiskundig probleem dat voor het mechanica-vraagstuk niet karakteristiek is, en voor een meer uitvoerige bespreking zou naar de wiskundige literatuur moeten worden verwezen, bijv. [8].

Toch heeft het zin om op de hoogte te zijn van de mogelijke oplossingsmethoden, teneinde dan gebruik te kunnen maken van een eventuele gunstige opbouw van de coëfficiëntenmatrix \mathbf{S} .

Eén facet is bijv. dat de matrix symmetrisch is t.o.v. de hoofddiagonaal. In het TNO-programma is verder ook gespeculeerd op het feit dat in de techniek in veel gevallen de matrix alleen coëfficiënten ongelijk nul heeft op de hoofddiagonaal en in de directe omgeving daarvan, wat tot verkorting van de bewerking aanleiding geeft. Dit voordeel zal des te meer spreken naarmate de constructie meer een „keten”-vormige opbouw heeft. Voor het oplossen van een stelsel vergelijkingen waarvan de coëfficiënten een symmetrische bandmatrix vormen, maakt TNO dankbaar gebruik van een procedure die door Th. W. G. DUIN van de groep Toegepaste Wiskunde van het Stevinlaboratorium is gemaakt. Een methode die eveneens profiteert van een ketenvormige opbouw maar constructies van nog grotere omvang toestaat wordt besproken in [9].

Algemene regels laten zich moeilijk geven. Het zal veelal nuttig zijn in overleg met het ingeschakelde elektronisch rekencentrum de gang van de berekening vast te stellen.

1.4 Berekenen van krachten en momenten

Als de verplaatsingen v van ieder knooppunt zijn bepaald, kan worden berekend welke krachten en momenten \mathbf{k}_{ij} daarbij in iedere staaf heersen. Dit volgt uit betrekking (11):

$$\mathbf{k}_{ij} = \bar{\mathbf{S}}_{ij} \mathbf{C}_{ij} \mathbf{v}_{ij}$$

De matrix $\bar{\mathbf{S}}_{ij} \mathbf{C}_{ij}$ is ook reeds nodig geweest om de totale matrix \mathbf{S} op te bouwen. Deze matrix kan dus worden bewaard of bij beperkte geheugenruimte weer opnieuw worden berekend als de grootte van het geheugen bewaren niet toelaat.

In de staafkrachtenvector komen alleen de vier buigende momenten, het wringende moment en de normaalkracht voor. Hieruit zijn eenvoudig ook nog de dwarskrachten te berekenen:

$$D(\bar{y}) = \frac{M_j(\bar{z}) - M_i(\bar{z})}{l_{ij}}$$

$$D(\bar{z}) = \frac{M_j(\bar{y}) - M_i(\bar{y})}{l_{ij}}$$

1.5 Scharnierende verbindingen

In het voorgaande is er steeds van uitgegaan dat alle knooppunten volledig vast zijn verbonden aan de in die punten samenkomende staven. Bij iedere vervormingsparameter behoort dan een 'verbinding'. De behandeling blijft geldig als sommige verbindingen verend zijn. Dit manifesteert zich alleen in de stijfheidsmatrix $\bar{\mathbf{S}}_{ij}$ hetgeen hier niet nader zal worden besproken. Voor vlakke raamwerken kan het TNO-programma deze verende inklemmingen in rekening brengen. Als van de zes 'verbindingen' van een staaf er één of meer in het geheel niet aanwezig zijn, dan geldt een afwijkende stijfheidsmatrix $\bar{\mathbf{S}}_{ij}$.

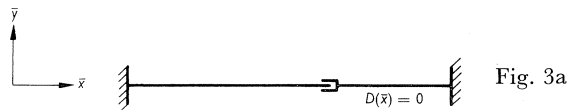


Fig. 3a

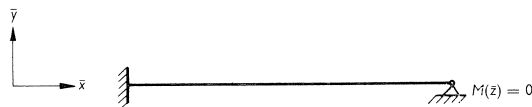


Fig. 3b

Voorbeelden van afwezige verbindingen.

Fig. 3a geeft een schets van een staaf die geen normaalkracht op kan nemen; de plaats van de 'telescoopverbinding' is hierbij niet van belang en kan aan elk der uiteinden of ergens in het veld gelegen zijn. In fig. 3b is rechts de momentverbinding afwezig. In de krachtenvector \mathbf{k}_{ij} van (5) is op de betreffende plaats het moment te vervangen door nul.

In de stijfheidsmatrix $\bar{\mathbf{S}}_{ij}$ treden dan overal nullen op in de rijen en kolommen die met de afwezige verbinding corresponderen. Welke waarde de betreffende vervormingsparameter ook aanneemt, er zal – zoals uit vergelijking (6) blijkt – slechts een kracht ter grootte nul bij optreden. Dit houdt in dat de op afwezige verbindingen betrokken vrijheidsgraden voor de staaf overbodig zijn. Het zal duidelijk zijn dat vele permutaties van afwezige verbindingen mogelijk zijn. Van alle combinaties van de eventueel weg te laten momentverbindingen zijn er tot nu slechts vier in het programma opgenomen. De berekening kan alleen worden uitgevoerd voor staven die op een knooppunt óf twee buigende momenten óf in het geheel geen buigend moment kunnen overbrengen. Als hierna dus wordt gesproken over een scharnierend verbonden staaf wordt bedoeld dat de staaf in de betreffende verbinding geen momenten $M(\bar{y})$ en $M(\bar{z})$ kan overbrengen op het knooppunt.

Dit alles levert programmatisch geen moeilijkheden op zolang in een knooppunt nog minstens twee staven volledig vast aan elkaar zijn verbonden. Zou dit namelijk niet het geval zijn, dan wordt een knooppunt een „volledig” scharnier; alle aangesloten staven kunnen dan wèl (en uitsluitend) krachten maar geen momenten op dat knooppunt uitoefenen. De drie rotaties in dat knooppunt worden voor geen enkele staaf gebruikt, omdat in de totale stijfheidsmatrix \mathbf{S} in de op die rotaties betrokken rijen en kolommen alle coëfficiënten nul zijn. Daardoor is echter tevens het stelsel onoplosbaar geworden.

Men kan dit nu op twee manieren voorkomen. Als eerste kan men in het bedoelde knooppunt de drie rotaties terecht uitsluiten door in dat punt een verplaatsingsvector \mathbf{v}_i van slechts drie elementen (de werkelijke verplaatsingen) te formuleren. Dit betekent dat niet meer voor alle staven de stijfheidsmatrix \mathbf{S}_{ij} even groot is, zodat de uniformiteit in de behandeling verloren gaat. Programmatisch levert dit een complicatie. Het programma is echter „voordeliger” in die zin, dat men de matrix \mathbf{S} voor de gehele constructie kleiner kan maken en dus economisch omspringt met geheugenruimte.

De tweede methode houdt in dat men de knooppuntsrotaties een arbitraire waarde toekent, waarvoor bijvoorbeeld nul kan worden gekozen. Bij het opbouwen van de totale matrix \mathbf{S} worden ook kolommen en rijen voor de, per definitie nulgestelde rotaties gereserveerd. Alle stijfheidsmatrices \mathbf{S}_{ij} zijn dan in ieder geval even groot, zodat men voor iedere staaf op hetzelfde stramien werkt. Men zal dan echter moeten aangeven welke punten een volledig scharnier voorstellen en men moet de machine instrueren in de betreffende nulrijen en -kolommen een 1 te plaatsen op de hoofddiagonaal en een nul voor het bijbehorende belastingelement. Het stelsel is hierdoor weer oplosbaar geworden en voor de overbodige rotaties zal men de waarde nul vinden. Het voordeel van deze werkwijze is dat men de uniformiteit heeft bewaard, zodat het bepalen van de krachten en momenten uit de gevonden verplaatsingen voor alle staven, ongeacht de wijze van bevestigen, op dezelfde wijze verloopt. Het

zal duidelijk zijn dat deze methode de voorkeur heeft als de beschikbare geheugenruimte geen grote beperkingen oplegt.

Alleen als relatief veel volledige scharnieren voorkomen verdient de eerste methode aanbeveling.

Als *alle* knooppunten volledige scharnieren zijn – wat het geval is bij een zuiver ruimtelijk vakwerk – heeft het zin een programma op te bouwen dat geheel op een drie bij drie stramien per knoop berust. Er zijn dan immers in het geheel geen onbekende rotaties. TNO heeft hiervan met voordeel gebruik gemaakt en voor ruimtevakwerken een apart programma geschreven. Hiermee kunnen grotere constructies worden berekend dan met het algemene programma.

1.6 Voorgeschreven verplaatsingen

Het kan voorkomen dat aan één of meer van de zes verplaatsingsgrootheden van een knooppunt een waarde is voorgeschreven, zoals bijv. de zetting van een steunpunt. Bij een symmetrische constructie met een symmetrische of keersymmetrische belasting kan men de berekening beperken tot de halve constructie, waarbij voor punten op de symmetrielijn enige verplaatsingscomponenten zijn voorgeschreven.

In fig. 4 heeft men bijv. dat voor punt 3 geldt: $v(y) = 0$. Vooral bij constructies met grote staafaantallen kan deze mogelijkheid voordeel bieden.

Van een knooppunt met voorgeschreven verplaatsingen neemt in feite het aantal kinematische vrijheidsgraden af, zodat de totale stijfheidsmatrix \mathbf{S} in beginsel kleiner wordt.

Evenals bij volledig scharnierende knooppunten is van dit feit tóch geen gebruik gemaakt, omdat grotere waarde wordt gehecht aan het werken op eenzelfde stramien. In eerste aanleg wordt \mathbf{S} berekend alsof geen voorgeschreven verplaatsingen voorkomen. Achteraf wordt de kolom die met een voorgeschreven verplaatsing correspondeert, met die voorgeschreven waarde vermenigvuldigd en in mindering gebracht op de belastingvector \mathbf{k} . Op de bedoelde kolom en de overeenkomstige rij worden alle elementen daarna nul gemaakt, uitgezonderd het element op de hoofddiagonaal, waar een 1 wordt geplaatst.

In de belastingvector wordt voor het bijbehorende belastingelement de

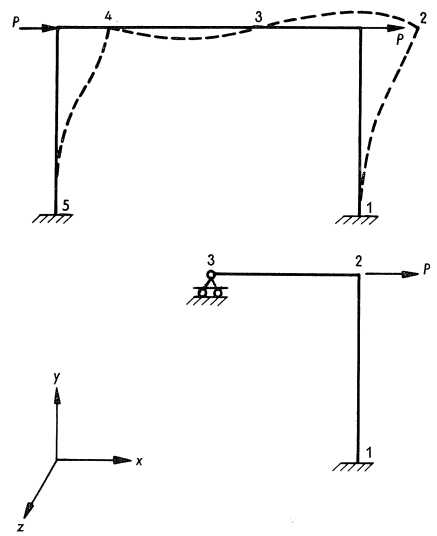


Fig. 4. Symmetrische constructie met keer-symmetrische belasting.

bekende waarde van de voorgeschreven verplaatsing ingevuld. Het zo verkregen stelsel is volledig oplosbaar gebleven, terwijl voor de als „onbekende” meegenomen voorgeschreven verplaatsing de juiste waarde wordt „berekend”.

Voor het berekenen van de krachten en momenten is dan ook nu geen afwijkende behandeling nodig.

Bij de toepassing van het programma als hierboven beschreven bleek al vrij spoedig nog een duidelijke beperking. Men kan namelijk alleen verplaatsingen voorschrijven die gelden in de richting van het algemene assenstelsel x, y, z . Een roloplegging als bijv. in fig. 5 onttrekt zich aan dit voorschrift.

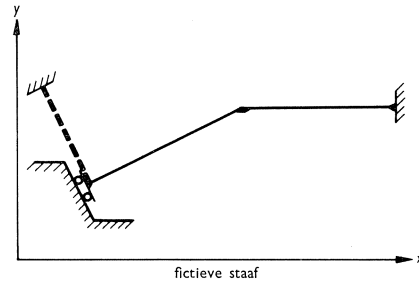


Fig. 5

Aanvankelijk werd voor dit probleem een oplossing gedacht als volgt. Vervang de rol door een extra fictieve staaf als in fig. 5 is gestippeld. Door sommige stijfheden van deze staaf nul en andere oneindig groot te denken kan men dezelfde voorwaarden opleggen die voor de rol zouden gelden. Oneindig groot betekent in „rekenmachinetaal” bijv. een getal 10^{15} . In de praktijk bleek deze oplossing, hoezeer als gedachtenexperiment adequaat, echter te leiden tot de moeilijkheden waarop Loor reeds attendeerde in [1]. Bij het opbouwen van \mathbf{S} worden in dit geval termen van zeer verschillende grootte gesommeerd, en omdat het aantal significante cijfers bij de berekening niet voldoende is raakt de rekenmachine informatie kwijt. Dit heeft in sommige gevallen geleid tot het onoplosbaar worden van het stelsel vergelijkingen. Metterdaad is hierbij dus gebleken dat een technische begeleiding van de programmering niet kan worden gemist.

Een meer elegante oplossing voor het onderhavige probleem is de volgende: houd voor de gehele constructie het algemene assenstelsel aan, behalve in een knooppunt waar een verplaatsing is voorgeschreven die niet correspondeert met één der assen van dat algemene stelsel. In zo'n afwijkend knooppunt wordt een zelfstandig assenstelsel $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ aangenomen, zodanig, dat één der assen de richting van de voorgeschreven verplaatsing aangeeft; de ter plaatse geldende kinematische vrijheidsgraden worden in dat zelfstandig assenstelsel gedefinieerd en in de vector van verplaatsingen voor de gehele constructie opgenomen. Tegenover het nadeel dat alle onbekende verplaatsingen niet meer t.o.v. hetzelfde assenstelsel gelden, staat het veel grotere voordeel dat alle voorgeschreven verplaatsingen nu op dezelfde manier (zie hiervoor) in rekening worden gebracht met behoud van een symmetrische matrix \mathbf{S} . Uiteraard moet men in zo'n afwijkend punt de belasting ook ontbinden volgens het nieuwe assenstelsel.

Het zelfstandige assenstelsel voor knoop i is aangeduid met $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Knoop i verplaatst t.o.v. dit coördinatenstelsel $\bar{\mathbf{v}}_i$. Deze vector $\bar{\mathbf{v}}_i$ hangt met \mathbf{v}_i samen volgens

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{T}}_i \bar{\mathbf{v}}_i \dots \dots \dots (18)$$

waarin

$$\bar{\mathbf{T}}_i = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}}_i \end{pmatrix} \text{ en } \bar{\mathbf{R}}_i = \begin{pmatrix} \cos(x, \bar{x}) & \cos(x, \bar{y}) & \cos(x, \bar{z}) \\ \cos(y, \bar{x}) & \cos(y, \bar{y}) & \cos(y, \bar{z}) \\ \cos(z, \bar{x}) & \cos(z, \bar{y}) & \cos(z, \bar{z}) \end{pmatrix} \dots \dots (19)$$

Als van een staaf ook punt j een zelfstandig assenstelsel behoeft, geldt evenzo

$$\mathbf{v}_j = \bar{\mathbf{T}}_j \bar{\mathbf{v}}_j$$

Voor de staaf tussen deze punten i en j geldt dan

$$\mathbf{v}_{ij} = \bar{\mathbf{T}}_{ij} \bar{\mathbf{v}}_{ij} \text{ met } \bar{\mathbf{T}}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}}_j \end{pmatrix} \dots \dots \dots (20)$$

Eventueel kan $\bar{\mathbf{R}}_i$ of $\bar{\mathbf{R}}_j$ een eenheidsmatrix zijn.

In de stijfheidsmatrix \mathbf{S}_{ij} van (14) moet nu voor \mathbf{C}_{ij} worden geschreven:

$$\mathbf{C}_{ij} = \bar{\mathbf{C}}_{ij} \bar{\mathbf{T}}_{ij} \bar{\mathbf{T}}_{ij} \dots \dots \dots (21)$$

Het „wegzetten” van \mathbf{S}_{ij} in \mathbf{S} gaat weer zo als hiervoor is beschreven.

1.7 Oneindig stijve staven; excentrische aansluiting

Het kan voorkomen dat in een constructie een staaf als uitzonderlijk stijf ten opzichte van de overige staven mag worden beschouwd. Daar de profielafmetingen elkaar meestal niet al te veel ontlopen, is dit vaak alleen het geval bij een staaf van uitzonderlijk kleine lengte, die men zou kunnen invoeren om excentrische aansluiting in rekening te brengen.

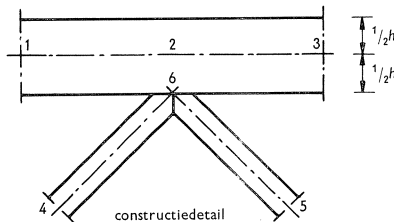


Fig. 6a

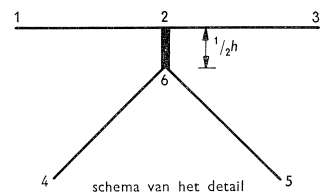


Fig. 6b

In fig. 6a is een knooppunt geschetst waarin twee diagonalen 4-6 en 5-6 niet-centrisch zijn aangesloten aan de horizontale ligger 1-2-3. Als van de horizontale ligger doorsneden vlak blijven kan fig. 6a worden geschematiseerd tot fig. 6b. De staaf 2-6 is daarin „oneindig stijf”. De verplaatsingen van punt 6 kunnen direct in matrixvorm worden uitgedrukt in die van punt 2. Punt 6 is

dan geen vrij verplaatsbaar knooppunt meer, zodat het geen bijdrage geeft in het totaal aantal kinematische vrijheidsgraden.

De verplaatsing \mathbf{v}_j van punt j uit fig. 7 laat zich uitdrukken in de verplaatsingen \mathbf{v}_k van punt k volgens:

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{H}_{jk}\mathbf{v}_k \dots \dots \dots (22)$$

De matrix \mathbf{H}_{jk} hangt alleen af van de coördinaten van de punten j en k en kan eenvoudig worden bepaald.

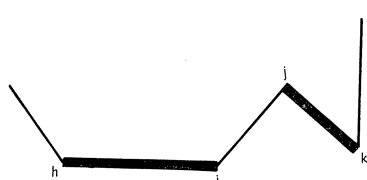


Fig. 7. Oneindig stijve staven.

Evenzo kan gelden:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{H}_{ih}\mathbf{v}_h \dots \dots \dots (23)$$

zodat

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{H}_{ij}\mathbf{v}_{hk} \dots \dots \dots (24)$$

waarin

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{ih} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{jk} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (25)$$

De voor het bepalen van \mathbf{S}_{ij} nodige \mathbf{C}_{ij} is nu:

$$\mathbf{C}_{ij} = \bar{\mathbf{C}}_{ij}\mathbf{T}_{ij}\mathbf{H}_{ij} \dots \dots \dots (26)$$

en indien de punten h en k nog een eigen assenstelsel hebben:

$$\mathbf{C}_{ij} = \bar{\mathbf{C}}_{ij}\mathbf{T}_{ij}\mathbf{H}_{ij}\bar{\mathbf{T}}_{hk} \dots \dots \dots (27)$$

1.8 Belasting op de staven; temperatuur

Als de belasting niet alleen in de knooppunten maar ook over de staaf lengte verdeeld voorkomt, laat de belasting zich in beginsel op dezelfde manier in rekening brengen als wordt gedaan bij de methode van HARDY CROSS. Alle knooppunten worden eerst „vastgehouden”. De willekeurig over een staaf verdeelde belasting heeft tot gevolg dat op de aanliggende knooppunten primaire krachten en dito momenten worden uitgeoefend. Met deze belasting van de knooppunten wordt de berekening m.b.v. het programma uitgevoerd. Het verkregen resultaat moet worden gesuperponeerd op de primaire krachtsverdeling van de staven.

Temperatuursinvloeden kunnen ook worden bestudeerd. Men kan dan dezelfde overweging laten gelden als voor belasting die op de staven en niet in de knooppunten aangrijpt. Eerst worden weer alle knopen gefixeerd. Men kan dan uitrekenen welke krachten en momenten primair op de knopen worden uitgeoefend als gevolg van temperatuurvariaties. Met deze primaire krachten en momenten als belasting wordt de constructie berekend. Het resultaat daarvan kan men weer superponeren op de primaire spanningsverdeling.

1.9 Vlakke constructies

In het voorgaande is steeds sprake geweest van ruimtelijke staafconstructies.

Vaker wordt de theorie toegepast voor tweedimensionale staafconstructies. In het algemeen levert ieder knooppunt dan slechts drie onbekende verplaatsingscomponenten. Voorbeelden zijn bijv. vlakke raamwerken en balkroosters. In het vlakke raamwerk van fig. 8a dat belast wordt door krachten in zijn vlak gelden per knooppunt alleen de onbekenden $v(x)$, $v(y)$ en $\varphi(z)$. Alle andere zijn nul. In het balkrooster van fig. 8b dat alleen belast wordt door krachten loodrecht op zijn vlak zijn $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ en $v(z)$ onbekend en $v(x)$, $v(y)$ en $\varphi(z)$ gelijk aan nul.

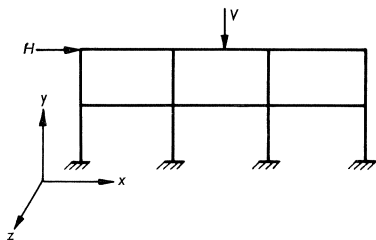


Fig. 8a

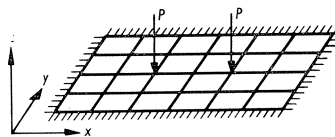


Fig. 8b

Vlakke constructies.

Bij iedere staaf behoren in dit geval ook slechts drie vervormingsparameters en men werkt dan met kleinere matrices. Natuurlijk kan iedere tweedimensionale constructie ook worden berekend met een programma voor ruimtelijke constructie. Door echter voor vlakke constructies een eigen programma te schrijven ontstaat de mogelijkheid om constructies van groter omvang te berekenen.

Nog eenvoudiger wordt het vlakke raamwerk als daarin elk knooppunt een volledig scharnier is. Men heeft dan een plat vakwerk. Alleen de verplaatsingen $v(x)$ en $v(y)$ zijn dan van belang, terwijl per staaf slechts één vervormingsparameter overblijft. Dat het op te lossen stelsel vergelijkingen in dit geval sterk is gereduceerd behoeft geen nader betoog.

2 Toepassingsmogelijkheden

De gebieden van toepassing zijn duidelijk te onderkennen als men zich realiseert met welke aspecten in het programma rekening is gehouden. Dat buiging, wringing, normaalkrachtvervorming, excentrische aansluitingen en voorgeschreven verplaatsingen kunnen worden ingevoerd leidt tot vele mogelijkheden. Enkele hiervan die bij TNO-IBBC aan de orde zijn geweest, worden hieronder vermeld.

– vlakke of ruimtelijke vakwerken

Ten overvloede wordt opgemerkt dat het niet meer nodig is te weten wat de graad van statisch onbepaaldheid van een constructie is. Men kan zelfs stellen dat de verplaatsingsmethode aantrekkelijker wordt naarmate de graad van statisch onbepaaldheid toeneemt. Immers bepaalt het aantal knopen de grootte van de stijfheidsmatrix \mathbf{S} . Iedere staaf die extra wordt toegevoegd

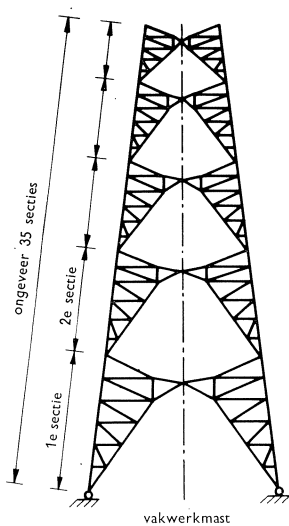


Fig. 9a

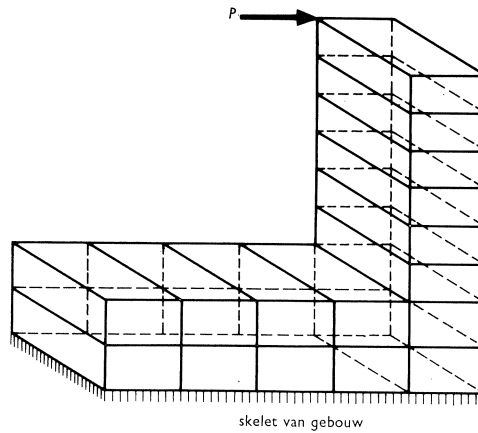


Fig. 9b

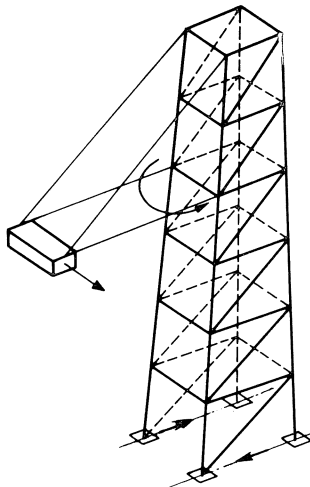
doet S alleen veranderen, maar niet vergroten! Een indruk van de mogelijkheden moge fig. 9a geven.

Als men de in twee richtingen symmetrische vakwerkmast opgebouwd denkt uit steeds dezelfde secties als is aangegeven in de figuur, kan men tot ongeveer 35 secties gaan. Dit is mogelijk omdat voor deze speciale constructie inderdaad sprake is van een „ketenvormige” opbouw, zodat de procedure van de symmetrische bandmatrix geheel tot zijn recht komt. Als de mast aan de top in horizontale richting wordt uitgebouwd, kan de maximale hoogte van de constructie die nog in het programma past snel afnemen, omdat plaatselijk de bandbreedte van de matrix veel groter zou worden.

– vlakke of ruimtelijke raamwerken

Hiertoe behoren niet alleen normale constructies als getekend in fig. 9b, maar het ligt nu ook meer dan voorheen binnen het bereik te bestuderen op welke secundaire momenten men moet rekenen in als vakwerk ontworpen constructies. De aanname dat de knooppunten volledig scharnieren gaat immers niet altijd op. Zo is bijv. reeds uit berekeningen gebleken dat bij gebruik van relatief stijve profielen secundaire buigspanningen kunnen ontstaan van dezelfde grootte als de normaalspanningen berekend volgens de aanname van volledig scharnierende verbindingen. Uit bezwijkanalytisch oogpunt is het misschien verdedigbaar bij het dimensioneren van de *profielen* deze buiging in de staven te negeren, maar bij het berekenen van de *verbinding* tussen een staaf en het aanliggende knooppunt is dit secundaire verschijnsel wel van belang en informatie hierover is nuttig.

Ook torsie-effecten laten zich nu beter bestuderen. Vele torenkranen kunnen op wringing worden belast, bijv. als gevolg van plotseling afremmen van een



op torsie belaste kraan Fig. 10

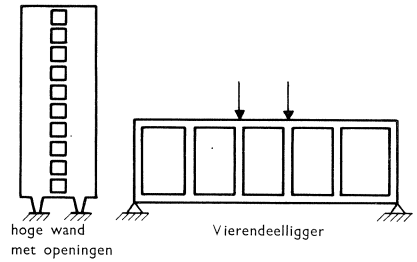


Fig. 11a

Fig. 11b

ronddraaiende beweging. De traagheidskracht van de ballast levert dan een torsiemoment op de toren (fig. 10).

Gewoonlijk wordt aangenomen dat dit moment in de staven van de constructie alleen normaalkrachten en buigende momenten opwekt. Nu evenwel meer en meer koker- en buisprofielen worden toegepast, kan van de individuele staven de stijfheid tegen verwringen zo groot worden dat een deel van het totale moment door torsie van de staven wordt opgenomen. Na te gaan hoe groot dergelijke invloeden zijn en voor welke details van de constructie van belang, behoort thans tot de mogelijkheden.

– *excentrische aansluiting*

Dat men excentrische aansluitingen, of zo men wil, oneindig stijve staven kan invoeren opent o.a. de mogelijkheid voor het berekenen van hoge wanden met openingen (zie fig. 11a). In deel II wordt op deze bijzondere toepassing nader ingegaan.

– *stijfheidsreductie i.v.m. scheuren*

Een aardige toepassingsmogelijkheid is ook de volgende: Men kan zich voorstellen dat in een Vierendeelligger van gewapend beton verschillende staven een combinatie van trekkracht en moment moeten overbrengen. Bij de berekening hiervan wordt in de regel aangenomen dat alleen de vervorming door buiging van belang is. Deze kracht en het moment kunnen echter van zodanige grootte zijn, dat moet worden aangenomen dat het beton zal scheuren (fig. 11b) als geen voorspanning is toegepast.

Voor een exacte berekening moet men dan het werkelijke moment-krommingsdiagram van iedere doorsnede kennen en een niet-lineaire berekening uitvoeren. Voor de rekstijfheid EF van de staaf zal soms alleen de rekstijfheid van de wapening in rekening moeten worden gebracht. Met het hiervoor be-

schreven programma kan men evenwel al kwalitatief voorspellen hoe de constructie zich zal gedragen, omdat men er van kan profiteren dat het programma ook rekening houdt met normaalkrachtvervorming. De buigstijfheid wordt op grond van een schatting gereduceerd waarna de berekening nu weer kan worden uitgevoerd onder de aanname dat de constructie elastisch is.

– *balkroosters en platen*

Volledigheidshalve wordt hier nog eens genoemd dat balkroosters met inachtname van de torsiestijfheid nu eenvoudig kunnen worden berekend (fig. 8b).

Ook zijn toepassingen bekend van het berekenen van platen [10] [11]. Een plaat wordt dan vervangen door een balkrooster waarin aan de balken oordeelkundig een buig- en wringstijfheid moet worden toegekend. Men bereikt dan ongeveer dezelfde nauwkeurigheid die wordt bereikt met behulp van differentierekening.

In een recente publikatie van YETTRAM en HUSAIN [11] wordt een voor de plaat representatief balkrooster afgeleid als getekend in fig. 11c. De balken in x -richting hebben een buigstijfheid EI_x en een torsiestijfheid GJ_x . De balken in y -richting hebben een buigstijfheid EI_y en een torsiestijfheid GJ_y . De diagonalen zijn wringslap en hebben een buigstijfheid EI_d . Voor een plaat van constante dikte kan worden afgeleid hoe groot elk van deze stijfheden is [11]. Dit te doen behoort niet tot de bedoeling van dit artikel, reden waarom direct het resultaat wordt gegeven:

$$\left. \begin{aligned} EI_x &= (1 - k^2\nu) \cdot \lambda K \\ EI_y &= (1 - \nu/k^2) \cdot k\lambda K \\ EI_d &= 1/2\nu r^3/k \cdot \lambda K \\ GJ_x &= (1 - 3\nu) \cdot \lambda K \\ GJ_y &= (1 - 3\nu) \cdot k\lambda K \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

Hierbij is ν de dwarscontractiecoëfficiënt en K de plaatstijfheid

$$K = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

(waarin h de dikte en E de elasticiteitsmodulus van de plaat is); in (28) zijn k en r afmetingsverhoudingen zoals in de figuur aangegeven.

In λK en $k\lambda K$ is te herkennen de buigstijfheid van plaatstroken ter breedte van λ respectievelijk $k\lambda$.

In het speciale geval van een vierkant rooster ($k = 1$) en een

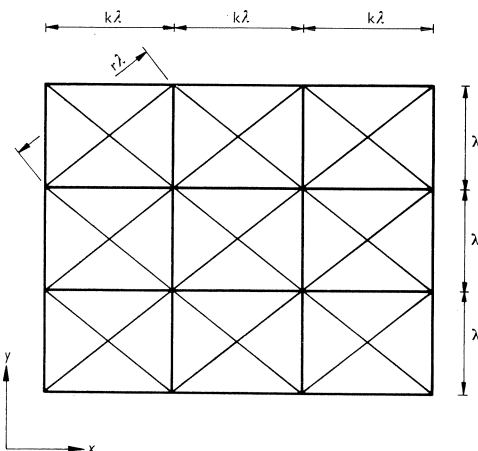


Fig. 11c. Balkmodel van vlakke plaat.

stalen plaat ($\nu = 1/3$) volgt dat de wringstijfheden nul zijn en dat voor de buigstijfheden geldt:

$$EI_x = EI_y = \frac{2}{3} \cdot \lambda K = \frac{3/4 \cdot \lambda E h^3}{12}$$

$$EI_d = \frac{1}{3} \cdot \lambda \sqrt{2} K = \frac{3/8 \sqrt{2} \cdot \lambda E h^3}{12}$$

Een ander speciaal geval levert een vierkant rooster ($k = 1$) en $\nu = 0$. Nu vervallen de diagonalen; voor de liggers in x - en y -richting resteert dan:

$$EI_x = EI_y = \lambda K$$

$$GJ_x = GJ_y = \lambda K$$

Het aldus bepaalde balkrooster kan eenvoudig worden berekend, waarna

de gevonden krachten- en momentenverdeling moet worden „terugvertaald” tot de verdeling die in de vervangen plaat zal heersen.

– *vakwerkschalen*

Schalen, als vakwerk of raamwerk uitgevoerd (bijv. fig. 12), worden veelal als continue schaal berekend. De noodzaak hiervan vervalt als men een programma heeft zoals hier is beschreven. Vooral het invoeren van randvoorwaarden is veel eenvoudiger geworden.

Overigens zou men nu ook omgekeerd te werk kunnen gaan. Als men erin slaagt een continue schaal voor het berekenen te vervangen door een vakwerkschaal, kan men de schaal met het programma voor staafconstructies berekenen. Ook aan deze mogelijkheid wenst TNO-IBBC de nodige aandacht te besteden.

– *vlakke en ruimtelijke spanningstoestanden*

Reeds in 1941 heeft HRENNIKOFF aangegeven hoe schijven en ruimtelijke lichamen kunnen worden vervangen door vlakke respectievelijk ruimtelijke vakwerken [12] met inachtneming van de juiste waarde van ν . Dit biedt de mogelijkheid vlakke en ruimtelijke spanningstoestanden te berekenen in gevallen met gecompliceerde randvoorwaarden. Deze methode verdient opnieuw aandacht nu geëigende programma's ter beschikking staan om vakwerken te berekenen.

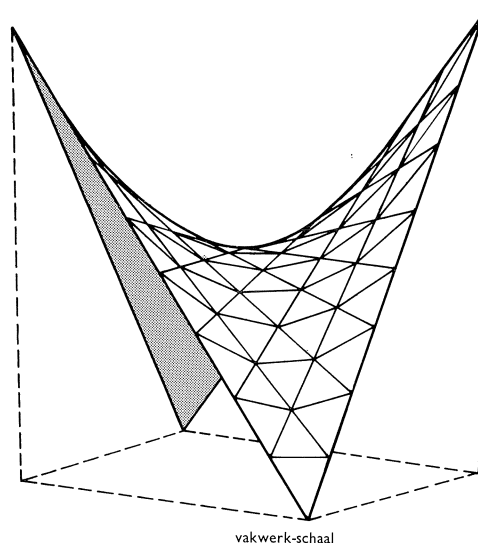


Fig. 12

ELEKTRONISCH BEREKENEN VAN HOGE WANDEN
MET EEN RAAMWERK-PROGRAMMA

3 Probleemstelling

In hoge gebouwen worden verticale wanden gebruikt om in horizontale zin stijfheid te verkrijgen. Deze als windschijf werkende wanden zijn vaak door één of meer verticale rijen van openingen onderbroken.

Het is gebruikelijk een dergelijke wand op te vatten als een combinatie van twee of meer verticale wanden die op regelmatige afstanden door horizontale dwarsbalken (muurdammen) stijf worden gekoppeld. Fig. 13a laat zo'n constructie zien. Als men de eigen traagheidsmomenten van de twee wanden uit fig. 13a algebraïsch sommeert vindt men een te kleine stijfheid voor de totale constructie. Volgens deze berekening zou men de muurdammen immers – ten onrechte – als pendels beschouwen. Een ander uiterste is om de verticale wanden als volledig gekoppeld te beschouwen. Dan neemt men dus aan dat een vlakke doorsnede over de breedte van de gehele constructie vlak blijft, en vindt zodoende een te grote stijfheid. Welk aandeel de muurdammen werkelijk in de stijfheid leveren en welke dwarskrachten en momenten in de diverse constructiedelen optreden, kan nader worden onderzocht.

Voor zover aan de schrijver bekend, zijn deze wanden tot nu toe steeds óf in model onderzocht óf analytisch berekend. In *De Ingenieur* van 17 september 1965 [5] licht DE SITTER de van GOESLNIKOW afkomstige berekeningswijze toe. ROSMAN deelt in een recente publikatie [3b] mee wat de laatste ontwikkeling is op dit gebied.

Het is bij die methode nodig om de muurdammen gelijkmatig als lamellen over de hoogte van de wand verdeeld te denken. Hoewel niet alle auteurs dit met zoveel woorden stellen, gaan zij er allen van uit dat voor elk der hoge wanden afzonderlijk de conceptie van NAVIER geldig is: vlakke doorsneden blijven vlak. Voor relatief hoge wanden zal dit wel juist zijn.

Als statisch onbepaalde van de constructie wordt gekozen de integraal T van de dwarskracht in de lamellen. Voor deze grootte T wordt bij de analytische methode een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde

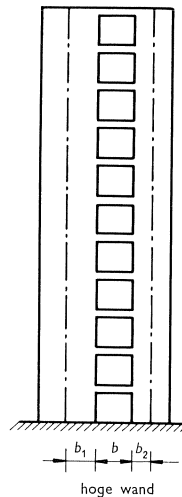


Fig. 13a

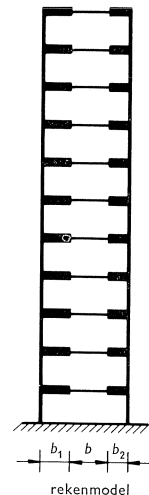


Fig. 13b

opgesteld. De coëfficiënten hierin worden alleen constant als de muurdammen gelijkmatig verdeeld zijn. Als de randvoorwaarden zijn vastgesteld kan T worden opgelost en hieruit terugrekenend de krachtsverdeling worden bepaald.

De methode is in zoverre elegant dat er uit blijkt welke parameters in dit mechanicaprobleem de meest belangrijke zijn. De werkwijze boet echter aan aantrekkelijkheid in, zodra de randcondities gecompliceerd worden.

Heeft men de beschikking over een programma voor het berekenen van vlakke of ruimtelijke raamwerken, dan kan dit probleem ook numeriek worden behandeld, welke procedure enkele in het oog springende voordelen biedt. De werkwijze zal hier worden uiteengezet en aan de hand van een concreet voorbeeld worden gedemonstreerd.

4 Berekening als raamwerk

4.1 *Schematisering*

Bij de hoge wand van fig. 13a wordt evenals dit gebeurt bij de analytische methode, aangenomen dat in de wanden oorspronkelijk vlakke doorsneden ook na het aanbrengen van de belasting nog vlak zijn. Opgemerkt zij, dat men niet ongestraft de hoge wanden mag concentreren in hun zwaartelijns. In het constructieschema wordt dan aan de muurdammen immers een te grote lengte toegekend. Men moet rekening houden met de werkelijkheid, waarin de wanden immers een niet te verwaarlozen breedte hebben. Dit kan gebeuren met behulp van oneindig stijve liggergedeelten tussen het einde van een muurdam en de schemalijn van de verticale wand (zie fig. 13b).

Wordt beschikt over een programma waarin deze oneindig stijve elementen kunnen worden meegenomen, dan is in beginsel het rekenmodel voltooid: een raamwerk waarin van sommige regels gedeelten oneindig stijf zijn. Het aan de machine verstrekken van de nodige gegevens over de constructie en de belasting is dan nog het enige wat de ontwerper heeft te doen.

Het zal opgevallen zijn dat geen enkele onderstelling is gemaakt over de samenstelling van de constructie. De muurdammen mogen willekeurig over de hoogte verdeeld zijn en in stijfheid verschillen. Ook de wanden zelf mogen verdiepingsgewijs van doorsnede veranderen. Per verdieping moeten de wanden prismatisch zijn, tenzij men de mogelijkheid van verlopende stijfheden heeft geprogrammeerd.

Het aantal verticale wanden dat gekoppeld is door balken is in principe ongelimiteerd. Alleen de geheugenruimte van de machine stelt hier eventueel een grens. Bij de analytische oplossing geeft dit juist grote moeilijkheden. Men komt dan namelijk tot een stelsel simultane differentiaalvergelijkingen waarvan het oplossen zeer bewerkelijk is.

Zoals de wand is getekend in fig. 13 liggen alle zwaartelijns in één plat vlak. Zelfs dit is geen dwingende eis. De door muurdammen verbonden wanden

mogen in de ruimte een willekeurige stand innemen, zonder buiten de mogelijkheden van een programma voor ruimtelijke staafconstructies te vallen.

4.2 Alternatieve behandeling

Niet ieder rekencentrum beschikt waarschijnlijk over een programma dat ook oneindig stijve staven omvat. Bezwaarlijk is dit echter niet, omdat eraan tegemoet te komen is door het rekenmodel van fig. 13b nog enigszins om te vormen. Een verbindingsbalk, zijnde een muurdam met de eraan grenzende oneindig stijve liggerdelen, kan worden vervangen door een statisch equivalent systeem van horizontale liggers met een eindige stijfheid, en wel als volgt:

Voor een verbindingsbalk, als getekend in fig. 14a bestaat een relatie tussen de momenten M_1 en M_2 enerzijds en de hoekverdraaiingen φ_1 en φ_2 anderzijds. Deze relatie kan worden berekend en uitgedrukt met een vierkante stijfheidsmatrix $\bar{\mathbf{S}}$ van vier elementen.

$$\begin{pmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (29)$$

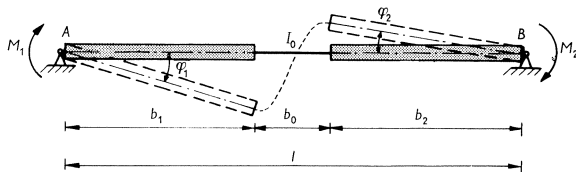


Fig. 14a. Werkelijke muurdamconstructie.

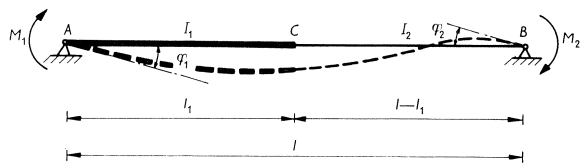


Fig. 14b. Vervangingsysteem.

Zoals eerder gezegd is iedere stijfheidsmatrix symmetrisch, zodat $\bar{s}_{12} = \bar{s}_{21}$. De elementen \bar{s}_{11} en \bar{s}_{22} zijn in het algemeen niet aan elkaar gelijk. De relatie is dus met drie elementen vastgelegd. Het vervangingsysteem is alleen dan gelijkwaardig als daarvoor dezelfde stijfheidsmatrix geldt. Het vervangingsysteem moet dus drie vrije parameters hebben om geschikt te kunnen worden gemaakt. Het model van fig. 14b voldoet hieraan. De traagheidsmomenten I_1 en I_2 en de lengte l_1 zijn de onbekenden. Zij kunnen als de wortels van drie vergelijkingen worden bepaald.

Men kan op deze manier tot een model komen dat met ieder normaal programma kan worden berekend. Dat in het model van fig. 14b een extra vrij verplaatsbaar knooppunt C voorkomt is de premie die men moet betalen om

de berekening toch te kunnen uitvoeren; de invoer wordt uitgebreider en de omvang van de mogelijk te berekenen constructie zal kleiner worden.

Men kan nog verder vereenvoudigen, zoals bij de analytische methode wordt gedaan. Aangenomen wordt dan dat met voldoende nauwkeurigheid kan worden gesteld:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \dots \dots \dots (30)$$

Betrekking (29a) wordt dan:

$$\begin{pmatrix} \bar{s}_{11}^\circ \\ \bar{s}_{21}^\circ \end{pmatrix} \cdot \varphi^\circ = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (29b)$$

waarin $\varphi^\circ = \varphi_1 = \varphi_2$ en $\bar{s}_{11}^\circ = \bar{s}_{11} + \bar{s}_{12}$ en $\bar{s}_{21}^\circ = \bar{s}_{21} + \bar{s}_{22}$.

Nu heeft het vervangingssysteem nog slechts twee vrije parameters. Eén van de drie onbekenden I_1 , I_2 en l_1 mag men dan nog zelf kiezen. Geadviseerd wordt om hiervoor de lengte l_1 te nemen en deze te bepalen op:

$$l_1 = b_1 + 1/2 b_0 \dots \dots \dots (31)$$

Punt C ligt dan in het midden van de muurdam. Dit geeft een controle op de aanname van gelijke hoekverdraaiingen; punt C moet nu immers een momentennulpunt worden!

De grootten van I_1 en I_2 kunnen nu eenvoudig elementair worden berekend:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{(b_1 + b_0 + b_2)(2b_1 + b_0)^2 \cdot I_0}{b_0^3} \\ I_2 &= \frac{(b_1 + b_0 + b_2)(2b_2 + b_0)^2 \cdot I_0}{b_0^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

Omdat de muurdammen relatief hoge liggers zijn, is de invloed van de vervorming door dwarskracht niet meer verwaarloosbaar klein. Men kan dit in rekening brengen door voor de muurdam een fictief traagheidsmoment I_f te introduceren. Berekent men van een prismatische balk welke hoekverdraaiingen aan de uiteinden ontstaan tengevolge van twee gelijke en tegengestelde eindmomenten met inachtneming van de daarbij optredende dwarskrachtvervorming, en stelt men deze gelijk aan de verdraaiingen die ontstaan door de buigvervorming alléén bij de fictieve stijfheid EI_f , dan vindt men:

$$I_f = \frac{I_0}{1 + 2k(1 + \nu)(h/b_0)^2} \dots \dots \dots (33)$$

Hierin is h de balkhoogte, ν de coëfficiënt voor de dwarscontractie en k een vormcoëfficiënt, die voor rechthoekige doorsneden op 1,2 kan worden gesteld.

De berekening met het model zoals nu is vastgesteld zal het meest overeenkomen met de analytische behandeling, omdat dezelfde benaderende aanname ($\varphi_1 = \varphi_2$) is gebruikt. Deze vereenvoudiging is voor de numerieke methode echter geen vereiste.

4.3 Ondersteuningsconstructies

Bij het werken volgens de analytische methode vormt het in rekening brengen van de wijze van ondersteunen soms een moeilijk probleem. Voor hoge gebouwen op een zeer dikke en dus stijve fundatieplaat (fig. 15a) is een en ander nog eenvoudig. Ook bij een verende ondersteuning (fig. 15b) is de oplossing relatief snel en eenvoudig te verkrijgen [3, 5].

Tegenwoordig worden echter gebouwen vaak zo ondersteund dat een onderdoorgang wordt verkregen. Deze kolomvormige draagconstructies als randvoorwaarde heeft ROSMAN [3b] ook behandeld. In fig. 15 zijn een aantal door hem besproken ondersteuningssystemen weergegeven. ROSMAN geeft er bij deze vrij gecompliceerde randvoorwaarden de voorkeur aan een benaderingsoplossing te verkrijgen m.b.v. differentierekening. Deze werkwijze lijkt weinig logisch. Wat is immers het geval?

In de werkelijke constructie is slechts in een beperkt aantal punten over de hoogte van de wand een muurdam aanwezig. De invloed van deze horizontale balken wordt eerst continu verdeeld om een differentiaalvergelijking te kunnen opstellen. Daarna wordt weer gediscrètiseerd om deze vergelijking te kunnen integreren m.b.v. differentierekening.

Het ligt meer voor de hand de werkelijke constructie rechtstreeks te berekenen.

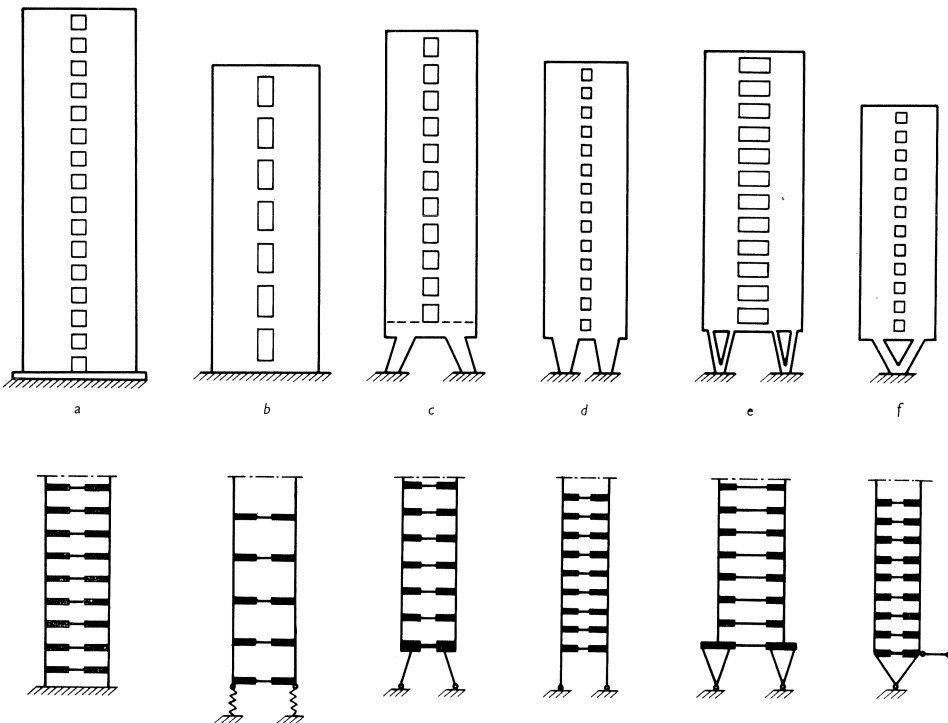


Fig. 15. Schets en rekenschema's van ondersteuningsconstructies bij hoge wanden.

Indien beschikt wordt over een programma als hiervoor is genoemd, is dit ook zeer eenvoudig. De constructies van de figuren 15c, 15d, 15e en 15f laten zich eenvoudig schematiseren zoals is aangegeven. De ondersteuning wordt direct in de berekening meegenomen. Omdat het programma is gebaseerd op de methode van onbekende verplaatsingen, wordt niet alleen de krachtsverdeling bepaald, maar volgt ook – als bijkomend voordeel – direct uit de berekening hoe groot in ieder punt de verplaatsingen en rotaties zijn.

4.4 Temperatuurspanningen

De numerieke methode is ook zeer geschikt om het effect van temperatuur variaties te bestuderen.

Van sommige wanden zal een gedeelte buiten en een gedeelte binnen de gevel kunnen liggen (zie fig. 16).

Dit kan leiden tot extra trekspanningen in de wand met alle gevolgen van dien, zoals bijv. scheurvorming.

Men kan deze invloed in rekening brengen op de manier die reeds in deel I werd beschreven, te weten:

Fixeer eerst alle knooppunten. Bereken welke krachten en momenten door de temperatuurwijziging voor het vasthouden van deze punten moeten worden uitgeoefend en bereken met deze primaire krachten en momenten de constructie. Het resultaat, gesuperponeerd op de primaire spanningsverdeling, geeft een inzicht in de spanningsverdeling in een wand als gevolg van het temperatuurverloop.

4.5 Numerieke resultaten

Aan de hand van een voorbeeld zal het praktisch gebruik van de berekenings-

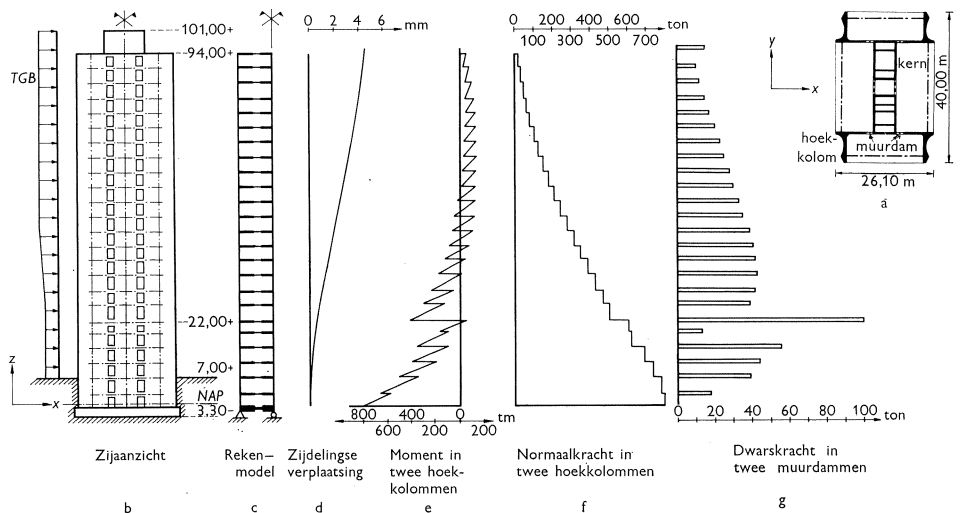


Fig. 16

methode worden toegelicht. Het voorbeeld betreft het nieuw te bouwen ongeveer 100 m hoge Provinciehuis te 's-Hertogenbosch, waarvan fig. 16a het doorsnedeschema geeft.

Fig. 16b geeft in zijaanzicht aan op welke plaats de openingen zijn aangebracht. De muurdammen zijn van steeds wisselende doorsnede. Voor ons doel (een controleberekening) is het niet nodig de redenen hiervoor te vermelden; het is voldoende te weten welke balken voorkomen en op welke plaats. Vanaf de fundatieplaat tot een niveau van 10,80 m +NAP komen balken voor van 50 bij 105 cm. Ter hoogte van het dak van de omringende laagbouw (15,00 m +NAP) komt een balk 50 bij 120 cm voor. De volgende balk meet slechts 30 bij 75 cm. Weer een verdieping hoger is een zeer zware balk 50 bij 160 cm toegepast. Op dit niveau (22,00 m +NAP) begint de werkelijke „toren”. Hierin zijn de balken steeds 50 bij 90 cm. De serie wordt afgesloten met een balk 50 bij 105 cm op een niveau van 94,00 m +NAP.

De afstand hart op hart der balken is variërend: gemiddeld ongeveer 4 m. De constructie wordt op staal gefundeerd. De berekening is uitgevoerd voor windbelasting in x -richting. De grootte van de winddrukken is nog gekozen in overeenstemming met de T.G.B. 1955, in afwachting van een herzien voorschrift.

Van de rechthoekige kern van het gebouw mag worden aangenomen dat deze in de x -richting als één verticale ligger werkt. De zwaartelijnen van de T-vormige hoekkolommen liggen niet in het vlak van de muurdammen, zodat in eerste instantie een ruimtelijk model nodig zou zijn. In werkelijkheid is echter ter hoogte van iedere muurdam een in zijn vlak stijve vloer aanwezig. Dit biedt de mogelijkheid de constructie te projecteren op een verticaal vlak evenwijdig aan de x -as, als is geschetst in fig. 16b. De „wand” tussen de twee rijen openingen representeert dan de kern en elk der „wanden” aan de buitenzijde der openingen vertegenwoordigt twee hoekkolommen.

Het rekenmodel van deze constructie is in fig. 16c geschetst. De belasting onder tegen de fundatieplaat bestaat uit de driehoekig verdeelde reactie van de grond.

Omdat het gebouw symmetrisch is t.o.v. de hartlijn, hoeft slechts één helft te worden berekend. In de kern kan, om redenen van keersymmetrie, geen normaalkracht optreden. Alle knopen in de kernhartlijn hebben dus in verticale richting een voorgeschreven verplaatsing gelijk nul. In het model moet voor de kern het halve traagheidsmoment in rekening worden gebracht.

De resultaten van de berekening zijn in de figuren 16d, 16e, 16f en 16g in beeld gebracht. Vooral in de laatste drie figuren is duidelijk herkenbaar op welke plaats in de hoogbouw afwijkende muurdammen voorkomen; deze corresponderen met meer of minder opvallende discontinuïteiten in het verloop van de diverse grootheden.

In fig. 17 blijkt tenslotte welke invloed de muurdammen hebben op de spanningen in de wanden.

Als de muurdammen niet meer dan afstandhouders (pendels) zouden zijn, kan de grootste trek-of drukspanning 45 kgf/cm² worden. In werkelijkheid is deze niet meer dan 8 kgf/cm², zodat de muurdammen de wanden duidelijk ontlasten. De grootste schuifspanning τ die, bij aanname van een parabolische verdeling over de hoogte in de muurdammen optreedt, is iets kleiner dan 9 kgf/cm². Als de wanden volledig zijn gekoppeld, is de grootste spanning onder in de wand 5 kgf/cm². Men zou dan dus bijna een factor twee te klein uitkomen.

In fig. 17 hebben de spanningslijnen voor de verschillende gevallen steeds hetzelfde punt gemeen. Er is kennelijk één plaats aan te geven waar de spanning onafhankelijk is van de mate van koppeling. Deze plaats kan als volgt worden bepaald.

De drie wanden van figuur 18a brengen het totale windmoment M over op de fundering via normaalkrachten N en momenten M_1 , M_2 en M_3 .

$$M = 2Nl + 2M_1 + M_2 \dots \dots \dots (34)$$

Als wordt aangenomen dat de drie wanden alle dezelfde uitbuigingsvorm hebben, dan geldt:

$$M_1 : M_2 = I_1 : I_2 \dots \dots \dots (35)$$

Uit (34) en (35) volgt:

$$M_1 = \frac{I_1}{2I_1 + I_2} (M - 2Nl) \dots \dots \dots (36)$$

In de linkerhoekkolom geldt dan voor de spanning op een afstand x links van de zwaartelijijn (fig. 18b):

$$\sigma_x = \frac{N}{F_1} + \frac{M_1 \cdot x}{I_1} \dots \dots \dots (37)$$

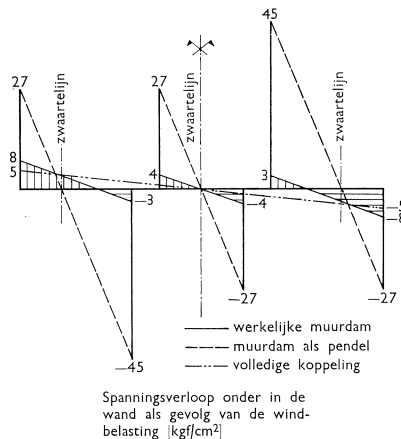


Fig. 17

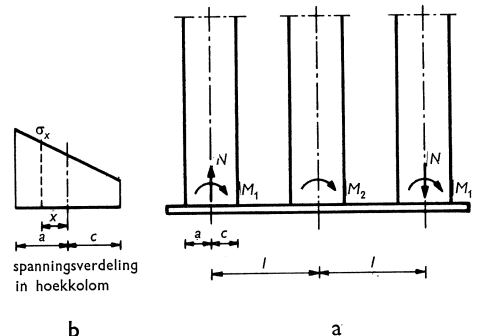


Fig. 18

Met (36) wordt dit:

$$\sigma_x = \left[\frac{1}{F_1} - \frac{2xl}{2I_1 + I_2} \right] N + \frac{xM}{2I_1 + I_2} \dots \dots \dots (38)$$

Wanneer in (38) de factor tussen haken nul is, resulteert een waarde voor σ_x die onafhankelijk is van N en dus van de mate van koppeling. Deze voorwaarde, dus:

$$\frac{1}{F_1} - \frac{2xl}{2I_1 + I_2} = 0$$

leidt tot:

$$x = \frac{2I_1 + I_2}{2lF_1} \dots \dots \dots (39)$$

Hiermee is de plaats van de invariante spanning vastgelegd. De grootte van deze spanning ter plaatse x volgt uit (38):

$$\sigma_x = \frac{M}{2lF_1} \dots \dots \dots (40)$$

Dit is juist dezelfde spanning als wanneer het windmoment M geheel door normaalkrachten in de hoekkolommen wordt opgenomen!

5 Resumé

Als men gebruik kan maken van een programma voor vlakke of ruimtelijke raamwerken kan men ook hoge wanden met openingen numeriek berekenen. Het eenvoudigst en meest economisch is men uit als het programma ook on-eindig stijve staven kan verwerken, maar strikt nodig is dit niet.

Aan het elektronisch berekenen zijn de volgende voordelen verbonden:

- de afstand tussen de verbindingbalken mag willekeurig variëren. Ook de stijfheid van iedere staaf kan vrij worden gekozen. De wand mag naar boven toe in dikte afnemen. Het aantal wanden wordt alleen beperkt door de beschikbare geheugenruimte.
- de door muurdammen gekoppelde wanden hoeven niet in één vlak te liggen. Ook een ruimtelijk systeem kan worden berekend.
- door temperatuurvariaties opgewekte spanningen kunnen eenvoudig worden bepaald.
- van alle constructiedelen worden direct de dwarskrachten, normaalkrachten en momenten als uitvoer verkregen.
- een bijkomend voordeel is dat ook de verplaatsingen worden berekend; de stijfheid van de constructie is dus ook bekend.

Verantwoording

Bij het tot stand komen van het in deel I beschreven programma heeft schrijver van velen hulp ondervonden. Ir. W. Visser van de groep Technische Mechanica van de afdeling der Werktuigbouwkunde en Scheepsbouwkunde van de T.H. Delft, gaf, met toestemming van Prof. Dr. Ir. J. F. Besseling inzage in een ter zake zijnd rapport over ruimtelijke staafconstructies. De heer Th. W. G. Duin van het Stevin-laboratorium stelde de procedure voor het oplossen van een stelsel vergelijkingen met een symmetrische bandmatrix samen, die ons ter beschikking is gesteld. Het programma zelf is geheel door mej. A. van IJsseldijk van T.N.O.-I.B.B.C. geschreven. Speciaal haar grote aandeel in het totale werk wordt met waardering vermeld. Tenslotte wordt het Constructiebureau Maaskant N.V. dank gezegd voor zijn toestemming de berekening van een wand in het Provinciehuis te 's-Hertogenbosch als toepassingsvoorbeeld van het programma te gebruiken.

Literatuur

1. LOOF, H. W., De programmabibliotheek van het Stevin-laboratorium voor het berekenen van schaalconstructies. *Heron* 12 (1964) no. 2, blz. 71 t/m 98.
2. BECK, H., Ein Beitrag zur Berechnung regelmässig gegliederter Scheiben. *Ingenieur-Archiv*, Band 1958, pp. 343 t/m 357.
3. ROSMAN, R.,
 - a. Systeme aus durchbrochenen Wänden. *Die Bautechnik* 2/1964, pp. 51 t/m 54.
 - b. Beitrag zur statischen Berechnung im Erdgeschoss aufgelöster Windscheiben bei Hochbauten. *Der Bauingenieur*, 40 (1965) Heft 5, pp. 195 t/m 198.
4. GOESELNIKOW, W. M., Rastsjet wertikalnych diafragms proemani kroepnopanelnych zdanii powysjennoi etazjnosti. (Berekening van verticale schijven met openingen in uit grote elementen samengestelde hoge gebouwen). *Beton i Zjelezobeton*, jrg. 10, nr. 10, p. 466.
5. SITTER, W. R. DE, De berekening van een hoge wand met een aantal openingen. *De Ingenieur, Beton en Betonconstructies*, 9, 17 september 1965, pp. Bt 125 t/m 133.
6. BLAAUWENDRAAD, J., Ruimtelijke staafconstructies. Rapport no. BI-65-59/13 k 10 van TNO-IBBC.
7. BESSELING, J. F., Handleiding voor het numeriek spannings- en trillingsonderzoek. T.H. Delft, 1964.
8. KOSTEN, L., Numerieke analyse, hfdst. XII. *Handboek der Wiskunde*; Delft.
9. GATEWOOD, B. E. and N. OHANIAN, Tri-diagonal matrix method for complex structures. *Journ. Struct. Div. ST 2.*, pp. 27 t/m 41. *Proc. A.S.C.E.*, April, 1965.
10. LIGHTFOOT, E., A grid framework analogy for laterally loaded plates. *Int. J. Mech. Sci.* 1964. Vol 6, pp. 201-208.
11. YETTRAM, A. L. and H. M. HUSAIN, Grid-framework method for plates in flexure. *Journ. Eng. Mech. Div. EM 3*, pp. 53-64, *Proc. A.S.C.E.*, June 1965.
12. HRENNIKOFF, A., Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method. *Journal of Applied Mechanics*, December 1941.