De Heronsfontein

8.

Mededelingen over vondsten en ideeën waarin het verrassende element iets gemeen heeft met de speelse vindingen van Heron van Alexandrië, naar wie dit tijdschrift genoemd is.

In de eerste aflevering van de Heronsfontein (Heron, 1963, no. 2/3) werd een voorbeeld gegeven van extensieloze vervorming van een schaal. Door het ontbreken van rekken van het middenvlak kan een dergelijke vervorming met relatief weinig arbeid tot stand worden gebracht. Tegen andere vervormingswijzen echter is de weerstand van de schaal groter, waarvan het volgende een markant voorbeeld geeft.

Het betreft hier een in het Stevin-laboratorium verricht experimenteel onderzoek van schalen in de vorm van een hyperbolische paraboloïde, op een rechthoekig grondvlak en begrensd volgens parabolen (fig. 1). De zeer dunne

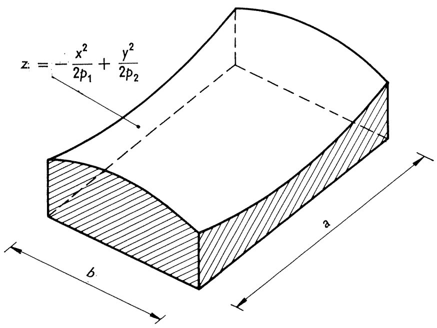

Fig. 1.

schaalmodellen werden vervaardigd van de kunsthars Lamellon, gegoten tussen mal en contramal. Door verzagen van het model kon de proef voor verschillende waarden van de rechthoekszijden worden uitgevoerd. Bij een deel van de proeven werden aan alle vier randen schotopleggingen aangebracht, modeltechnisch gerealiseerd door de schaal te bevestigen in ondiep gegroefde klosjes die op een dun triplex schot gelijmd waren. De vorm van de schaalrand kwam niet altijd precies overeen met de parabolische vorm van de groef. In het algemeen liet de schaal zich echter gemakkelijk wat bijbuigen, zodat hij toch vrijwel spanningsloos in de groef bevestigd kon worden. Bij een bepaalde verhouding van de rechthoekszijden bleek echter de vierde rand slechts met moeite verbogen te kunnen worden, wanneer de andere drie randen reeds aan de schotten verbonden waren.

Dit verschijnsel nu kan verklaard worden aan de hand van de theorie van de extensieloze vervorming. De resultaten zijn het eenvoudigst in formulevorm weer te geven; de afleiding zal worden weggelaten. Van het ingevoerde assenstelsel ligt de oorsprong in een hoek, waar twee van de reeds aangebrachte schotten samenkomen (fig. 2). De verplaatsingen in het vlak van de schaal worden u en v genoemd, de verplaatsing loodrecht op de schaal w. De notaties p_1, p_2, a en b zijn in de figuren aangegeven.

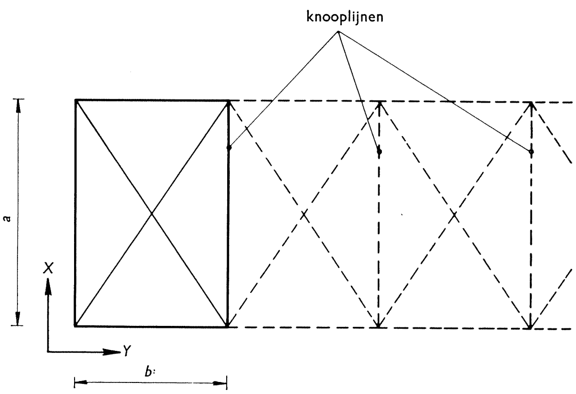

Fig. 2.

Voorts worden de volgende hulpgrootheden ingevoerd:

$$\alpha = \pi/a; \qquad \mu = \alpha\sqrt{p_1/p_2}$$

Een mogelijke vervorming, waarbij de rekken van het middenvlak nul zijn, wordt dan gegeven door:

$$u = \mathrm{c}\alpha \cos \alpha x \sin \mu y$$
$$v = -\mathrm{c}\mu \sin \alpha x \cos \mu y$$
$$w = \mathrm{c}\alpha^2 p_1 \sin \alpha x \sin \mu y$$

Tevens voldoen deze verplaatsingen aan de voorwaarden die de oplegging op *drie* schotten uitdrukken. Voor $x = 0$ en voor $x = a$ wordt de factor sin αx nul. Evenzo wordt voor $y = 0$ de factor sin μy nul. Dit laatste zal echter tevens het geval zijn op alle lijnen waarvoor μy een geheel veelvoud van π is. De ligging van deze lijnen kan, zoals in fig. 2 is aangegeven, meetkundig gevonden worden indien men de rechte beschrijvenden van het oppervlak volgt, uitgaande van de hoekpunten.

Het optreden van deze zogenaamde knooplijnen in het vervormingspatroon leidt ertoe, dat de schaal zich aldaar gedraagt alsof er al een schot aanwezig was. Het volgens een knooplijn aanbrengen van een vierde schot (wat overigens aan de stijfheid van het schaaloppervlak nauwelijks meer kan bijdragen) vereist dan een grote vormnauwkeurigheid van de aansluiting. Bij het besproken experiment werd het vierde schot daarom voorzien van nieuwe klosjes met een groef waarvan het verloop zorgvuldig aan de vorm van de schaalrand aldaar was aangepast.