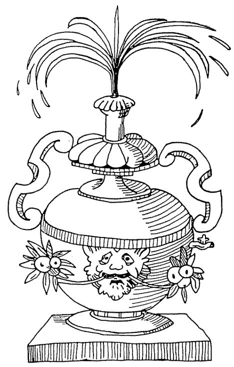
De Heronsfontein

9.



Mededelingen over vondsten en ideeën waarin het verrassende element iets gemeen heeft met de speelse vindingen van Heron van Alexandrië, naar wie dit tijdschrift genoemd is.

In Heron (14) nr. 3 komt in het artikel van R. SOERJADI „Over de berekening van profielgrootheden van veelhoekige doorsneden" op blz. 127 een formule voor, die het oppervlak F van een driehoek uitdrukt in de coördinaatwaarden der 3 hoekpunten, nl.:

$$F = \tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Onder toevoeging, binnen de haakjesterm, van $+x_3y_3$ en $-y_3x_3$ (de gehele uitdrukking wijzigt niet in waarde), is door combinatie van x-verschillen en y-verschillen voor (7) ook te schrijven:

$$F = \tfrac{1}{2}\{(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3)\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

Het is deze vergelijking nu waarop de volgende beschouwingen worden gericht. Wanneer nl. in (7a) alle coördinaatwaarden gehele getallen zijn, is de veelterm tussen de accoladen evenzeer een geheel getal, dat uiteraard *even* of *oneven* uitvalt. Wegens de factor $\frac{1}{2}$ waarmede deze uitkomst moet worden vermenigvuldigd om F te krijgen, is derhalve te stellen:

Het oppervlak van een driehoek, waarvan de hoekpunten gelegen zijn op roosterpunten van een rechthoekig coördinatenstelsel, is, uitgedrukt in roostereenheidskwadraten, *een geheel getal* òf (*een geheel getal* $+ \frac{1}{2}$).

Vraagt men, in samenhang tot deze conclusie, zich af hoe het daarbij gesteld is met de onderlinge verhouding der aantallen van deze beide „soorten" driehoeken, dan zou het antwoord „half-om-half" niet bepaald onwaarschijnlijk voorkomen.

Deze uitspraak a priori blijkt echter niet juist, en dient te worden gecorrigeerd, zoals hierna zij aangetoond.

Analyse

Noemt men de beide produkten tussen de accoladen van (7a) P_1 en P_2, en hun verschil V, dan is het volgende te bedenken:

- wil V oneven zijn dan kan dit slechts als één der produkten P even, het andere oneven is;
- een produkt P van twee gehele factoren is slechts oneven, als beide factoren gelijktijdig oneven zijn (waarschijnlijkheid $= \frac{1}{4}$);
- zo'n produkt P is even, als het tenminste één even factor bevat (waarschijnlijkheid $= \frac{3}{4}$).

Duidt men verder „oneven" aan door O en „even" door E, dan leidt een schematische uitwerking als hierna volgt, tot het verlangde doel, de gezochte waarschijnlijkheidsverhouding in het eindresultaat.

Voor $V = \mathrm{O}$ geldt:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \mathrm{O} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{1}{4} \\ P_2 = \mathrm{E} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{3}{4} \end{array}\right\} V = \mathrm{O} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid } \tfrac{1}{4} \times \tfrac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \mathrm{E} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{3}{4} \\ P_2 = \mathrm{O} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} V = \mathrm{O} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{3}{16}$$

$$\text{Totale waarschijnlijkheid dat } V = \mathrm{O} \rightarrow \frac{3}{8}$$

Volledigheidshalve sluit hierbij aan (hoewel thans reeds gezegd kan worden dat bij $V = \mathrm{E}$ de waarschijnlijkheid $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ behoort):

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \mathrm{E} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{3}{4} \\ P_2 = \mathrm{E} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{3}{4} \end{array}\right\} V = \mathrm{E} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{9}{16}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \mathrm{O} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{1}{4} \\ P_2 = \mathrm{O} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} V = \mathrm{E} \rightarrow \text{waarschijnlijkheid} = \frac{1}{16}$$

$$\text{Totale waarschijnlijkheid dat } V = \mathrm{E} \rightarrow \frac{5}{8}$$

Op grond van deze uitkomsten blijkt nu, *dat van alle driehoeken met roosterpunten tot hoekpunten het aantal met oppervlakte-waarde (geheel* $+ \frac{1}{2}$*) ten opzichte van dat met oppervlakte-waarde (geheel) zich verhoudt als 3: 5.*

De suggestie van „half-om-half" is dus niet houdbaar gebleken, en moet worden vervangen door de opvallend „scheve" verhouding 3 : 5, in het nadeel van de driehoeken met „gebroken" oppervlakte-grootte.

Wat het meetkundige aspect van de inhoud van formule (7a) betreft nog enkele opmerkingen.

De produkten P zijn in het platte vlak voor te stellen door rechthoeken, zodat de formule (7a) in woorden luidt: het oppervlak F van een driehoek is de helft van de oppervlakte-combinatie van twee rechthoeken, waarvan de respectieve zijden bepaalde hoekpuntscoördinaatverschillen van die driehoek zijn.

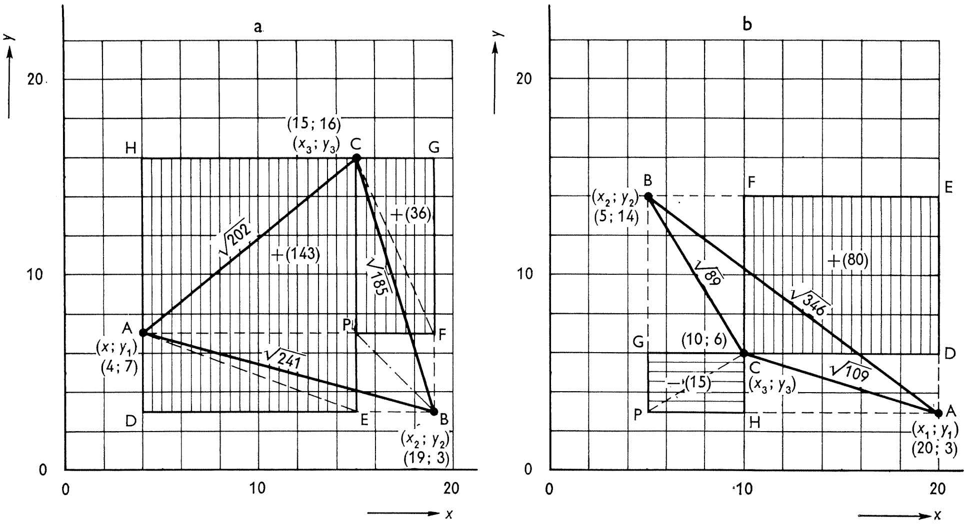


Fig. 1. De samenstelling van het oppervlak van een △ ABC als halve som (verschil) van 2 rechthoeksoppervlakken.

$F_{ABC} = 89\frac{1}{2}$ opp. eenh.

$$F = \tfrac{1}{2}\{(x_1-x_3)\,(y_2-y_3) - (y_1-y_3)\,(x_2-x_3)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{(-\widehat{DE})\cdot(-\widehat{EC}) - (-\widehat{FG})\cdot(+\widehat{GC})\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(\text{rechth. DECH} + \text{rechth. PFGC})$$

$F_{ABC} = 32\frac{1}{2}$ opp. eenh.

$$F = \tfrac{1}{2}\{(x_1-x_3)\,(y_2-y_3) - (y_1-y_3)\,(x_2-x_3)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{(+\widehat{CD})\cdot(+\widehat{FC}) - (-\widehat{CH})\cdot(-\widehat{GC})\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(\text{rechth. CDEF} - \text{rechth. CGPH})$$

De beide in fig. 1 weergegeven gevallen: a. met een scherphoekige, resp. b. met een stomphoekige driehoek stellen dit voor. De constituerende rechthoeken zijn gearceerd, verticaal voor positief, horizontaal voor negatief aandeel.

Dat in figuur 1a het oppervlak van △ ABC gelijk is aan ½ (rechth. APCH + rechth. ADEP + rechth. PFGC) is wegens de ingetekende hulpdiagonalen AE, CF en PB reeds duidelijk bij eerste beschouwing.

Dat in figuur 1b uit de beide verschillend gearceerde rechthoekcomponenten een soortgelijke betrekking valt af te leiden is niet zonder tussenstadia in te zien. Wie zich van de juistheid wil overtuigen bedenke, dat, onder negatief in rekening brengen van rechth. CGPH, gebruik kan worden gemaakt van de diagonaal-hulplijnen welke de 3 zijden van de △ ABC zelf zijn, benevens van de diagonaal CP.

De in dit voorbeeld in figuur gebrachte planimetrische eigenschap, toegepast bij driehoeken met de hoekpunten op gehele roosterpunten, geldt evenzeer voor alle driehoeken, zonder dergelijke beperking.