In de voetnoten op blz. 129 en 131 van HERON 1966 nr. 3 werd het bestaan vermeld van de nadere mathematische afleiding der oorspronkelijk door R. Soerjadi in het desbetreffende artikel langs inductieve weg gevonden algemene formule voor het berekenen van de momenten van veelhoeksfiguren uit hun hoekpuntscoördinaten.
Gaarne wordt in het hiernavolgende plaats verleend aan Dr. J. H. J. Almering, instructeur bij de Onderafdeling der wiskunde der T.H. Delft, auteur van de in die noten bedoelde afleiding, voor zijn beschouwingen die aan de betreffende formule de mathematische grondslag verschaffen.
Hoewel afkomstig uit een sfeer, niet rechtstreeks betrokken bij een der laboratoria waarvan HERON het orgaan pleegt te zijn, wordt deze bijdrage op grond van haar aanvullend en afrondend karakter hierbij als sluitstuk op de eerdere beschouwingen van R. Soerjadi over deze formule aan de lezer voorgelegd.

Redactie

Dr. J. H. J. ALMERING

OVER DE BEREKENING VAN MOMENTEN VAN WILLEKEURIGE ORDE VOOR EEN VEELHOEK

U.D.C. 624.043

0 Inleiding

Wij beschouwen een vlakke veelhoek, waarvan de hoekpunten voorgesteld worden door $P_1, P_2, \ldots, P_h$, zó dat de omloopszin $P_1P_2\ldots P_hP_1$ positief is.

Voor deze veelhoek willen wij het moment $M_{p,q}$ berekenen, waarbij

$$M_{p,q} = \iint x^p y^q \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

met $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, terwijl de tweevoudige integraal wordt genomen over het binnengebied van de veelhoek.

Uitgaande van een idee van R. SOERJADI (Heron, 1966, no. 3) beschouwen wij $M_{p,q}$ als de algebraïsche som van h deelintegralen $D_{i,i+1}$ die verkregen worden door $x^p y^q$ te integreren over het binnengebied van de driehoek OP_iP_{i+1} en de uitkomst van een $+$ of $-$ teken te voorzien al naar gelang de omloopszin van de driehoek OP_iP_{i+1} positief dan wel negatief is. Wij zullen in het volgende gemakshalve spreken over $D_{1,2}$, wat aan de algemeenheid geen afbreuk doet.

In bovenbedoeld artikel wordt voor $D_{1,2}$ een *gebroken* functie van x_1, y_1, x_2 en y_2 afgeleid. Hierin zijn x_i en y_i de coördinaten van P_i ($i = 1, 2$). De teller van die gebroken functie is een veelterm in deze vier grootheden, de noemer is $(x_2 - x_1)^{q+1}$. Er is door de auteur opgemerkt dat de deling door $(x_2 - x_1)^{q+1}$ steeds opgaat, zodat in feite $D_{1,2}$ in eenvoudigste gedaante een veelterm (gehele rationale functie) is in x_1, x_2, y_1 en y_2.

Door middel van de elektronische rekenmachine heeft SOERJADI voor verschillende waarden van p en q deze veelterm berekend, en op grond daarvan stelde hij de volgende uitdrukking op:

$$D_{1,2} = \frac{p!q!}{(p+q+2)!}(x_1y_2-x_2y_1)\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}\binom{i+j}{i}\binom{p+q-i-j}{p-i}x_1^{p-i}x_2^{j}y_1^{q-j}y_2^{j} \tag{1}$$

(zie t.a.p. blz. 131, voetnoot; wij hebben echter hier de letters m resp. n vervangen door $p+1$ resp. $q+1$).

Het blijkt dat de uitdrukking (1) die in de aangehaalde voetnoot zonder nader bewijs wordt vermeld, voor berekeningen met de computer verkieslijker is dan de aanvankelijk gevonden gebroken uitdrukking.

In het navolgende wordt een algemeen bewijs van de formule (1) gegeven, voorafgegaan door een kort exposé van de hierbij gebruikte mathematische hulpmiddelen.

1 De gamma- en bètafuncties

Voor $t > 0$ definieert men de gamma-functie door middel van de oneigenlijke integraal

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx.$$

De Γ-functie is een positieve, continue en differentieerbare functie van t die voor $t \downarrow 0$ en voor $t \to \infty$ naar ∞ gaat en tussen $t = 1$ en $t = 2$ een minimum vertoont.

Door partiële integratie kan men bewijzen dat

$$\Gamma(t) = (t-1)\,\Gamma(t-1) \qquad (t > 1)$$

waaruit volgt:

$$\Gamma(t) = (t-1)! \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Hierbij moet $0! = 1$ genomen worden.

In nauw verband met de gammafunctie staat de bètafunctie $B(p,q)$, die voor positieve waarden van p en q gedefinieerd wordt als

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{3}$$

Men kan de bètafunctie in de gammafunctie uitdrukken door middel van de betrekking:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{4}$$

2 Transformatie van een tweevoudige integraal

Wij gaan uit van de integraal

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy$$

Hierin is f een continue functie en de integraal wordt uitgestrekt over een in het eindige liggend gebied G van het (x,y)-vlak.

Laat

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(\xi,\eta) \\ y &= \psi(\xi,\eta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

een één-éénduidige transformatie zijn van het (x,y)-vlak in het (ξ,η)-vlak. Dit wil zeggen dat bij elk punt (x,y) één punt (ξ,η) behoort, en omgekeerd. De functies φ en ψ hebben continue eerste afgeleiden. Laat het gebied G van het (x,y)-vlak corresponderen met het gebied H van het (ξ,η)-vlak. Wij onderstellen verder dat de functionaaldeterminant

$$D = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta} \end{vmatrix}$$

in het gebied H niet 0 is.

Dan is

$$\iint\limits_{G} \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{H} \mathrm{f}\{\varphi(\xi,\eta),\, \psi(\xi,\eta)\}\cdot|D|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

3 Berekening van $D_{1,2}$ voor een speciale driehoek

Wij nemen P_1 (1, 0; P_2 (0, 1) (zie fig. 1). Door de driehoek „in verticale strookjes te verdelen" vinden wij hier:

$$\iint x^p y^q \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x^p \mathrm{d}x \int_0^{1-x} y^q \mathrm{d}y = \int_0^1 x^p \cdot \frac{1}{q+1}\,(1-x)^{q+1}\mathrm{d}x$$

Deze laatste integraal is volgens (3) gelijk aan

$$\frac{1}{q+1}\,\mathrm{B}(p+1,\, q+2)$$

en wij vinden zodoende wegens (4) en (2):

$$\iint x^p y^q \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{p!q!}{(p+q+2)!}$$

Deze uitkomst geldt dus voor het speciale geval dat de driehoek OP_1P_2 gelijkbenig rechthoekig is, met de rechthoekszijden langs de coördinaatassen.

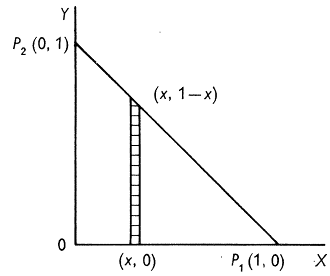

Fig. 1.

4 Berekening van $D_{1,2}$ in het algemene geval

Wij gaan thans over naar het algemene geval, een driehoek OP_1P_2 met $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$ willekeurig. Wij bepalen een lineaire coördinatentransformatie,

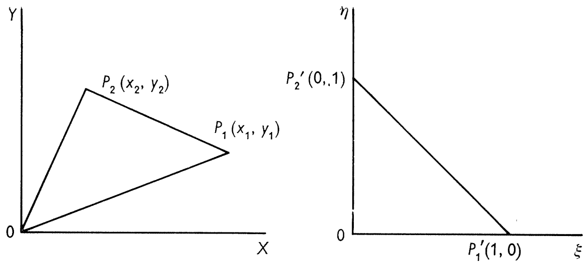

Fig. 2.

die de oorsprong in zichzelf laat overgaan, en waardoor $P_1(x_1,y_1)$ overgaat in $P_1'(1, 0)$, en $P_2(x_2,y_2)$ overgaat in $P_2'(0, 1)$ (fig. 2). De bedoelde transformatieformules hebben de algemene vorm

$$\begin{cases} x = a_{11}\xi + a_{12}\eta \\ y = a_{21}\xi + a_{22}\eta \end{cases}$$

Hieruit volgt op eenvoudige wijze $a_{11} = x_1$; $a_{21} = y_1$; $a_{12} = x_2$ en $a_{22} = y_2$, waarmede de gezochte transformatie wordt:

$$\begin{cases} x = x_1\xi + x_2\eta \\ y = y_1\xi + y_2\eta \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

Hierdoor gaat het binnengebied van driehoek OP_1P_2 over in het binnengebied van driehoek $OP_1'P_2'$.
Verder is voor deze transformatie (6):

$$D = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

Door de transformatie (6) gaat $D_{1,2}$ over in

$$D_{1,2} = \pm \iint x^p y^q \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint (x_1\xi + x_2\eta)^p (y_1\xi + y_2\eta)^q \cdot |x_1y_2 - x_2y_1| \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

Laat men hierin de strepen ter aanduiding van de absolute waarde weg, dan krijgt $D_{1,2}$ het juiste teken.

Wij werken de machten uit volgens het binomium van Newton:

$$(x_1\xi + x_2\eta)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (x_1\xi)^{p-i} (x_2\eta)^i$$

$$(y_1\xi + y_2\eta)^q = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} (y_1\xi)^{q-j} (y_2\eta)^j$$

en krijgen ten slotte:

$$D_{1,2} = (x_1y_2 - x_2y_1) \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \binom{p}{i}\binom{q}{j} x_1^{p-i} x_2^i y_1^{q-j} y_2^j \cdot \iint \xi^{p+q-i-j} \eta^{i+j} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

waarbij de integraal over het binnengebied van driehoek $OP_1'P_2'$ genomen wordt. Aldus is het algemene geval teruggebracht tot het bijzondere geval onder **3**.

Volgens het daar behandelde is de laatstgenoemde tweevoudige integraal gelijk aan

$$B(p+q-i-j+1,\ i+j+1)$$

Hierin zijn p, q, i en j gehele, niet negatieve getallen, zodat deze bètafunctie is te schrijven als

$$\frac{(p+q-i-j)!\,(i+j)!}{(p+q+2)!}$$

hetgeen tenslotte leidt tot

$$D_{1,2} = \frac{p!q!}{(p+q+2)!}(x_1y_2-x_2y_1)\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}\binom{i+j}{i}\binom{p+q-i-j}{p-i}x_1{}^{p-i}x_2{}^{j}y_1{}^{q-i}y_2{}^{j}$$

Deze uitkomst is identiek met de formule (1), welke hiermede dus algemeen bewezen is.