

R. SOERJADI

OVER DE BEREKENING VAN DE PROFIELGROOTHEDEN VAN VEELHOEKIGE DOORSNEDEN

U.D.C. 624.043

Het theorema van Green in het platte vlak, dat de mogelijkheid biedt een oppervlakte-integraal om te zetten in een contour-integraal, wordt hier gebruikt om de profielgrootheden van veelhoekige, ook meervoudig samenhangende, doorsneden te berekenen. Speciale formules worden daarnaast afgeleid voor dunwandige profielen; hun eventuele voordeel in verband met de nauwkeurigheid wordt besproken.

0 Inleiding

Een regelmatig weerkerend deelprobleem bij de sterkteberekening van constructies is het bepalen van de profielgrootheden van staven, zoals oppervlak, zwaartepuntsligging, traagheidsgrootheden. De bestaande tabellenboeken kunnen niet anders dan in de 'gewone' gevallen uitkomst bieden; voor de overige is de ontwerper op zichzelf aangewezen.

Een doorsnede van gecompliceerde vorm denkt men zich dan meestal opgebouwd uit delen, waarvoor de profielgrootheden primair bekend zijn, bijvoorbeeld rechthoeken [1]. Veelal heeft een staaf een veelhoekige doorsnede. Het verdelen van de veelhoek in delen met bekende profielgrootheden is zeker mogelijk, maar vereist het nodige inzicht.

In dit artikel is er naar gestreefd algemene formules af te leiden voor de profielgrootheden van een willekeurige veelhoek; op het vorenbedoeld inzicht, nodig om een bepaalde veelhoek op een geschikte manier te verdelen, wordt hierbij geen beroep meer gedaan en tevens lenen deze formules zich goed voor verwerking door een elektronische rekenautomaat.

De profielgrootheden zijn, zoals bekend, in het algemeen uit te drukken met behulp van oppervlakte-integralen. De in dit artikel uiteen te zetten methode maakt gebruik van de stelling van Green in het platte vlak, waarmee een oppervlakte- (dus tweevoudige) integraal kan worden omgezet in een lijn- (dus enkelvoudige) integraal. Het begrip lijnintegraal zal, alvorens het theorema van Green te behandelen, aan de hand van haar meetkundige interpretatie worden verklaard.

In het algemeen zal verder aan visuele interpretatie meer aandacht worden gegeven dan aan mathematische strengheid. Voor diverse andere, aan natuurkunde en techniek ontleende, interpretaties van het begrip lijnintegraal wordt verwezen naar [2].

1 De lijnintegraal

De 'gewone' integraal $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ kan meetkundig worden voorgesteld door een oppervlakte. Hierop voortbouwend is de lijnintegraal langs een vlakke kromme in het xy -vlak $\int_A^B f(x,y) ds$ eveneens voor te stellen als de oppervlakte van een gebogen oppervlak (in fig. 1 gearceerd aangegeven).

Zijn de coördinaten van punten van de kromme in het xy -vlak als functie van de boog-lengte s gegeven: $x = x(s)$ en $y = y(s)$, dan hoort dus bij elke waarde van de parameter s een punt $\{x(s), y(s)\}$ van de kromme. De integrand $f(x,y)$ is dus ook een functie $z(s) = f\{x(s), y(s)\}$ van s , en daarmee is de integraal $\int_{s_1}^{s_2} z(s) ds$ een 'gewone'

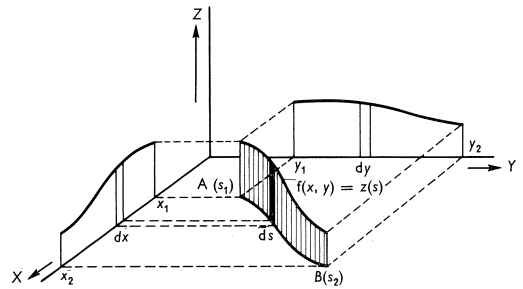


Fig. 1. Geometrische interpretatie van een lijnintegraal.

integraal geworden; men heeft a.h.w. de lijn AB tot een rechte s -as gemaakt.

Uitdrukkingen als $\int_A^B f(x,y) dx$ en $\int_A^B f(x,y) dy$ zijn om te vormen tot $\int_A^B f(x,y) \frac{dx}{ds} ds$ respectievelijk $\int_A^B f(x,y) \frac{dy}{ds} ds$. De integrand is in beide gevallen weer een functie van s . Deze integralen zijn op te vatten als oppervlakten van de projecties van het gebogen oppervlak op het xz -vlak respectievelijk yz -vlak. Immers, aangezien dx resp. dy de projecties van ds zijn, zullen de elementaire rechthoekjes $f(x,y) dx$ en $f(x,y) dy$ de projecties zijn van het elementaire rechthoekje $f(x,y) ds$.

De oppervlakte van het gebogen oppervlak $\int_A^B f(x,y) ds$ kan men ook in de vorm $\int_A^B g_1(x) dx$ respectievelijk $\int_A^B g_2(y) dy$ brengen: $\int_A^B f(x,y) ds = \int_{A(x_1)}^{B(x_2)} f(x,y) \frac{ds}{dx} dx = \int_{A(y_1)}^{B(y_2)} f(x,y) \frac{ds}{dy} dy$. En aangezien langs de kromme $x = x(s)$ en $y = y(s)$ geldt, is de integrand $f(x,y) \frac{ds}{dx}$ respectievelijk $f(x,y) \frac{ds}{dy}$ een functie $g_1(x)$ van x respec-

tievelijk $g_2(y)$ van y . Deze integralen hebben dan weer de 'gewone' gedaante.

Een andere interpretatie is een 'belegging' van de lijn AB; dit kan bijvoorbeeld zijn een massabelegging, maar men kan ook aan elektrische ladingen denken. De lijn AB wordt puntsgewijs continu beled m.a.w. de belegging is uitgedrukt in een functie $f(x, y)$, of zo men wil een functie $z(s)$ daar de lijn AB gegeven is als $x = x(s)$ en $y = y(s)$. De massa van de lijn AB, bij massa-belegging $f(x, y)$, wordt dan voorgesteld door de beschouwde integraal $\int_A^B f(x, y) ds$.

Evenals bij de 'gewone' integraal geldt hier ook de tekenafspreek $\int_A^B = -\int_B^A$ en de optelling $\int_A^B + \int_B^C = \int_A^C$. Is de lijn waarover geïntegreerd wordt een gesloten kromme c , dan spreekt men van een kring- of contourintegraal, aangeduid door \oint_c . Tenzij uitdrukkelijk anders vermeld, zullen we steeds aannemen dat de contour in de richting 'tegen de klok in' wordt doorlopen, dat wil zeggen dat s in deze richting positief wordt gerekend.

2 Het theorema van Green in het platte vlak

Beschouw een gebied F in het xy -vlak begrensd door een eenvoudige gesloten kromme c (zie fig. 2). Als f en g functies zijn van x en y , die aan zekere eisen van regelmatigheid voldoen, dan geldt

$$\oint_c (f dx + g dy) = \iint_F \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \dots (1)$$

waar de contour c in de positieve richting (tegen de klok in) wordt doorlopen.

Bewijs

Zij $y = y_1(x)$ de vergelijking van de lijn APB, en $y = y_2(x)$ die van AQB. Dan is:

$$\begin{aligned} \iint_F \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b [f(x, y)]_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b [f(x, y_2) - f(x, y_1)] dx = - \int_a^b f(x, y_1) dx + \int_a^b f(x, y_2) dx = \\ &= - \int_a^b f(x, y_1) dx - \int_b^a f(x, y_2) dx = - \oint_c f dx \end{aligned}$$

Dus

$$\oint_c f dx = - \iint_F \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \dots \dots \dots (2)$$

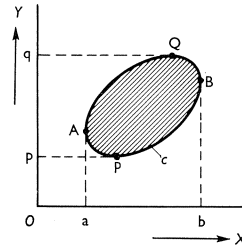


Fig. 2. Illustratie bij het bewijs van het theorema van Green.

Analoog is, als $x = x_1(y)$ de vergelijking voorstelt van de lijn PAQ, en $x = x_2(y)$ die van PBQ:

$$\begin{aligned} \iint_F \frac{\partial g}{\partial x} dx dy &= \int_p^q \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial g}{\partial x} dx \right] dy = \int_p^q [g(x, y)]_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy = \\ &= \int_p^q [g(x_2, y) - g(x_1, y)] dy = \int_p^q g(x_2, y) dy - \int_p^q g(x_1, y) dy = \\ &= \int_p^q g(x_2, y) dy + \int_q^p g(x_1, y) dy = \oint_c g dy \end{aligned}$$

Dus

$$\oint_c g dy = \iint_F \frac{\partial g}{\partial x} dx dy \dots \dots \dots (3)$$

Sommering van (2) en (3) levert de te bewijzen uitdrukking (1).

Met behulp van het theorema van Green in het platte vlak kan men dus een kringintegraal omzetten in een oppervlakte-integraal, en desgewenst omgekeerd.

In de technische mechanica vinden beide mogelijkheden toepassing. De lijnintegraal treedt onder meer op in de begrippen: *arbeid* verricht door een variabele kracht als het aangrijpingspunt een bepaalde weg doorloopt, *circulatie* als de kringintegraal van de snelheid, *verplaatsingen* als lijnintegralen van vervormingen, *krachten* als lijnintegralen van spanningen.

Vaak ontmoet men daarbij de eis, dat de lijnintegraal over een gesloten kromme nul moet zijn. Deze voorwaarde is alsdan om te zetten in een differentiaalvergelijking, die moet gelden voor het omsloten gebied.

$$\oint_c = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

In de genoemde gevallen leidt dit tot de voorwaarden voor achtereenvolgens: conservatieve krachtvelden, rotatievrije (of wervelloze of potentiaal-) stromingen, de samenhang der continue media, en tenslotte het evenwicht daarvan.

In het onderhavige geval is een oppervlakte-integraal gevraagd. Bij de oplossing wordt nu, in vergelijking met zoëven, de omgekeerde weg bewandeld, en de gezochte grootte uitgedrukt in een kringintegraal. Daarbij is men vrij in het kiezen van een herleiding volgens formules (1), (2) of (3).

3 De momenten van een veelhoekige doorsnede

3.1 Voorbeeld: de oppervlakte van een driehoek

Beschouwd wordt de driehoek $P_1P_2P_3$ in het xy -vlak zoals in fig. 3 aangegeven. Als eenvoudige toelichting op het hanteren van het theorema van Green zal de

oppervlakte van de driehoek met behulp hiervan worden bepaald. Gekozen wordt een herleiding volgens een formule van het type (2)

$$f(x, y) = y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$F = \iint_F dx dy = - \int_a^b y dx \dots \dots \dots (4)$$

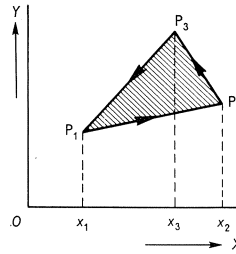


Fig. 3. Bepaling van het oppervlak van een driehoekige doorsnede.

De contour c is de omtrek van de driehoek. Aan het rechterlid is een meetkundige interpretatie van de formule te ontleen. Het oppervlak van de driehoek wordt opgebouwd uit de oppervlakken van drie trapezia, te weten $P_1x_1x_2P_2$, $P_2x_2x_3P_3$ en $P_3x_3x_1P_1$ waarbij volgens fig. 3 het eerstgenoemde trapezium een negatief aandeel bijdraagt. De drie trapeziumaandelen worden $T_{1, 2}$, $T_{2, 3}$ en $T_{3, 1}$ genoemd. Het bepalen van $T_{1, 2}$ wordt nader uitgewerkt, als eenvoudige toelichting op moeilijker herleidingen die in de volgende paragraaf aan de orde komen.

De zijde P_1P_2 heeft als vergelijking:

$$y = Ax + B \text{ met } A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ en } B = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \dots \dots \dots (5)$$

Het eerste trapeziumaandeel volgt nu uit:

$$\begin{aligned} -T_{1, 2} &= \int_{x_1}^{x_2} (Ax + B) dx = \left[\frac{1}{2} Ax^2 + Bx \right]_{x_1}^{x_2} = \\ &= \frac{1}{2} (y_2 - y_1) (x_2 + x_1) + (x_2 y_1 - x_1 y_2), \end{aligned}$$

of na uitwerking:

$$T_{1, 2} = \frac{1}{2} (x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2)$$

Voor de 3 bedoelde trapezia luiden de uitdrukkingen:

$$\left. \begin{aligned} T_{1, 2} &= \frac{1}{2} (x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2) \\ T_{2, 3} &= \frac{1}{2} (x_2 y_2 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_3 y_3) \\ T_{3, 1} &= \frac{1}{2} (x_3 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_1 y_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Somming ervan geeft als resultaat de oppervlakte van de driehoek:

$$F = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3) \dots \dots \dots (7)$$

(Opmerking: de produkten xy met onderling gelijke indices vallen tegen elkaar weg).

Formule (7) is gemakkelijk uit te breiden tot die voor een willekeurige veelhoek.

De uitwerking door een elektronische rekenmachine komt in het kort hierop neer, dat de coördinaten van de hoekpunten worden ingevoerd en de machine

door substitutie achtereenvolgens de aandelen voor de zijden van de veelhoek bepaalt.

Nu zijn de formules voor de *trapeziumaandelen* voor dit doel niet geheel bevredigend: er worden immers nodeloos termen berekend, die later weer wegvallen. In ieder trapezium-aandeel zijn twee van de vier termen overbodig.

Bij nader onderzoek blijkt, dat een andere opzet aanzienlijk economischer is. Daarbij wordt de oppervlakte-integraal opgebouwd uit een aantal *driehoek-aandelen*. In fig. 4 zijn dit de oppervlakten van de driehoeken OP_1P_2 , OP_2P_3 en OP_3P_1 , waarbij de laatstgenoemde driehoek een negatieve bijdrage geeft. De eenvoudigste methode om de formule voor een driehoek-aandeel te bepalen, is indirect; en wel door afleiding langs analytische weg uit de formule voor een trapezium-aandeel. Voor de numerieke uitwerking wordt dan de kortere formule gebruikt. Zo vindt men uit de trapeziumformules (6) direct, door daarin $x_3 = 0$, $y_3 = 0$ te substitueren:

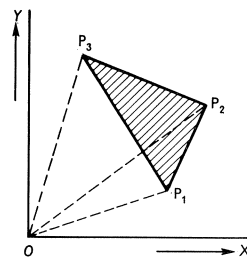


Fig. 4. Alternatieve bepaling van het oppervlak van een driehoekige doorsnede.

$$T_{1, 2} = 1/2(x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2)$$

$$T_{2, 0} = 1/2 x_2 y_2$$

$$T_{0, 1} = -1/2 x_1 y_1$$

waaruit (als D de aanduiding is voor driehoek-aandeel):

$$\left. \begin{aligned} D_{1, 2} &= 1/2(x_1 y_2 - x_2 y_1), \text{ en analoog} \\ D_{2, 3} &= 1/2(x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ D_{3, 1} &= 1/2(x_3 y_1 - x_1 y_3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Door somming verkrijgt men weer formule (7), echter thans zonder dat eerst overbodige termen berekend zijn, die dan bij de somvorming weer wegvallen.

3.2 *Momenten van willekeurige orde voor een veelhoek*

De 'momenten' waarvan hier sprake is, zijn oppervlakte-integralen van een term, gevormd door het produkt van machten van de coördinaten x en y tot een niet-negatieve, gehele, maar overigens willekeurige exponent. In formulevorm:

$$M_{p, q} = \iint_F x^p y^q dx dy \dots \dots \dots (9)$$

De statische momenten, de traagheidsmomenten en het centrifugaalmoment van een doorsnede vallen onder deze definitie. Ook momenten van hogere orde kunnen in de technische mechanica toepassing vinden; in paragraaf 3.4 wordt hierop nog teruggekomen. Ter bekorting van het betoog wordt nu rechtstreeks de formule voor het meest algemene geval afgeleid. Het aantal h der hoekpunten van de veelhoek zij eveneens willekeurig groot.

Schrijft men voorts

$$\left. \begin{aligned} m &= p+1, \quad n = q+1 \\ \text{dan is } M_{p,q} &= \sum_{i=1}^{i=h} T_{i,i+1} \\ \text{waarbij } T_{i,i+1} &= -\frac{1}{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x^{m-1} y^n dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

De sommatie is uiteraard zo te interpreteren, dat voor $i = h$ in plaats van $T_{h,h+1}$ het aandeel $T_{h,1}$ moet worden ingevuld.

Evenals in de vorige paragraaf wordt nu $T_{1,2}$ nader uitgewerkt. Voor y kan de in formule (5) gegeven vorm $(Ax+B)$ worden ingevuld. Een willekeurige macht hiervan kan worden uitgeschreven met behulp van de binomium-formule van Newton.

$$y^n = (Ax+B)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (Ax)^k B^{n-k}$$

Hieruit volgt direct:

$$-nT_{1,2} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \left[\frac{1}{m+k} x^{m+k} \right]_{x_1}^{x_2}$$

Door nu voor A en B de uitdrukkingen volgens formule (5) in te vullen, vindt men tenslotte:

$$-nT_{1,2} = \frac{1}{(x_2-x_1)^n} \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (y_2-y_1)^k (x_2 y_1 - x_1 y_2)^{n-k} \cdot \frac{1}{m+k} (x_2^{m+k} - x_1^{m+k}) \quad (11)$$

Uit de verkregen vorm zou men de indruk kunnen krijgen, dat de uitkomst een gebroken functie is. De deling blijkt echter steeds op te gaan, met als resultaat een veelterm in de variabelen x_1, x_2, y_1 en y_2 *). Dit volgt uit het feit dat indien x_1 tot x_2 nadert, het trapezium-aandeel eindig blijft; het nadert in feite tot nul.

De overgang naar het driehoek-aandeel is eenvoudig. Om te beginnen wordt formule (11) toegepast om trapezium-aandelen te vinden voor de verbindingslijnen met de oorsprong. In de sommatie blijft dan alleen de term met $k=n$ gehandhaafd.

*) Nadat de coëfficiënten van deze veelterm voor een aantal waarden van m en n door elektronische berekeningen waren vastgesteld, bleek kort voor het ter perse gaan van dit artikel een algemene schrijfwijze voor bedoelde veelterm mogelijk te zijn. Een bewijs voor de aldus inductief afgeleide stelling is sindsdien gevonden door Dr. J. H. J. Almering.

$$\text{Dan is } \left. \begin{aligned} -n(m+n)T_{0,1} &= x_1^m y_1^n \\ -n(m+n)T_{2,0} &= -x_2^m y_2^n \\ D_{1,2} &= T_{0,1} + T_{1,2} + T_{2,0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Veronderstelt men de veelterm $T_{1,2}$ volledig uitgeschreven en de termen gerangschikt naar het voorkomen van de index 1 of 2, dan zal de overgang (12) blijken neer te komen op het wegvallen van de eerste en laatste term. In de veelterm $D_{1,2}$ komen geen termen meer voor, waarin uitsluitend de index 1 of de index 2 een rol speelt. Een bewijs van deze stelling is te ontleenen aan een gedachtenexperiment, waarbij men de punten P_1 en P_2 zodanig verplaatst, dat zij met de oorsprong op één lijn liggen. De oppervlakte van de driehoek OP_1P_2 , alsook het driehoek-aandeel in ieder hoger moment worden dan nul. De algebra leert dan, dat de veeltermen voor de genoemde grootheden een gemeenschappelijke factor moeten hebben, die nul wordt. Voor de oppervlakte van de driehoek OP_1P_2 bijv. kan deze factor slechts zijn $x_1 y_2 - x_2 y_1$, zie formule (8). Maar dan moet het driehoek-aandeel in een hoger moment ook deze uitdrukking als factor bevatten, zodat termen met uitsluitend de index 1 of 2 nooit hierbij kunnen optreden.

Ter illustratie wordt nu de uitwerking gegeven voor een van de hogere momenten, te weten:

$$M_{2,1} = \iint_F x^2 y dx dy \quad (m = 3, n = 2)$$

Hierbij zal het rechterlid volgens formule (11) stap voor stap worden uitgeschreven. Door de volgorde van punt 1 en 2 te verwisselen verkrijgt men daarbij de regelmatige rangschikking van termen; tevens keert het teken om, zodat de uitkomst $+2T_{1,2}$ is. Uitwerking op deze wijze geeft voor het sommatiegedeelte van formule (11) het volgende resultaat:

$$\begin{aligned} &x_1^5(1/5 y_1^2 + 1/10 y_1 y_2 + 1/30 y_2^2) + \\ &-x_1^4 x_2(1/2 y_1^2 + 1/6 y_1 y_2) + \\ &+x_1^3 x_2^2(1/3 y_1^2) - x_1^2 x_2^3(1/3 y_2^2) + \\ &+x_1 x_2^4(1/6 y_1 y_2 + 1/2 y_2^2) + \\ &-x_2^5(1/30 y_1^2 + 1/10 y_1 y_2 + 1/5 y_2^2) \end{aligned}$$

Bij deling door $(x_2 - x_1)^2$ ontstaat het quotiënt:

$$\begin{aligned} &x_1^3(1/5 y_1^2 + 1/10 y_1 y_2 + 1/30 y_2^2) + \\ &-x_1^2 x_2(1/10 y_1^2 - 1/30 y_1 y_2 - 1/15 y_2^2) + \\ &-x_1 x_2^2(1/15 y_1^2 + 1/30 y_1 y_2 - 1/10 y_2^2) + \\ &-x_2^3(1/30 y_1^2 + 1/10 y_1 y_2 + 1/5 y_2^2) \end{aligned}$$

Ter controle dient, dat deze uitdrukking naar nul tendeert als x_1 tot x_2 nadert. De overgang naar het driehoek-aandeel brengt met zich mee dat de uiterste termen $1/5x_1^3y_1^2$ en $-1/5x_2^3y_2^2$ geschrapt worden. De resulterende uitdrukking heeft een factor $(x_1y_2 - x_2y_1)$. Het quotiënt bij deling hierdoor is:

$$x_1^2(1/10y_1 + 1/30y_2) + x_1x_2(1/15y_1 + 1/15y_2) + x_2^2(1/30y_1 + 1/10y_2)$$

Met behulp hiervan is het eindresultaat te schrijven in een vorm, die gereed is voor numerieke uitwerking met een minimum aan rekentijd.

$$M_{2,1} = \sum_{i=0}^{i=h} D_{i,i+1} \left. \vphantom{\sum_{i=0}^{i=h}} \right\} \dots (13)$$

(het punt P_{h+1} is identiek aan het punt P_1)
 Daarbij luidt het driehoek-aandeel voor bijv. de zijde P_1P_2 :

$$D_{1,2} = 1/60(x_1y_2 - x_2y_1)\{x_1^2(3y_1 + y_2) + 2x_1x_2(y_1 + y_2) + x_2^2(y_1 + 3y_2)\}$$

Het is duidelijk, dat wanneer het gaat om een veelhoek met een groot aantal hoekpunten, of dat veel verschillende profielen moeten worden doorgerekend, het van bijzonder belang is, dat de toe te passen formule in de meest economische vorm gegoten is *).

3.3 Profielgrootheden voor een veelhoekige doorsnede

De in de vorige paragraaf beschreven methode van afleiding geeft bij toepassing op de profielgrootheden van een veelhoekige doorsnede uitkomsten zoals weergegeven in tabel 1. De eerste kolom geeft de gebruikelijke notatie voor de beschouwde grootheden, de tweede kolom de moment-notatie en de derde kolom het driehoek-aandeel voor de zijde P_1P_2 . De in alle formules voorkomende factor $x_1y_2 - x_2y_1$ wordt met de letter d (van determinant) aangeduid. Voor iedere grootheid geldt wederom:

$$M_{p,q} = \iint_F x^p y^q dx dy = \sum_{i=1}^{i=h} D_{i,i+1}$$

(het punt P_{h+1} is identiek aan het punt P_1)

*) De algemene afleiding, in de vorige voetnoot vermeld, leidt tot de volgende formule voor het driehoek-aandeel bij willekeurige waarden van m en n :

$$D_{1,2} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n)!} (x_1y_2 - x_2y_1) \sum_{i=0}^{i=m-1} \sum_{j=0}^{j=n-1} \binom{i+j}{i} \binom{m+n-2-i-j}{m-1-i} x_1^{m-1-i} x_2^i y_1^{n-1-j} y_2^j$$

Tabel 1

F	$M_{0,0}$	$1/2(x_1y_2 - x_2y_1) = 1/2d$
S_x	$M_{0,1}$	$1/6d(y_1 + y_2)$
S_y	$M_{1,0}$	$1/6d(x_1 + x_2)$
I_x	$M_{0,2}$	$1/12d(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)$
I_y	$M_{2,0}$	$1/12d(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$
C_{xy}	$M_{1,1}$	$1/24d\{x_1(2y_1 + y_2) + x_2(y_1 + 2y_2)\}$

Zoals gebruikelijk, wordt onder S_y verstaan het moment om de y -as, dus de integraal van $x \, dx \, dy$.

Bij de technische toepassing wordt meestal gevraagd naar de traagheidsmomenten betrokken op assen door het zwaartepunt en naar de ligging van de hoofdtraagheidsassen en de grootte van de betreffende hoofdtraagheidsmomenten. De hiertoe benodigde transformaties zijn elementair. Bij de formulering is rekening te houden met automatische uitwerking. Bij de verschuiving van de oorsprong naar het zwaartepunt geldt:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{S_y}{F}; & y_0 &= \frac{S_x}{F} \\ I_{ex} &= I_x - S_x \cdot y_0; & I_{ey} &= I_y - S_y \cdot x_0 \\ C_{exy} &= C_{xy} - S_x \cdot x_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Bij het bepalen van de hoofdasen is het nuttig de grafische voorstelling met de cirkel van Mohr in gedachten te houden (fig. 5). Aan de hand hiervan kan worden aangetoond dat het grootste en kleinste eigentraagheidsmoment (I_{e1} en I_{e2} genoemd) en de hoek α tussen de x -as en de eerste hoofdas voldoen aan de volgende formules, met inachtneming van de mogelijke grensgevallen:

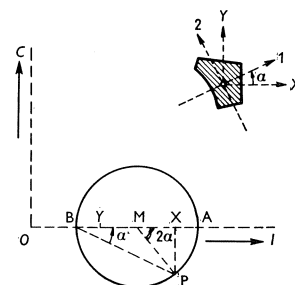


Fig. 5. Transformatie naar de hoofdtraagheidsassen.

$$\overline{OM} = 1/2(I_{ex} + I_{ey}); \quad \overline{MX} = 1/2(I_{ex} - I_{ey})$$

Indien $C_{exy} = 0$ en

$$\overline{MX} = 0, \text{ dan } \alpha \text{ onbepaald en } I_{e1} = I_{e2} = I_{ex} = I_{ey}$$

$$\overline{MX} > 0, \text{ dan } \alpha = 0 \quad \text{en } I_{e1} = I_{ex}; \quad I_{e2} = I_{ey}$$

$$\overline{MX} < 0, \text{ dan } \alpha = 1/2\pi \quad \text{en } I_{e1} = I_{ey}; \quad I_{e2} = I_{ex}$$

Indien $C_{exy} \neq 0$

$$\overline{MP} = \sqrt{\overline{MX}^2 + C_{exy}^2}, \quad \text{tg } \alpha = - \frac{C_{exy}}{\overline{MP} + \overline{MX}}$$

$$I_{e1} = \overline{OM} + \overline{MP}, \quad I_{e2} = \overline{OM} - \overline{MP}$$

(15)

Het onderzoek of een grootheid (C_{exy} of \overline{MX}) gelijk is aan nul wordt bij de numerieke uitwerking verricht door na te gaan of de absolute waarde kleiner is dan een tolerantiebedrag ε , waarvoor men bijv. het miljoenste deel van \overline{OM} kan nemen. Zou men dit niet doen, dan zou de vergelijking door afrondingsfouten kunnen worden verstoord.

Het beschreven rekenproces kan nu worden geprogrammeerd voor de elektronische rekenmachine. De hier weergegeven tekst komt in hoofdzaak overeen met het door Mevr. M. van Oosterom-Weesing vervaardigde programma, dat in de bibliotheek van de groep Toegepaste Wiskunde van het Stevin-Laboratorium is opgenomen. Een van de verschilpunten is, dat de invoer- en uitvoerprocedures van de TR4 (de rekenautomaat van de Wiskundige Dienst van de Technische Hogeschool) zijn vervangen door de procedures, die zijn voorgesteld door een internationale werkgroep op het gebied van ALGOL [3]. In de beschrijving van deze procedures wordt verondersteld dat invoer- en uitvoerkanalen expliciet genoemd worden. Hier is uitgegaan van de aanwezigheid van drie kanalen:

1. invoer via ponsband van diverse grootheden, onder meer gehele getallen en decimale breuken,
2. uitvoer naar een regeldrukker van strings (rijen symbolen) waarbij naast letters, cijfers en rekentekens ook beschikbaar zijn de symbolen \square (waarmee wordt aangeduid dat de regeldrukker een plaats onbedrukt laat) en **newline** (die bewerkt dat aan de volgende regel begonnen wordt),
3. uitvoer naar dezelfde regeldrukker van decimale breuken in een prettig leesbare vorm en in beperkte, maar voor technische toepassingen voldoende, nauwkeurigheid.

De volgorde waarin het programma de opdrachten afwerkt, resp. de wijze waarop afhankelijk van zekere voorwaarden een keuze tussen verschillende opdrachten wordt gemaakt zijn toegelicht met een stroomdiagram (fig. 6).

Als invoergegevens moeten worden verstrekt het aantal hoekpunten van de veelhoek, gevolgd door de coördinaten van de hoekpunten; de omtrek wordt hierbij in positieve richting (tegen de klok in) doorlopen.

Uitgevoerd worden de resultaten volgens tabel 1, formule (14) en formule (15).

Programma voor de berekening van de profielgrootheden van een veelhoekige doorsnede.

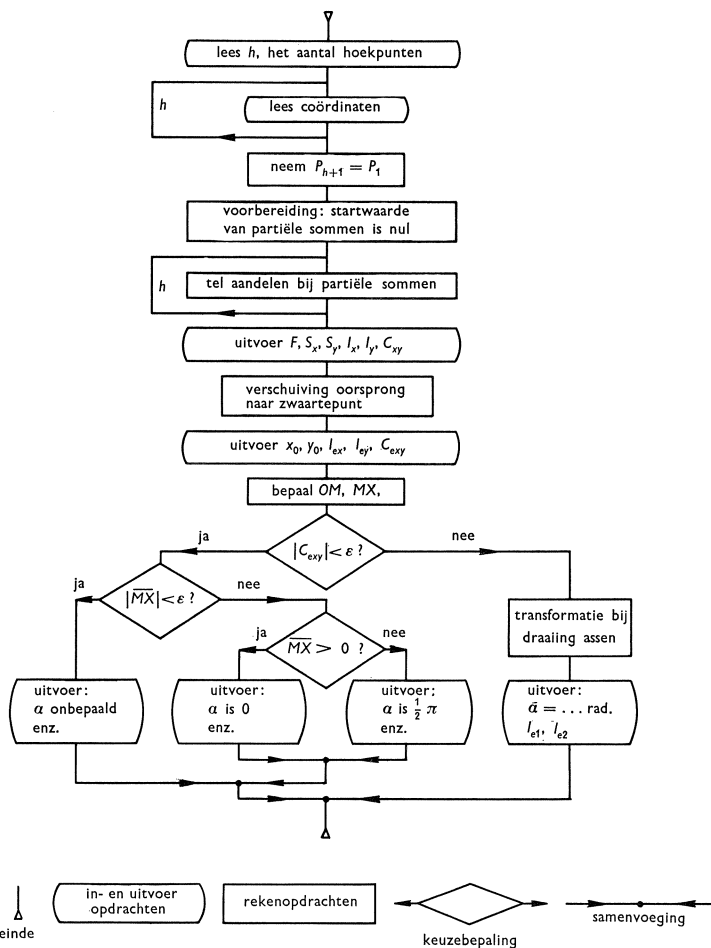


Fig. 6. Stroomdiagram als toelichting op de gang van zaken bij het programma.

```

begin integer h;
  ininteger (1, h);
  begin array x, y[1:h+1]; integer i;
    real x1, x2, y1, y2, f, sx, sy, ix, iy, cxy, d, x0, y0,
      iex, iey, cexy, eps, om, mx, mp, alfa, ie1, ie2;
    for i := 1 step 1 until h do
      begin inreal (1, x[i]); inreal (1, y[i]) end;
      x[h+1] := x[1]; y[h+1] := y[1];
      f := sx := sy := ix := iy := cxy := 0;
      for i := 1 step 1 until h do
        begin x1 := x[i]; x2 := x[i+1];
          y1 := y[i]; y2 := y[i+1];
          d := x1 × y2 - x2 × y1;
          f := f + d/2;
          sx := sx + d/6 × (y1 + y2);
          sy := sy + d/6 × (x1 + x2);
          ix := ix + d/12 × (y1 × y1 + y1 × y2 + y2 × y2);
          iy := iy + d/12 × (x1 × x1 + x1 × x2 + x2 × x2);
          cxy := cxy + d/24 × (x1 × (2 × y1 + y2) + x2 × (y1 + 2 × y2))
        end;
      outstring (2, 'newline f□□□='); outreal (3, f);
      outstring (2, 'sx□□='); outreal (3, sx);
      outstring (2, 'sy□□='); outreal (3, sy);
      outstring (2, 'newline ix□□='); outreal (3, ix);
      outstring (2, 'iy□□='); outreal (3, iy);
      outstring (2, 'cxy□'); outreal (3, cxy);
      x0 := sy/f; y0 := sx/f;
      iex := ix - sx × y0; iey := iy - sy × x0;
      cexy := cxy - sx × x0;
      outstring (2, 'newline x0□□='); outreal (3, x0);
      outstring (2, 'y0□□='); outreal (3, y0);
      outstring (2, 'newline iex□'); outreal (3, iex);
      outstring (2, 'iey□='); outreal (3, iey);
      outstring (2, 'cexy='); outreal (3, cexy);
      outstring (2, 'newline');
      om := (iex + iey)/2; mx := (iex - iey)/2; eps :=  $10^{-6}$  × om;
      if abs(cexy) < eps
        then begin if abs(mx) < eps
          then outstring (2, 'alfa□is□onbepaald newline
            ie1□=ie2□=iex□=iey')
          else if mx > 0
            then outstring (2, 'alfa□is□nul newline
              ie1□=iex□□ie2□=iey')
            else outstring (2, 'alfa□is□pi/2 newline
              ie1□=iey□□ie2□=iex')
          end
        else begin mp := sqrt(mx × mx + cexy × cexy);
          alfa := arctan(-cexy/(mp + mx));
          ie1 := om + mp; ie2 := om - mp;
          outstring (2, 'alfa='); outreal (3, alfa);
          outstring (2, 'radialen newline ie1□='); outreal (3, ie1);
          outstring (2, 'ie2□='); outreal (3, ie2)
        end
      end
    end
  end

```

3.4 Toepassing op meervoudig samenhangende doorsneden

Het theorema van Green is ook geldig voor meervoudig samenhangende doorsneden. Dit zal worden nagegaan aan de hand van fig. 7. Over de gearceerde doorsnede dient een oppervlakte-integraal overeenkomstig het rechterlid van formule (1) te worden bepaald. De uitkomst verandert niet, als aan het integratiegebied een oneindig smal reepje $P_3P_4P_7P_8$ wordt onttrokken. Daarmee wordt een enkelvoudig samenhangend gebied verkregen, waarvoor de geldigheid van het theorema reeds vaststaat; de oppervlakte-integraal kan dus worden vervangen door een lijnintegraal overeenkomstig het linkerlid van formule (1). De lijnintegraal wordt langs de contour $c \equiv P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_1$ genomen. De bijdragen van de snedekanten P_3P_4 en P_7P_8 zijn echter elkaars tegengestelde en kunnen weggelaten worden. Het resultaat is dan dat de oppervlakte-integraal gelijk is aan de som van twee lijnintegralen over kringen c_0 en c_1 , identiek met de buitenomtrek en de binnenomtrek, waarbij de laatstgenoemde in de richting met de klok mee wordt doorlopen.

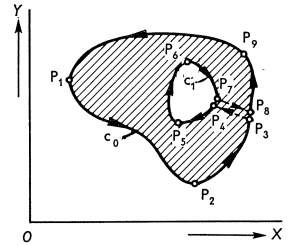


Fig. 7. Het theorema van Green voor een meervoudig samenhangende doorsnede.

$$c_0 \equiv P_8P_9P_1P_2P_3 \quad c_1 \equiv P_4P_5P_6P_7$$

Door de twee contouren c_0 en c_1 gezamenlijk als de omtrek van het gearceerde gebied F te beschouwen, komt men tot de conclusie dat het theorema van Green ook voor dit meervoudig samenhangende gebied geldig is.

Deze bewijsgang wordt in wiskundige handboeken gevolgd, omdat daarbij blijkt dat de integrand slechts over het gearceerde gebied aan eisen van regelmatigheid moet voldoen. Dit voordeel heeft men niet bij de meer voor de hand liggende aanpak, de stelling van Green op te schrijven voor de gebieden F_0 en F_1 binnen de contouren c_0 en c_1 en dan het verschil te nemen.

Het uitgevoerde gedachtenexperiment heeft in het onderhavige geval nog een bijkomend voordeel. Het geeft namelijk een aanwijzing hoe het programma voor de bepaling van de profielgrootheden van een veelhoekige staafdoorsnede ongewijzigd kan worden gebruikt voor een meervoudig samenhangende doorsnede. Bij het gereedmaken van de invoergegevens moet men dan te werk gaan alsof de snede werkelijk aanwezig was en de weg van buitenomtrek naar binnenomtrek daar langs verloopt. De coördinaten van een punt van de buitenomtrek (P_3) worden dan gevolgd door de coördinaten van een punt van de binnenomtrek (P_4). Vervolgens worden, in de richting met de wijzers van de klok mee, de punten van de binnenomtrek afgewerkt. De eindpunten van de snede komen nog eenmaal terug (als P_7 en P_8), zodat het aantal hoekpunten met twee is verhoogd. De machine zal nu zonder meer de juiste waarden van oppervlakte, traagheidsmomenten enz. berekenen en uitvoeren.

Het zou als nadeel kunnen worden gezien dat de integratiebijdrage langs de snede nu nodeloos eenmaal positief en eenmaal negatief in rekening wordt gebracht. Hier staat echter tegenover dat men de rekenautomaat geen informatie hoeft te verstrekken in de vorm van extra invoergegevens, zoals het aantal gaten en welke hoekpunten op welke omtrek liggen. De voorbereidingen die dit zou vergen wegen zwaarder dan de weinige automatisch verlopende rekenhandelingen, die behoren bij de snede-overgangen van buitenomtrek naar binnen, en omgekeerd, als evenbedoeld.

3.5 Toepassingsmogelijkheden ter zake van de momenten van hogere orde

Het zoeken naar een algemene berekeningswijze voor de grootheden van een staafprofiel heeft ook de vraag inzake de mogelijkheid van soortgelijke formules voor momenten van willekeurige orde naar voren gebracht. In het volgende zal aan de hand van enige voorbeelden worden aangetoond dat er voor de berekeningswijze ook toepassingsmogelijkheden in de technische mechanica zijn voor wat betreft momenten van orde hoger dan twee (wat voldoende was in het geval van de diverse profielgrootheden).

a. Doorsnedeberekening voor beton in het breukstadium

In de G.B.V. 1962, artikel 47, wordt bepaald dat bij berekeningen van betondoorsneden op buiging in het breukstadium moet worden uitgegaan van (onder meer) de onderstelling dat het σ - ϵ -diagram voor druk de symmetrieheeft is van een tweedegraadspaarabool met als topwaarde voor de spanning de maximale betondrukspanning σ_u' . Voorts wordt het beton geacht geen trekspanningen op te nemen.

Wanneer de doorsnedevorm ingewikkeld is of buiging om twee assen optreedt, is er in het bedoelde geval veel rekenarbeid verbonden aan het uitwerken van de resulterende betondrukkracht en de buigende momenten als integralen van spanningen.

Als voorbeeld wordt beschouwd het geval van een rechthoekige doorsnede volgens fig. 8, waarbij de neutrale lijn P_2P_3 de assen schuin snijdt. De vergelijking van P_2P_3 zij (betrokken op de symmetrieassen van de doorsnede):

$$x - 2y - 30 = 0$$

In het punt $P_1(-20; 30)$ heeft de betondrukspanning de uiterste waarde σ_u' bereikt. Het spanningsverloop kan worden weergegeven door een parabolische cilinder, waarvan de lijn P_2P_3 een nuldoorgang vormt. De andere nuldoorgang (fictief) wordt gevormd door een ten opzichte

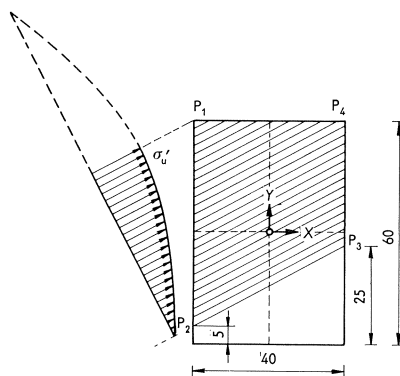


Fig. 8. Betonddoorsnede in het breukstadium (bij buiging om 2 assen).

van het punt P_1 symmetrisch gelegen en daarom parallel met de voren- genoemde doorgangslijn verlopende lijn, die tot vergelijking heeft:

$$x - 2y + 190 = 0$$

Het verloop van de drukspanning kan nu worden geschreven als

$$\begin{aligned} \sigma' &= c(x - 2y - 30)(x - 2y + 190) = \\ &= c(x^2 - 4xy + 4y^2 + 160x - 320y - 5700) \end{aligned}$$

Voor de spanning in P_1 ($x = -20$, $y = +30$) geldt dientengevolge:

$$\sigma' = \sigma_u' = -12100c \quad \text{zodat} \quad c = -\sigma_u' / 12100$$

In het algemeen geldt $\sigma' = cL_1L_2$, waarbij $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$ de vergelijkingen zijn van de nuldoorgangslijnen van de parabolische cilinder, die het spannings- verloop weergeeft.

De groote en plaats van de drukresultante volgen uit:

$$\begin{aligned} N' &= \iint_F \sigma' dx dy \\ e_{0,x} \cdot N' &= \iint_F x \sigma' dx dy \\ e_{0,y} \cdot N' &= \iint_F y \sigma' dx dy \end{aligned}$$

In dit voorbeeld is

$$\begin{aligned} N' &= c(M_{2,0} - 4M_{1,1} + 4M_{0,2} + 160M_{1,0} - 320M_{0,1} - 5700M_{0,0}) = 1075\sigma_u' \\ e_{0,x} \cdot N' &= c(M_{3,0} - 4M_{2,1} + 4M_{1,2} + 160M_{2,0} - 320M_{1,1} - 5700M_{1,0}) = -2,4N' \\ e_{0,y} \cdot N' &= c(M_{2,1} - 4M_{1,2} + 4M_{0,3} + 160M_{1,1} - 320M_{0,2} - 5700M_{0,1}) = 13,1N' \end{aligned}$$

Zoals hieruit blijkt, spelen bij betonberekeningen volgens de breukmethode de momenten van orde drie een rol. Bij een drukgebied van veelhoekige vorm kunnen deze volgens de in paragraaf 3.2 beschreven methode worden bepaald.

b. De membraanalogie

Voor het bepalen van de schuifspanningsverdeling in de doorsnede van een balk in het geval van zuivere wringing volgens De Saint Venant kan de membraanalogie van Prandtl worden toegepast [4]. Niet alleen dank zij de mogelijke experimentele uitvoering met behulp van een zeepvlies, maar ook als gedachtensteun is deze analogie van groot nut.

Beschouwd wordt een gewrongen staaf met een doorsnede in de vorm van een willekeurige vierhoek (fig. 9). Het analoge

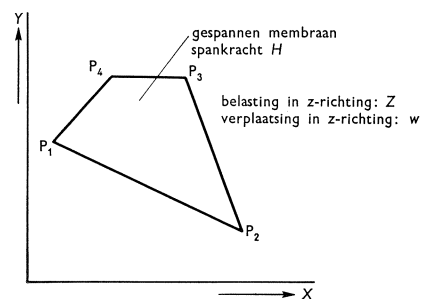


Fig. 9. Membraan als analogie van een gewrongen balk met doorsnede in de vorm van een willekeurige vierhoek.

membraan is opgespannen op een rand van die vorm; bij doorbuiging heeft het membraan nuldoorgangen ter plaatse van de zijden. Indien men veronderstelt dat de doorbuiging te beschrijven is als een machtreeks in x en y moet deze de volgende gedaante hebben:

$$w = L_1 L_2 L_3 L_4 (c_1 + c_2 x + c_3 y + \dots),$$

indien de zijden voldoen aan de vergelijkingen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ en $L_4 = 0$. Ter plaatse van de zijden is dan de doorbuiging automatisch nul.

Het bepalen van het doorbuigingsvlak komt neer op het oplossen van de potentiaalvergelijking. Bij een van de hiervoor geschikte benaderingsmethoden neemt men een doorbuigingsvlak aan volgens een eindige machtreeks van vorenvermelde gedaante. De coëfficiënten c_1 , c_2 , enz. worden zodanig bepaald, dat de potentiële energie minimaal wordt [6]. Deze methode is afkomstig van Ritz. De potentiële energie \mathbf{P} bij een doorgebogen membraan met alzijdige trekvoorspanning H onder belasting Z wordt gegeven door de uitdrukking:

$$\mathbf{P} = \iint_F \left[\frac{1}{2} H \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} - Z w \right] dx dy$$

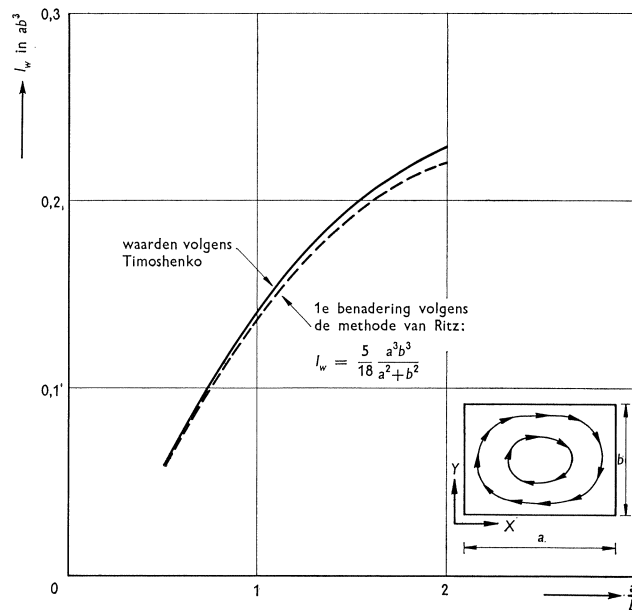
Indien de doorbuiging volgens een machtreeks is aangenomen bestaat de integraal uit een aantal momenten van hogere orde. Men bepaalt vervolgens de afgeleiden naar de verschillende coëfficiënten, nodig voor het uitschrijven van de minimumvoorwaarde.

Na het bepalen van de coëfficiënten door oplossing van het resulterende stelsel lineaire vergelijkingen is nog eenmaal integratie nodig indien het zogenaamde „wringtraagheidsmoment” I_w wordt verlangd, dat evenredig is met het volume tussen het uitgebogen membraan en het vlak van zijn uitgangsstand.

$$I_w = \frac{4H}{Z} \iint_F w dx dy$$

Als voorbeeld wordt beschouwd de wringing van een staaf met rechthoekige doorsnede.

Fig. 10. Wringstijfheid van een balk met rechthoekige doorsnede.



snede (fig. 10). Als aanname voor de membraan-doorbuiging wordt eerst een eenvoudige reeks met slechts één vrije constante ingevoerd:

$$w = c_1 x(x-a)y(y-b)$$

Het uitwerken van de voorwaarde van minimum potentiële energie leidt hierbij nochtans tot het bepalen van momenten van de zesde orde.

Als eindresultaat wordt gevonden:

$$I_w = \frac{5}{18} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

In fig. 10 is deze functie grafisch voorgesteld en vergeleken met nagenoeg exacte resultaten uit de literatuur die langs andere weg zijn verkregen [5]. De uitkomsten zijn relatief het nauwkeurigst als de lengten van de rechthoekszijden niet te veel uiteenlopen; in het afgebeelde gebied der afmetingsverhoudingen is de relatieve fout niet groter dan 3%.

De nauwkeurigheid kan vrij snel worden opgevoerd door het gebruik van een verder voortgezette reeks als aanname voor de doorbuiging. Zo geeft

$$w = x(x-a)y(y-b)\{c_1 + c_2(x-1/2a)^2 + c_3(y-1/2b)^2\}$$

als uitkomst

$$I_w = \frac{14}{9} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \cdot \frac{9a^4 + 82a^2 b^2 + 9b^4}{45a^4 + 464a^2 b^2 + 45b^4}$$

Bij de berekening hiervan zijn momenten tot en met de orde tien uitgewerkt. De relatieve fout is nu ongeveer 0,1% in het bereik dat in fig. 10 is afgebeeld, zodat dit verschil niet meer in de grafiek tot uitdrukking kon worden gebracht.

De methode van Ritz verschaft blijkbaar voldoende nauwkeurige resultaten mits men bereid is momenten van hoge orde te berekenen. Ook hier is dus toepassing te geven aan de formules van paragraaf 3.2, waardoor ook meer ingewikkelde doorsnedevormen behandeld kunnen worden. Als algemeen voorbehoud geldt evenwel dat de methode van Ritz in de besproken vorm slechts is toe te passen op *convexe, enkelvoudig samenhangende* doorsneden.

c. Doorbuiging van een ingeklemde plaat

Naast de potentiaalvergelijking speelt ook (en zelfs in meerdere mate) de bipotentiaalvergelijking een rol in de technische mechanica, bijvoorbeeld in de theorie van buigstijve platen.

Behandeling van problemen uit dit toepassingsgebied kan onder andere met de methode van RRRZ geschieden [7, 10], waarbij als uitdrukking voor de potentiële energie gebruikt wordt:

$$\mathbf{P} = \iint_F \left[\frac{1}{2} K \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\rangle^2 \right) \right\} - Zw \right] dx dy$$

met $K = Et^3/12(1-\nu^2)$ als plaatstijfheid en met Z en w als belasting resp.

verplaatsing in z -richting. Indien krachten en momenten, die op de rand aangrijpen, tijdens de vervorming arbeid verrichten, moet ook deze bij de berekening van de potentiële energie in mindering worden gebracht. Met de geometrische randvoorwaarden wordt rekening gehouden door de aanname van het doorbuigingsvlak in overeenstemming daarmee te kiezen.

Als voorbeeld wordt een rechthoekige plaat beschouwd. Indien de plaat is ingeklemd langs een rand die met de y -as samenvalt, kan dit in rekening worden gebracht door in de uitdrukking voor de doorbuiging een factor x^2 op te nemen (dan is op de rand zowel w als $\partial w/\partial x$ gelijk aan nul). Indien de plaat langs alle randen is ingeklemd, wordt de aanname ten minste:

$$w = c_1 x^2 (x-a)^2 y^2 (y-b)^2,$$

of een uitdrukking van nog hogere graad als men ter verkrijging van grotere nauwkeurigheid de factor c_1 vervangt door een veelterm met meerdere constanten. Bij de bovenvermelde aanname moeten momenten van orde twaalf worden bepaald; in het eindresultaat komt onder meer voor de volgende waarde van doorbuiging in het midden:

$$w = \frac{49}{2048} \frac{Z}{K} \frac{a^4 b^4}{7a^4 + 4ab + 7b^4}$$

In fig. 11 is deze uitkomst vergeleken met langs andere weg verkregen resultaten [9]. In het afgebeelde gebied kan de relatieve fout maximaal 12% bedragen. Door het uitbreiden van de aangenomen uitdrukking voor de doorbuiging kan deze fout tot 0,4% worden verlaagd [8, 11], indien men bereid is momenten tot de orde twintig te berekenen.

Met de twee voorbeelden is aan de methode van Ritz betrekkelijk veel aandacht besteed. Dit is echter in overeenstemming met het toenemende belang

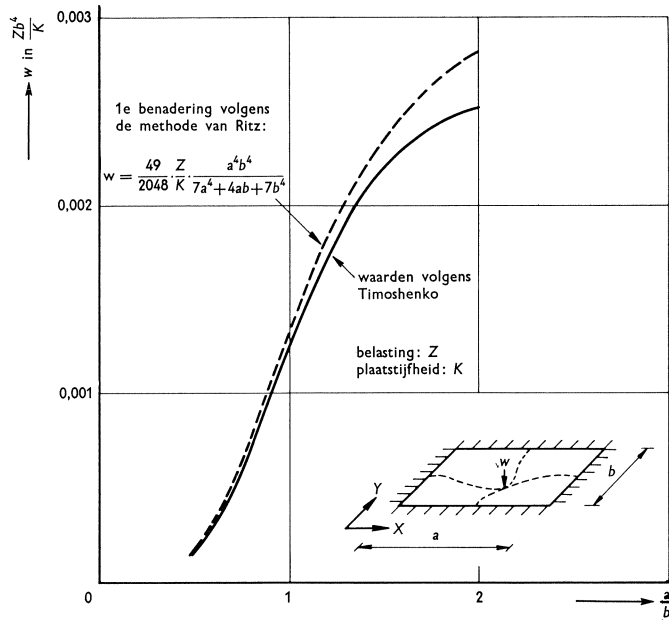


Fig. 11. Zakking van het midden van een rondom ingeklemd rechthoekige plaat onder gelijkmatig verdeelde belasting.

van deze rekenwijze. Bij de berekening van bijzondere bouwconstructies wordt tegenwoordig steeds vaker de elementenmethode met voorgeschreven verplaatsingen toegepast, waarbij men op de methode van Ritz teruggrijpt. Voor de afzonderlijke elementen worden dan (met inachtneming van de onderlinge samenhang) verplaatsingsvelden aangenomen. De evenwichtsvoorwaarden, opgesteld aan de hand van de minimumconditie voor de potentiële energie, worden dan behandeld in het algemene kader van de verplaatsingsmethode, in vroegere afleveringen van HERON reeds genoemd door Ir. H. W. Loof (Heron 12, no. 2) en door Ir. J. Blaauwendraad (Heron 14, no. 1).

4 Speciale formules voor dunwandige profielen

4.1 Afleiding van de formules

De in het voorafgaande besproken formules voor de profielgrootheden zijn geldig voor willekeurige veelhoekige doorsneden. In geval van dunwandige profielen kan het gebruik van de algemene formules echter bezwaren hebben, zoals in het volgende wordt uiteengezet.

Als profielgegevens zal men veelal beschikken over de coördinaten van knikpunten van de hartlijn en de wanddikten van de verschillende panelen. Het berekenen van de coördinaten van de hoekpunten van binnen- resp. buitenwand geeft dan veel extra werk en brengt bovendien het gevaar van cijferverlies met zich omdat de wanddikte niet meer rechtstreeks beschikbaar is, maar als het verschil van twee (veelal bijna gelijke) getallen tot uiting komt. Ook bij de verdere uitwerking zou cijferverlies een rol kunnen spelen.

Door aparte formules af te leiden voor de profielgrootheden van dunwandige doorsneden, waarbij wordt uitgegaan van een gegeven ligging van een veelhoekige *hartlijn* en gegeven *wanddikte* (die per paneel als constant wordt beschouwd) is het evenbedoelde bezwaar uit de weg te ruimen.

In fig. 12 is aangegeven hoe de volgorde van de knikpunten van de hartlijn door nummering wordt vastgelegd. Ieder punt wordt beschouwd als het beginpunt van een paneel; om dit mogelijk te maken worden ook fictieve panelen met wanddikte nul ingevoerd (in de figuur K_5K_6 en K_8K_1). Van het paneel volgend op het punt met rangnummer i worden de wanddikte, lengte en oppervlakte aangeduid met t_i , l_i en F_i . Van deze drie grootheden is de eerstgenoemde rechtstreeks gegeven, terwijl de andere gegevens gemakkelijk worden berekend uit de gegeven coördinaten, volgens de eenvoudige betrekkingen:

$$l_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad F_1 = l_1 t_1 \quad (16)$$

Bij de uitwerking worden voorts dezelfde verwaarlozingen gemaakt als bij handberekeningen voor

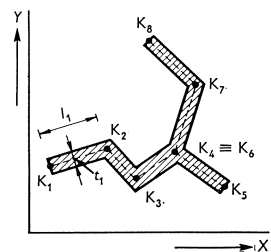


Fig. 12. Dunwandige doorsnede, opgebouwd uit vlakke panelen van constante wanddikte.

dunwandige profielen gebruikelijk, namelijk dat voor de overlappings van de paneeldoorsneden bij de hoeken geen correcties worden aangebracht; en ook dat het eigen traagheidsmoment van een paneeldoorsnede ten opzichte van de hartlijn wordt verwaarloosd. De panelen worden zodoende beschouwd als lijnvormig waarbij de wanddikte t als 'belegging' optreedt, vergelijkbaar met massabelegging. Dank zij deze vereenvoudiging is het zonder meer mogelijk de oppervlakte-integralen om te zetten in lijnintegralen.

Ieder moment wordt opgebouwd uit paneel-aandelen $P_{i, i+1}$:

$$M_{p, q} = \sum_{i=1}^{i=h} P_{i, i+1} \left. \vphantom{M_{p, q}} \right\} \dots (17)$$

$$P_{1, 2} = \int_{K_1}^{K_2} xpy^q \cdot t_1 ds = \frac{F_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} xpy^q dx = \frac{F_1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} xpy^q dy$$

Ook hier zijn weer, evenals bij de omzetting van integralen volgens het theorema van Green, verschillende schrijfwijzen mogelijk.

Voor de oppervlakte F van de volledige doorsnede geldt bij de ingevoerde vereenvoudigingen:

$$F = \sum_{i=1}^{i=h} F_i \dots \dots \dots (18)$$

Ook voor de statische momenten is de uitwerking eenvoudig.

$$S_x = \iint_F y dF; \quad S_y = \iint_F x dF;$$

De bijdrage van het eerste paneel aan S_y bedraagt bijv.

$$P_{1, 2} = \int_{K_1}^{K_2} x \cdot t_1 ds = \frac{F_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x dx = 1/2 F_1 (x_1 + x_2) \dots \dots \dots (19)$$

Door verwisseling van x en y vindt men direct de uitdrukking voor het paneel-aandeel in S_x . Opgemerkt zij, dat in dit geval de draairichting geen rol speelt, en dan ook geen tekencorrectie nodig is.

Vervolgens wordt overgegaan tot het berekenen van de traagheidsmomenten en van het centrifugaalmoment:

$$I_x = \iint_F y^2 dF; \quad I_y = \iint_F x^2 dF; \quad C_{xy} = \iint_F xy dF$$

De bijdrage van het eerste paneel aan I_y bedraagt:

$$P_{1, 2} = \int_{K_1}^{K_2} x^2 t_1 ds = \frac{F_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = 1/3 F_1 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \dots \dots (20)$$

Door onderlinge verwisseling van x en y is weer direct het paneelaandeel voor I_x uit te schrijven.

Aan het centrifugaalmoment C_{xy} geeft het eerste paneel de bijdrage

$$P_{1,2} = \int_{K_1}^{K_2} xy t_1 ds = \frac{F_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} xy dx$$

Voor deze integratie moet y eerst nog in x worden uitgedrukt met behulp van formule (5).

$$y = Ax + B \quad \text{met } A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{en } B = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Bijgevolg:

$$\int_{x_1}^{x_2} xy dx = \int_{x_1}^{x_2} x(Ax + B) dx = \left[\frac{1}{3} Ax^3 + \frac{1}{2} Bx^2 \right]_{x_1}^{x_2}$$

De bijdrage van het eerste paneel aan C_{xy} wordt dan:

$$P_{1,2} = \frac{F_1}{(x_2 - x_1)^2} \left[\frac{1}{3} (y_2 - y_1) (x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{2} (x_2 y_1 - x_1 y_2) (x_2^2 - x_1^2) \right] = \\ = \frac{1}{6} F_1 (2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2) \dots \dots \dots (21)$$

Bij vergelijking van de hier gevonden formules met die in tabel 1 blijkt, dat voor de paneel-aandelen bij de dunwandige doorsnede vrijwel dezelfde uitdrukkingen gelden als voor de driehoek-aandelen bij de massieve doorsnede, alleen wordt de grootheid d door F vervangen en heeft de voorafgaande breukfactor een andere waarde. Ook het programma voor elektronische verwerking blijft grotendeels hetzelfde.

4.2 Onderzoek van de rekennauwkeurigheid

De in paragraaf 4.1 afgeleide formules geven als gevolg van de gemaakte verwaarlozingen een bepaalde fout in de uitkomst. Bij de numerieke uitwerking zullen echter ook in de paragraaf 3.3 gegeven uitdrukkingen, hoewel theoretisch exact zijnde, door het cumulatieve effect van afrondingen een resultaat van beperkte nauwkeurigheid opleveren. De vraag is nu of in sommige gevallen niet toch het gebruik van de formules van 4.1 tot nauwkeuriger uitkomsten kan leiden. Het zou te ver voeren om dienaangaand een volledige analyse te maken. Volstaan zal worden met een enkel voorbeeld, namelijk het berekenen van het statisch moment S_y van een U-profiel, zoals in fig. 13 afgebeeld.



Fig. 13. Voorbeeld bij de vergelijking van de formules voor massieve en dunwandige doorsneden.

De te beschouwen formules zijn:

$$S_y = 1/6[(x_1+x_2)d_{1,2} + \dots + (x_8+x_1)d_{8,1}]$$

met sommatie over de omtrekpunten P_1 tot en met P_8 , en

$$S_y = 1/2[(x_1+x_2)F_1 + \dots + (x_3+x_4)F_3]$$

met sommatie over de punten K_1 tot en met K_4 , de knikpunten van de hartlijn.

De berekening van S_y volgens de eerstgenoemde formule is stap voor stap uit tabel 2 af te lezen. Er zij aan herinnerd dat $d_{1,2} = x_1y_2 - x_2y_1$ enz.

Tabel 2

i	x_i	y_i	x_i+x_{i+1}	$d_{i, i+1}$	$D_{i, i+1}$
1	0	$-(a+1/2t)$			
2	$(a+1/2t)$	$-(a+1/2t)$	$(a+1/2t)$	$(a+1/2t)^2$	$1/6(a+1/2t)^3$
3	$(a+1/2t)$	$(a+1/2t)$	$2(a+1/2t)$	$2(a+1/2t)^2$	$4/6(a+1/2t)^3$
4	0	$(a+1/2t)$	$(a+1/2t)$	$(a+1/2t)^2$	$1/6(a+1/2t)^3$
5	0	$(a-1/2t)$	0	0	0
6	$(a-1/2t)$	$(a-1/2t)$	$(a-1/2t)$	$-(a-1/2t)^2$	$-1/6(a-1/2t)^3$
7	$(a-1/2t)$	$-(a-1/2t)$	$2(a-1/2t)$	$-2(a-1/2t)^2$	$-4/6(a-1/2t)^3$
8	0	$-(a-1/2t)$	$(a-1/2t)$	$-(a-1/2t)^2$	$-1/6(a-1/2t)^3$
1	0	$-(a+1/2t)$	0	0	0

$S_y = 3a^2t + 1/4t^3$

In de laatste kolom blijkt tegenover de bijdrage $1/6(a+1/2t)^3$ van de driehoek $P_0P_1P_2$ de bijdrage $-1/6(a-1/2t)^3$ van de driehoek $P_0P_7P_8$ te staan. Analoog voor de driehoeken $P_0P_2P_3$ en $P_0P_3P_4$ tegenover de driehoeken $P_0P_6P_7$ en $P_0P_4P_5$. Is nu t klein ten opzichte van a , dan betekent dit dat hier telkens een verschil berekend wordt van twee getallen van nagenoeg dezelfde grootte. Het aantal significante cijfers in de uitkomst is dientengevolge veel kleiner dan bij de oorspronkelijke getallen. In het uiterste geval houdt men helemaal niets over, namelijk als t zo klein is dat $a+1/2t$ weer de waarde a krijgt in de rekenmachine. In dat geval bedraagt de relatieve fout dus 100 procent. Werken we met een (machine-) nauwkeurigheid van n significante cijfers, dan bedraagt de relatieve fout in de oorspronkelijke getallen ten hoogste $5 \cdot 10^{-n}$. De relatieve fout in een derde macht is dan hoogstens $15 \cdot 10^{-n}$. De absolute fouten van de getallen in de laatste kolom zouden bij de meest ongunstige combinatie van tekens tezamen $30 \cdot 10^{-n} \cdot a^3$ kunnen bedragen. De relatieve fout in het eindresultaat is dan $10^{-n+1} \cdot (a/t)$.

De berekening met behulp van de speciale formule voor dunwandige doorsneden is stap voor stap uit tabel 3 af te lezen.

Tabel 3

i	x_i	y_i	l_i	F_i	$x_i + x_{i+1}$	$P_{i, i+1}$
1	0	$-a$	a	at	a	$\frac{1}{2}a^2t$
2	a	$-a$	$2a$	$2at$	$2a$	$2a^2t$
3	a	a	a	at	a	$\frac{1}{2}a^2t$
4	0	a				

$S_y = 3a^2t$

De uitkomst $3a^2t$ is als gevolg van afronding behept met een relatieve fout $15 \cdot 10^{-n}$. Uit het voorgaande is voorts gebleken, dat voor S_y de exacte waarde $3a^2t + \frac{1}{4}t^3$ geldt. Aan die uitkomst is dus bovendien inherent een absolute fout ter grootte van $\frac{1}{4}t^3$, wat een relatieve fout uitmaakt van $\frac{1}{12}(t/a)^2$. De inherente relatieve fout wordt kleiner naarmate de verhouding t/a kleiner wordt, dus naarmate het profiel met meer recht 'dun'wandig kan worden genoemd. Juist het omgekeerde geldt bij de relatieve fout ten gevolge van afronding bij toepassing van de formule voor massieve doorsneden.

Resumerend geldt voor de relatieve fout, die in het vervolg ε zal worden genoemd:

bij toepassing van de formule voor massieve doorsnede:

$$\begin{aligned} \text{inherent: } \quad \varepsilon &= 0 \\ \text{afronding: } \quad \varepsilon &\leq 10^{-n+1} \cdot (a/t) \end{aligned}$$

dito bij de formule voor dunwandige doorsnede:

$$\begin{aligned} \text{inherent: } \quad \varepsilon &\leq \frac{1}{12} \cdot (t/a)^2 \\ \text{afronding: } \quad \varepsilon &\leq 15 \cdot 10^{-n} \end{aligned}$$

De vergelijking van de fout voor verschillende gevallen is grafisch voorgesteld in fig. 14. Bij een rekenautomaat, die met 10 significante cijfers werkt, kan het eindresultaat in tenminste 6 cijfers nauwkeurig worden verkregen. De algemene formules, die in de eerste plaats bedoeld waren voor massieve doorsneden, geven de beste resultaten in het gebied waar $t \geq 0,23 \cdot 10^{-2}a$, dus toch ook nog voor profielen die technisch gezien zeer dunwandig zijn. Bij een berekening met 4 significante cijfers (zorgvuldig werk met een rekenliniaal) ligt de situatie anders. Hierbij is reeds voor $t \leq 0,23a$ een voorkeur uit te spreken voor de speciale formules voor dunwandige doorsneden.

Het gebruik van een elektronische rekenautomaat veroorzaakt dus een verschuiving van de voorkeur ten gunste van de algemene formules. Men zal zich daarbij de moeite van een nauwkeurige (eventueel ook elektronische) berekening van de coördinaten van de omtrekspunten moeten getroosten.

5 Slotbeschouwing

Op grond van de in het voorgaande ontwikkelde gedachtengang, kan iets meer gedetailleerd dan in de inleiding is geschied, worden besproken in welke situatie men met voordeel gebruik zal kunnen maken van de formules voor de profielgrootheden van een willekeurige doorsnede.

Het programma van paragraaf 3.3 gaat uit van de situatie, dat men van de rekenautomaat uitsluitend het berekenen van de profielgrootheden verlangt

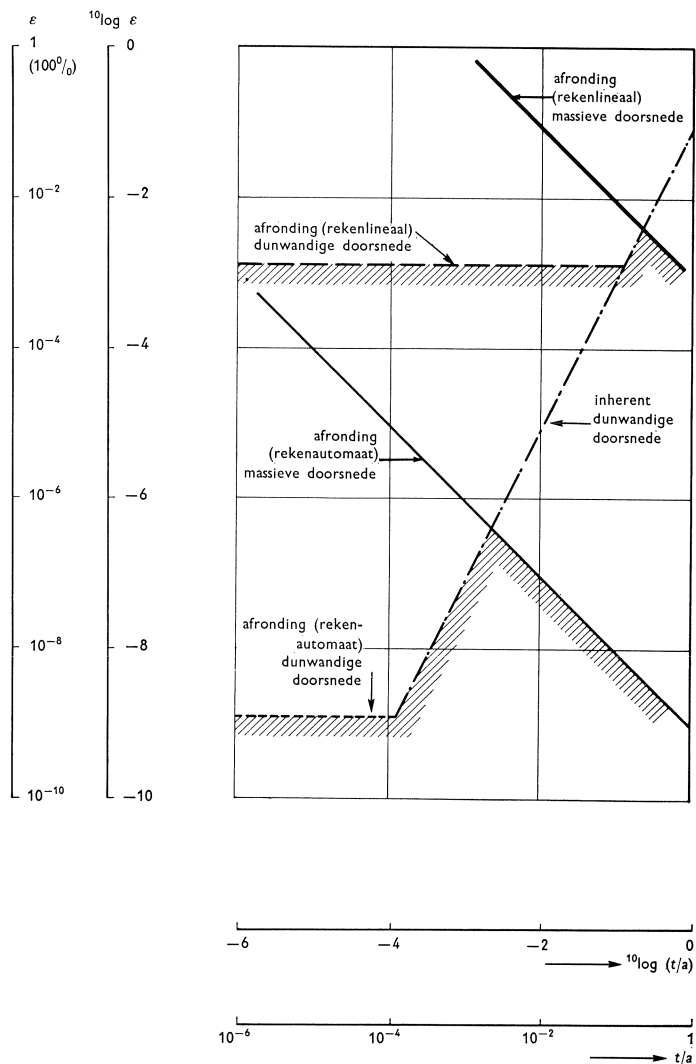


Fig. 14. Vergelijking van de relatieve fout ϵ die kan optreden bij het gebruik van verschillende formules voor de doorsnede volgens fig. 13. De bovengrens van de fout is een functie van de verhouding van de wanddikte t tot een doorsnede-afmeting a . Voorts is de afronding afhankelijk van het toegepaste rekenhulpmiddel.

en de coördinaten van de hoekpunten van de veelhoekige omtrek op een getalband invoert. Hoewel deze toepassing denkbaar is en blijkens de ervaring ook reden van bestaan heeft, wordt als het meest efficiënte gebruik toch de inpassing in een groter programma gezien. Men zal de profielgrootheden immers willen bepalen in verband met een verdere berekening. In een gegeven geval zullen soms vereenvoudigingen in de formules mogelijk zijn, uitgaande van bijzonderheden van de beschouwde doorsnede. Alleen voor de meest eenvoudige doorsneden zal dit echter voordeliger zijn dan het gebruik van een reeds beproefde en betrouwbaar gebleken procedure voor het algemene geval. Voor een dergelijke procedure worden de gegevens (de coördinaten van de hoekpunten) door het hoofdprogramma verstrekt. Dit houdt in, dat men op eventuele *kromlijnige* gedeelten van een profielomtrek zonder bezwaar een groot aantal punten kan aangeven, waarvan het hoofdprogramma dan de juiste coördinaten berekent. De beperking van de formules tot *veelhoekige* doorsneden wordt daarom niet als een wezenlijke vermindering van de algemene toepasbaarheid gezien.

Vergelijking van de rekennauwkeurigheid van de algemene formules met die van speciale formules voor dunwandige doorsneden heeft aangetoond, dat slechts in extreme gevallen de numerieke 'gevoeligheid' van de algemene formules tot een voorkeur voor de speciale formules zal leiden. Wel zal de vereiste nauwkeurigheid bij het opgeven van de coördinaten het veelal wenselijk maken deze ook elektronisch te berekenen, wat in de zojuist geschetste situatie door het hoofdprogramma verricht kan worden.

De algemene opzet bij het afleiden van de formules heeft de mogelijkheid geopend, ook momenten van hogere orde dan twee (voor traagheidsmomenten voldoende) uit soortgelijke formules te verkrijgen. De toepassingen daarvan in de technische mechanica zijn slechts summier besproken. Het is echter duidelijk dat bij zodanige toepassingen door de beschreven methodiek een steun bij het rekenwerk kan worden geboden, die de mogelijkheden verruimt.

6 Literatuur

1. KLOPPER, J., Leerboek der Toegepaste Mechanica. Eerste deel, vierde druk, Delft 1943, blz. 56.
2. BETH, H. J. E., Inleiding tot de differentiaal- en integraalrekening. Achtste druk, Groningen 1962, blz. 301.
3. POEL, W. VAN DER, et al., Report on Input-Output Procedures for ALGOL 60. Numerische Mathematik, Jaarg. 6 (1964), Nr. 5, blz. 459.
4. TIMOSHENKO, S., en J. N. GOODIER, Theory of Elasticity. Tweede druk, New York 1951, blz. 258.
5. Idem, blz. 277.
6. Idem, blz. 280.
7. BIEZENO, C. B. en R. GRAMMEL, Technische Dynamik. Eerste druk, Berlijn 1939, blz. 135.
8. Idem, blz. 142.
9. TIMOSHENKO, S., en S. WOINOWSKY-KRIEGER, Theory of Plates and Shells. Tweede druk, New York 1959, blz. 202.
10. Idem, blz. 342.
11. Idem, blz. 348.