

Ir. A. K. DE GROOT en A. C. VAN RIEL

DE STABILITEIT VAN KOLOMMEN EN WANDEN  
VAN ONGEWAPEND BETON

U.D.C. 624.022; 624.012.3; 624.075.2

*In eerste instantie wordt aandacht besteed aan een ongewapende kolom met constante beginexcentriciteit. Uitgaande van een sinusvormige uitbuigingslijn wordt de invloed op de bezwijkbelasting nagegaan van het al dan niet gescheurd zijn en van de vorm van het  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram. Vervolgens wordt voor een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram een groot aantal kolommen met verschillende randvoorwaarden berekend; de uitbuigingslijn wordt hierbij met differentierekening bepaald. De berekeningsresultaten zijn in grafieken weergegeven.*

**0 Inleiding**

Door de tendentie steeds hoger te gaan bouwen is het onderwerp stabiliteit van betonnen kolommen en raamwerken de laatste tijd meer en meer in de belangstelling komen te staan.

In verband hiermede is dan ook op theoretisch gebied een versnelde ontwikkeling te constateren. Hierbij blijkt steeds meer, dat de theorie, die uitgaat van een lineair elastisch verband tussen spanningen en vervormingen, het werkelijke gedrag van de constructie in onvoldoende mate beschrijft.

Als een bijdrage tot verheldering van dit probleem zal in het navolgende het gedrag van een rechthoekige kolom c.q. wand van ongewapend beton worden beschouwd.

Het materiaal ongewapend beton is gekozen, omdat van dit constructiemateriaal de laatste jaren steeds meer gebruik wordt gemaakt.

Voorts kan deze studie worden gezien als een begin van een uitgebreider onderzoek, dat ook het gedrag van kolommen van gewapend c.q. voorgespannen beton omvat.

**1 Omschrijving van het probleem**

Onderzocht zullen worden de systemen afgebeeld in de figuren 1a, 2a en 3a. In fig. 1a is een kolom weergegeven, die aan één einde verend is ingeklemd. Aan het andere uiteinde grijpen aan een horizontale kracht, een verticale kracht en een moment. In fig. 2a is een aan beide uiteinden scharnierende

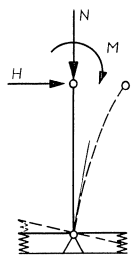


Fig 1a

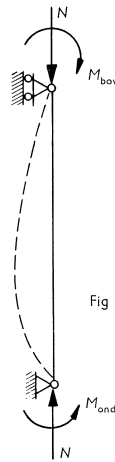


Fig 2a



Fig 3a

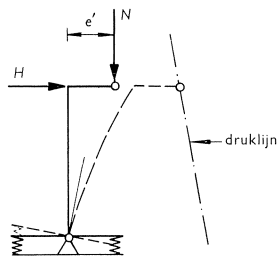


Fig 1b

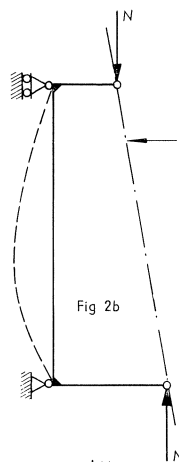


Fig 2b

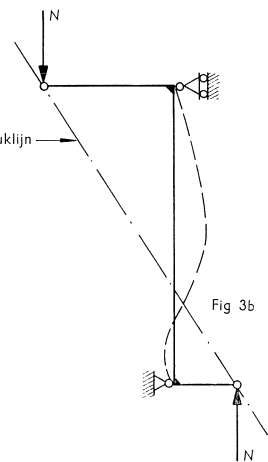


Fig 3b

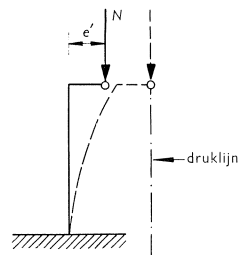


Fig 1c

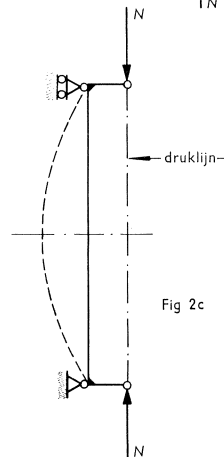


Fig 2c

Fig. 1a . . . c, Fig. 2a . . . c, Fig. 3a en b. Beschouwde belastingsgevallen.

kolom getekend, waarop behalve een verticale kracht, aan beide einden een moment werkt. Deze momenten hebben hetzelfde teken, doch behoeven niet gelijk in grootte te zijn. Fig. 3a vertoont dezelfde kolom als van fig. 2a, maar nu zijn de eindmomenten van tegengesteld teken.

De uitwendige momenten kunnen worden verwezenlijkt door de verticale kracht excentrisch te laten aangrijpen. Op deze wijze ontstaan de figuren 1b, 2b en 3b.

Door in figuur 1b de horizontale kracht gelijk aan nul te stellen, en de veer oneindig stijf te kiezen, wordt het bijzondere geval verkregen, dat is weergegeven in fig. 1c. Dit laatste schema kan ook worden afgeleid uit fig. 2b door aan boven- en ondereinde gelijke excentriciteiten in te voeren. In fig. 1c en 2c is de beginexcentriciteit over de gehele kolomhoogte constant. Dit belastingsgeval wordt door velen als uitgangspunt van de theoretische beschouwingen gekozen. Ook de kolomberekening volgens de GBV-1962 en volgens de 'Praktische Richtlijnen' van het CEB is op dit systeem gebaseerd [1, 2].

De in de figuren 1 . . . 3 afgebeelde kolommen zijn statisch bepaalde constructies. Wordt geen rekening gehouden met het feit dat de kolom uitbuigt, dan kan de krachtsverdeling in deze kolommen op eenvoudige wijze met behulp van de elementaire toegepaste mechanica worden bepaald (1e-orde theorie). Wil men echter het werkelijke gedrag beschrijven, dan zal wel degelijk met de uitbuiging rekening moeten worden gehouden (2e-orde theorie), omdat de grootte van de uitbuiging in belangrijke mate de bezwijkbelasting van een kolom kan beïnvloeden. De bezwijkbelasting wordt bereikt indien:

- a. in de maatgevende doorsnede de breukstuik  $\varepsilon_u$  wordt bereikt, waardoor de drukzone verbrijzelt;
- b. de kolom instabiel wordt voordat de breukstuik wordt bereikt.

Daar men in de betontechniek – zowel nationaal als internationaal – de bezwijkbelasting steeds meer als uitgangspunt van de veiligheidsbeschouwing neemt (breukmethode!) zal in de volgende hoofdstukken aan de berekening van de bezwijkbelasting aandacht worden geschonken. De juiste *uitbuigingsvorm* bij een gegeven belasting is daarbij van belang.

Het bepalen van de juiste uitbuigingsvorm is echter niet eenvoudig. De moeilijkheden worden voornamelijk veroorzaakt door de gecompliceerde formules, die in de meeste gevallen slechts langs iteratieve weg kunnen worden opgelost. De volgende methoden kunnen worden toegepast:

1. Men kiest een geschikt veronderstelde uitbuigingslijn, waarna in een groot aantal doorsneden zowel de in- als uitwendige krachten en momenten worden bepaald. In het algemeen zullen deze niet aan elkaar gelijk zijn. Wel wordt een informatie verkregen hoe een betere uitbuigingslijn kan worden gekozen. Bij de gecorrigeerde uitbuigingslijn wordt opnieuw het evenwicht gecontroleerd. Dit proces kan worden herhaald, totdat binnen een bepaalde graad van nauwkeurigheid het evenwicht in iedere doorsnede is bereikt [3].

Het zwakke punt van deze methode ligt bij de beginaanname van de uitbuigingsvorm. Bij een minder geslaagde keus kan nl. divergentie van het iteratieproces optreden.

Een variant op deze methode – die tevens een vèrgaande vereenvoudiging van het probleem inhoudt – is de onderstelling, dat de uitbuigingslijn sinusvormig is [4]. Dan behoeft men slechts 2 parameters van de kromme te bepalen, nl. de maximale uitbuiging en de afstand tussen de buigpunten van de sinuslijn. Deze methode heeft als consequentie, dat het inwendig en uitwendig moment slechts in één doorsnede precies aan elkaar gelijk zijn. In andere doorsneden zal aan het evenwicht niet zijn voldaan, al zijn de afwijkingen in het algemeen niet groot. Deze methode wordt nader behandeld in hoofdstuk 4.

2. De kolom wordt d.m.v. sneden in een aantal moten verdeeld gedacht.

Voor een bepaalde normaalkracht kan, uitgaande van een aangenomen vervormingstoestand ter plaatse van één van de kolomeinden, met behulp van differentierekening een uitbuigingslijn worden opgebouwd, zodanig dat in elk van de sneden aan het evenwicht wordt voldaan. De aldus gevonden uitbuigingslijn zal in het algemeen niet aan de gegeven randvoorwaarden voldoen. Het proces wordt nu zolang herhaald tot de belasting aan de uiteinden de juiste excentriciteit(en) bereikt [5, 6 en 7]. Deze methode, differentiemethode genoemd, zal worden behandeld in hoofdstuk 5.

Bij de eerste methode wordt dus voor een gegeven belasting met een bekende excentriciteit de uitbuigingslijn c.q. vervormingstoestand gezocht. Bij de tweede methode zoekt men, uitgaande van een vervormingstoestand voor een gegeven belasting, de bijbehorende excentriciteit.

## 2 Uitgangspunten

De beschouwingen zullen op de volgende onderstellingen worden gebaseerd:

1. Vlakke doorsneden blijven ook na het belasten vlak.
2. Het spannings-vervormingsdiagram is gegeven. Aangenomen wordt dat het materiaal zich elastisch gedraagt, zodat bij belasten en ontlasten eenzelfde  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram geldt.
3. Beton neemt geen trekspanningen op.<sup>1)</sup>
4. De invloed van de schuifspanningen op het gedrag van de kolom wordt verwaarloosd.
5. In onbelaste toestand is de kolomas recht.
6. De uitbuigingen van de kolom zijn betrekkelijk klein, zodat als normaalkracht in iedere doorsnede wordt aangehouden de verticale ontbondene van de drukkracht.

<sup>1)</sup> In een enkel geval zal van dit uitgangspunt worden afgeweken, om het effect van het al dan niet gescheurd zijn te onderzoeken.

## Lijst van notaties

$b$	breedte van de kolomdoorsnede ( $//$ de buigingsas)
$h_t$	hoogte van de kolomdoorsnede ( $\perp$ de buigingsas)
$a$	lengte van een kolom, aan één zijde (verend) ingeklemd
$l$	lengte van een aan beide einden tegen horizontale verplaatsing vastgehouden kolom
$N$	verticale belasting
$N_u$	verticale bezwijkbelasting
$N_E$	knikbelasting volgens Euler
$N_{ES}$	knikbelasting volgens Engesser-Shanley
$H$	horizontale belasting
$M$	moment
$E_0$	elasticiteitsmodulus in de oorsprong van het $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram
$E_t$	tangentmodulus
$C$	veerconstante
$e'$	excentriciteit van uitsluitend de verticale belasting bij de niet uitgebogen kolom
$e_0$	excentriciteit van de verticale en horizontale belasting bij de niet uitgebogen kolom in de maatgevende doorsnede
$e_{\text{bov}}$ } $e_{\text{ond}}$ }	excentriciteiten aan boven- en onderzijde bij een aan beide einden tegen horizontale verplaatsing vastgehouden kolom
$y$	excentriciteit van de drukresultante, gemeten uit de staafas
$y_m$	maximale waarde van $y$
$\eta$	$= \frac{\sigma_u b h_t^2}{C}$
$\varepsilon_1$	specifieke lengteverandering van de uiterste getrokken of minst gedrukte vezel
$\varepsilon_2$	specifieke lengteverandering van de uiterste meest gedrukte vezel
$\varkappa$	$= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h_t} = \text{kromming}$
$\varepsilon_u$	breukstuik
$\varepsilon_p$	specifieke lengteverandering ter plaatse van de overgang van de parabool naar het rechte gedeelte bij het $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram volgens fig. 15c
$\sigma_u$	breukspanning van het beton onder druk
$\lambda^*$	$= 2a/h_t$ bij een aan één einde (verend) ingeklemd kolom $= l/h_t$ bij een aan twee einden tegen zijdelingse verplaatsing vastgehouden kolom
$\tilde{\lambda}^*; \tilde{\varepsilon}_1; \dots$	nieuwe waarden voor $\lambda^*$ , $\varepsilon_1$ , ... door transformatie naar andere grootte van $\varepsilon_u$
$\alpha$	$= \frac{N}{\sigma_u b h_t}$
$\alpha_u$	$= \frac{N_u}{\sigma_u b h_t}$
$\alpha_{\text{max}}$	= grootste waarde van $\alpha$ , alleen gelet op stabiliteit
$\alpha_E$	$= \frac{N_E}{\sigma_u b h_t}$
$\alpha_{ES}$	$= \frac{N_{ES}}{\sigma_u b h_t}$
$\beta$	$= \frac{y}{h_t} \left( \text{c.q. } \frac{y_m}{h_t} \right)$
$\vartheta$	verhouding tussen de afstand der buigpunten en de kolomlengte bij een sinus vormige uitbuigingslijn (zie fig. 6)
$\varphi$	hoekverdraaiing aan het kolomeinde
$\theta$	coëfficiënt (zie fig. 19)
$\Delta x$	lengte van een kolommoot bij berekening volgens de differentiemethode

### 3 Doorsnedeberkening

Welke werkwijze ook wordt toegepast, steeds zullen in één of meer doorsneden de evenwichtsvoorwaarden moeten worden opgesteld. In dit hoofdstuk zal het verband tussen grootte en plaats van de inwendige kracht en de vervormingstoestand worden besproken.

De vervormingstoestand wordt gegeven door een specifieke lengteverandering  $\varepsilon_2$  aan de zijde met de grootste drukspanning, en een specifieke vervorming  $\varepsilon_1$  aan de andere zijde van de (rechthoekige) kolomdoorsnede (zie fig. 4). Vervormingen ten gevolge van druk worden positief gerekend.

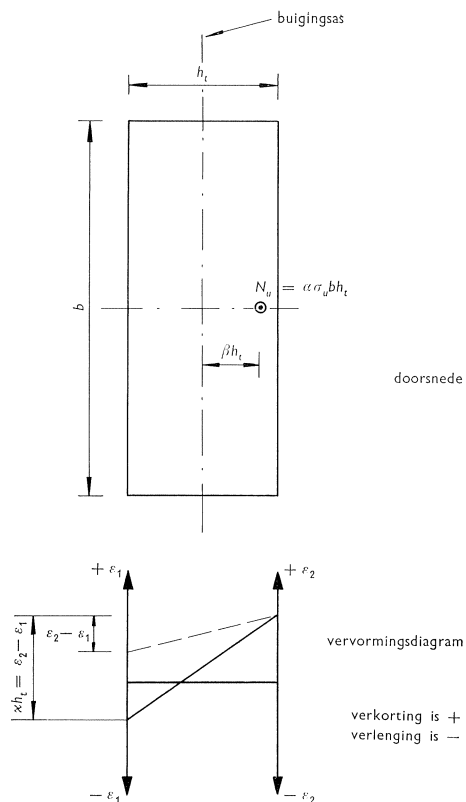


Fig. 4. Kolomdoorsnede, vervormingen en tekenafpraak.

De berekening is uitgevoerd voor:

- 1) een lineair  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram;
- 2) een  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram verlopend volgens een 2e-graads parabool;
- 3) een parabolisch  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram als onder 2), met een daarop aansluitend recht gedeelte.

Steeds wordt hierbij de maximale betonspanning aangeduid met  $\sigma_u$ , terwijl de bijbehorende breukstrijk  $\varepsilon_u$  wordt genoemd. Het parabolvormige  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram wordt in de GBV-1962 voorgeschreven en in de 'Praktische Richtlijnen' van het CEB als een van de mogelijkheden genoemd. Het parabolische diagram met een recht gedeelte wordt voorts in de 'Praktische Richtlijnen' van het CEB als alternatief gegeven.

Fig. 5 bevat een overzicht van de verschillende spannings-vervormingsdiagrammen. Voor een willekeurige vervormingstoestand van de doorsnede (vastgelegd door  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_2$ ) zijn verder de formules gegeven voor:

- 1) de normaalkracht:  $\alpha = N / \sigma_u b h_t$
- 2) de excentriciteit van de normaalkracht ten opzichte van het zwaartepunt van de doorsnede:  $y / h_t = \beta$ .

$\sigma$ - $\varepsilon$ diagram voor het beton onder druk	$E = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}$	$E_t = 2(1-\varepsilon) \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}$ $E_0 = 2 \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}$	$E_t = 2(1-\varepsilon) \frac{\sigma_u}{\varepsilon_p}$ $E_0 = 2 \frac{\sigma_u}{\varepsilon_p}$	$(0 < \varepsilon < \varepsilon_p)$ $(\varepsilon_u > \varepsilon > \varepsilon_p)$				
<b>vervormingsdiagram</b>								
<b>spanningsdiagram</b>								
vergelijking nr.	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h
$\alpha = \frac{N}{\sigma_u b h_t}$	$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_u}$	$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_u} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_u}$	$\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_u} \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}$	$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_u} \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_u}$	$\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_p} \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}$ (als 1c waarbij $\varepsilon_u \rightarrow \varepsilon_p$ )	$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p} \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p}$	$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p} \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}$	$\frac{\varepsilon_2 - 1/3 \varepsilon_p}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$
vergelijking nr.	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	2h
$\beta =$	$\frac{1}{6} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$	$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$	$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_u} \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_u}$	$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_u} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$	$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_p} \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_p}$ (als 2c waarbij $\varepsilon_u \rightarrow \varepsilon_p$ )	$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$	$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$	$\frac{\varepsilon_2 - 1/3 \varepsilon_p}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$

Fig. 5. Overzicht van de doorsnedeformules.  
*Opm.* Het gebruik om verkorting c.q. drukspanning aan te geven met een accent is hier niet toegepast, omdat geen verwarring behoef te worden gevreesd met verlenging c.q. trekspanning. Verlenging wordt hier aangegeven met een minteken, verkorting met een plusteken.

## 4 Constante beginexcentriciteit met sinusvormige uitbuiging

### 4.1 Inleiding

De onderstelling dat een kolom, onderworpen aan een verticale belasting, sinusvormig uitbuigt is theoretisch alleen juist als wordt uitgegaan van een ideaal materiaal, dat voldoet aan de Wet van Hooke, en dat in staat is zowel trek- als drukspanningen onbegrensd lineair-elastisch op te nemen. Beton bezit deze geïdealiseerde materiaaleigenschappen echter niet. In de eerste plaats is de treksterkte relatief gering, waardoor trekspanningen reeds vrij spoedig tot scheurvorming aanleiding kunnen geven; in de tweede plaats is het  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram niet lineair, maar kromlijinig.

Men mag daarom stellen dat bij beton slechts in uitzonderingsgevallen een sinusvormige uitbuigingslijn zal optreden. Uit de berekening en beproeving van een aantal kolommen met constante beginexcentriciteit over de hoogte is echter gebleken, dat de afwijking tussen een sinusvormige en de werkelijk optredende uitbuigingslijn niet groot is (zie ook par. 5.4).

De onderstelling, dat bij kolommen met een constante beginexcentriciteit van de verticale belasting de uitbuiging sinusvormig is, kan daarom als een goede benadering gelden. Bovendien leidt deze benadering bij aldus belaste kolommen aanzienlijk sneller tot resultaten dan de meer exacte en meer algemene differentiemethode (zie hoofdstuk 5). Dit is aanleiding geweest deze benaderingsmethode toe te passen om de invloed van de vorm van het  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram van het beton op de bezwijkbelasting te onderzoeken.

Voorts kan de methode er zeer toe bijdragen het inzicht in het stabiliteitsprobleem te verdiepen.

### 4.2 Overzicht van de berekeningswijze

In fig. 6 is afgebeeld een aan het onderende in-geklemd en aan het bovendende niet gesteunde kolom, ter lengte  $a$ . De belasting wordt uitsluitend gevormd door een verticale last, welke t.o.v. de staafas een (begin-) excentriciteit  $e'$  heeft. Deze belasting doet de kolom uitbuigen over een afstand  $f$ , zodat in de maatgevende doorsnede (= de inklemming) de totale excentriciteit gelijk is aan  $y_m = e' + f$ .

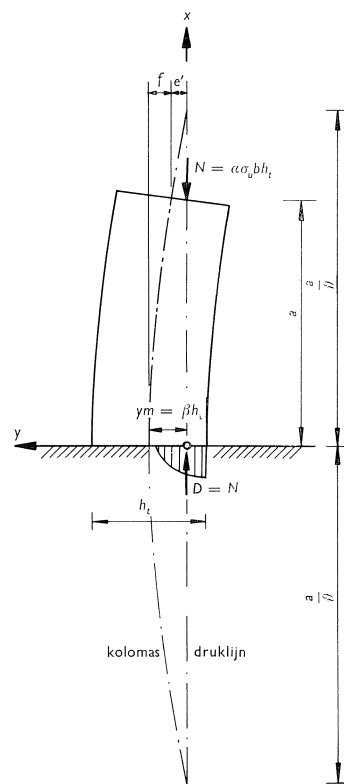


Fig. 6. Schema van een sinusvormig uitgebogen kolom.



De grootte en plaats van de drukresultante in de maatgevende doorsnede worden gegeven door de vergelijkingen (1) en (2), welke in algemene vorm luiden:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \beta = f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1) \dots \dots \dots (2) \quad \text{(zie fig. 5)}$$

De sinuslijn wordt gekarakteriseerd door de buigpuntsafstand  $2a/\vartheta$  en door de pijl  $y_m$ .

Voor een sinusvormige uitbuiging geldt:

$$y = y_m \cos \frac{\pi x}{2a/\vartheta}$$

Voor

$$x = a \text{ is } y = e',$$

waaruit volgt:

$$e' = y_m \cos \frac{\pi \vartheta}{2} \dots \dots \dots (3)$$

Daar de druklijn door het zwaartepunt van de drukspanningsfiguur moet lopen geldt  $y_m = \beta h_t$ , waardoor voor vergelijking (3) kan worden geschreven:

$$\frac{e'}{h_t} = \beta \cos \frac{\pi \vartheta}{2} \dots \dots \dots (4)$$

Voor de kromming in de maatgevende doorsnede geldt voorts:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y_m \frac{\pi^2 \vartheta^2}{4a^2} = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h_t} \dots \dots \dots (5)$$

De waarden van  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_2$  zijn uiteraard betrokken op de maatgevende doorsnede. Stelt men weer  $y_m = \beta h_t$ , dan wordt vergelijking (5):

$$\beta \left( \frac{\pi \vartheta}{\lambda^*} \right)^2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \dots \dots \dots (6)$$

waarin

$$\lambda^* = \frac{2a}{h_t} \dots \dots \dots (7)$$

Zijn – zoals meestal het geval – de afmetingen van de kolom, de beginexcentriciteit en de vorm van het  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram gegeven, dan beschikt men over 4 vergelijkingen (1, 2, 4 en 6), met 5 onbekenden ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  en  $\vartheta$ ): er is dus één onbekende te veel om het stelsel te kunnen oplossen.

Men zou nu als volgt te werk kunnen gaan. Neem voor  $\alpha$  een bepaalde, niet te hoge, waarde aan. Aldus heeft men 4 vergelijkingen met 4 onbekenden, welk geval in principe kan worden opgelost. In het algemeen vindt men echter niet één maar twee reële oplossingen, die elk een mogelijke evenwichtstoestand

kenmerken. In fig. 7 is dit schematisch weergegeven voor de wortels van  $\varepsilon_2$ . Men kan nu de eerstaangenomen waarde van  $\alpha$  geleidelijk verhogen en de betreffende berekeningen herhalen tot aan een zodanige waarde van  $\alpha$ , dat slechts één reële oplossing wordt verkregen. Bij deze oplossing behoort de maximale waarde voor  $\alpha$ , die uit het oogpunt van evenwicht nog mogelijk is. Bij die waarde van  $\alpha$  bezwijkt de kolom door instabiliteit. Als vervanging voor de ontbrekende vijfde vergelijking kan dus de voorwaarde gelden, dat voor  $\alpha$  een maximum moet worden gezocht.

Bij dit alles is nog niet gelet op de grootte van  $\varepsilon_2$ . Het is namelijk heel goed mogelijk dat bij het bepalen van de maximum-waarde van  $\alpha$  de berekening voor  $\varepsilon_2$  grotere waarden oplevert dan de breukstuik  $\varepsilon_u$ . De formules (1) en (2) voor een parabolvormig  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram blijven namelijk ook geldig als de top (gelegen bij  $\varepsilon_u$ ) wordt gepasseerd. Uit fig. 7 blijkt duidelijk dat het bezwijken van de kolom door het bereiken van  $\varepsilon_u$  alleen kan worden ingeleid als  $\varepsilon_u < \varepsilon_{top}$ . In dat geval geldt als vervanging voor de ontbrekende 5e vergelijking de voorwaarde  $\varepsilon_2 = \varepsilon_u$ .<sup>1)</sup> Het bezwijken wordt dan veroorzaakt door verbrijzeling van het beton vóórdát de kolom instabiel is geworden.

In het voorgaande is gesteld, dat het probleem wordt beheerst door de vergelijkingen (1), (2), (4) en (6); voorts moet een maximum voor  $\alpha$  worden gezocht, tenzij de breukstuik reeds bij een lagere belasting wordt bereikt. De bepaling van deze maximumwaarde kan alleen geschieden door een groot aantal gevallen te berekenen, waaruit dan de maximumwaarde  $\alpha_u$  kan volgen.

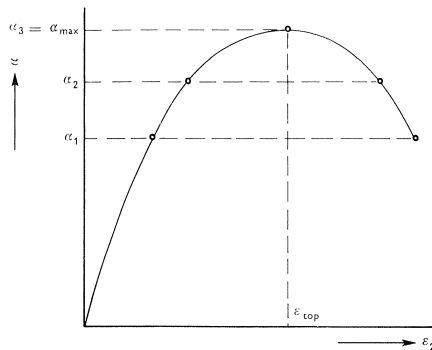


Fig. 7. Schematisch verband tussen  $\alpha$  en  $\varepsilon_2$  bij gegeven  $e'$ .

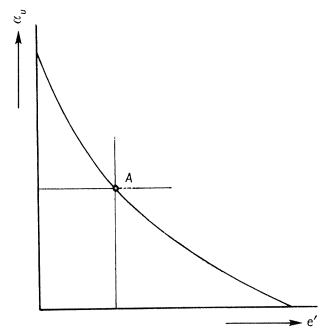


Fig. 8. Schematisch verband tussen  $\alpha_u$  en  $e'$ .

<sup>1)</sup> Uitgegaan is van de gebruikelijke  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagrammen waarbij voor grotere vervormingen dan  $\varepsilon_u$  de spanning gelijk is aan nul. Dit is een veilige benadering. Uit diverse onderzoeken aan centrisc en excentrisch gedrukte korte prisma's en aan buigbalken is nl. komen vast te staan, dat het  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram na het bereiken van  $\varepsilon_u$  niet abrupt wordt afgebroken maar dat de spanning geleidelijk naar nul afneemt. De voorwaarde dat  $\varepsilon_u$  niet mag worden overschreden kan achterwege blijven wanneer men het volledige  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram zou kennen en in rekening brengen [8].

In de berekening bleek het eenvoudiger om – in plaats van bij een gegeven beginexcentriciteit  $e'$  de maximum waarde voor  $\alpha$  te berekenen – bij een gegeven  $\alpha$  de grootst mogelijke waarde van  $e'$  te bepalen.

Uit fig. 8, waarin het verband tussen de maximum waarden van  $\alpha$  ( $\alpha_u$  genaamd) en  $e'$  is voorgesteld, blijkt dat beide methoden tot hetzelfde resultaat leiden. Bij een gegeven beginexcentriciteit  $e'$  behoort de bezwijkbelasting  $a_u$ , d.w.z. punten boven de kromme lijn zijn bij deze excentriciteit niet mogelijk. Op dezelfde manier vindt men dat voor een gegeven  $\alpha_u$  de excentriciteit nooit groter kan worden dan die behorend bij punt A.

De berekening verloopt thans als volgt: Neem een waarde voor  $\varepsilon_2$ . Daar de grootte van  $\alpha$  gegeven is, kan  $\varepsilon_1$  uit verg. (1) worden berekend. Door substitutie van  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_2$  in verg. (2) kan  $\beta$  worden gevonden. Uit verg. (6) volgt nu  $\vartheta$ , die gesubstitueerd in (4) een waarde voor  $e'$  oplevert.

De berekening wordt telkens met een andere waarde voor  $\varepsilon_2$  herhaald (waarbij  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_u$ ). De gezochte oplossing is die, waarbij  $e'$  maximaal is. Doordat de beschreven berekening zeer tijdrovend is, vormt de elektronische rekenmachine een vrijwel onontbeerlijk hulpmiddel.

### 4.3 *Rechthoekig spannings-vertormingsdiagram*

Zoals in de inleiding van dit hoofdstuk reeds is vermeld komt een lineair  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram niet overeen met dat van beton. Toch zal aan dit diagram aandacht worden geschonken, omdat verschillende facetten van de kolomberekening hiermede kunnen worden verduidelijkt.

Om te beginnen wordt ervan uitgegaan, dat het beton in staat is onbeperkt trek- en drukspanningen op te nemen; dan zijn de vergelijkingen (1a) en (2a) uit figuur 5 zowel geldig voor het geval dat in de gehele doorsnede drukspanningen optreden, alsook voor het geval dat in de doorsnede gelijktijdig trek- en drukspanningen voorkomen. Uit de vergelijkingen (1a), (2a), (4) en (6) volgt na eliminatie van de onbekenden  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  en  $\vartheta$ :

$$\frac{e'}{h_t} = \frac{y_m}{h_t} [\cos (\lambda^* \sqrt{3\alpha\varepsilon_u})] \quad . . . . . (8)$$

In fig. 9 is met een streep-punt-lijn het verband tussen  $y_m$  en  $\alpha$  uitgezet voor verschillende waarden van  $e'/h_t$ ; voor de 'slankheidsgraad' is aangenomen  $\lambda^* = 2a/h_t = 15$ .

In fig. 10 is hetzelfde verband weergegeven voor  $\lambda^* = 30$ . De breukstuik is aangehouden op 1,75<sup>0</sup>/<sub>00</sub>.<sup>1)</sup> Uit verg. (8) volgt voor  $\alpha = 0$ :

$$\frac{e'}{h_t} = \frac{y_m}{h_t} = \beta$$

Voorts blijkt, dat alle lijnen asymptotisch naderen tot de waarde  $\alpha_E$ .

<sup>1)</sup> Deze ogenschijnlijk vrij willekeurige waarde is gekozen omdat zij tot dezelfde elasticiteitsmodulus in de oorsprong leidt als een parabolisch  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram met een breukstuik van 3,5<sup>0</sup>/<sub>00</sub>.



of uitgewerkt:

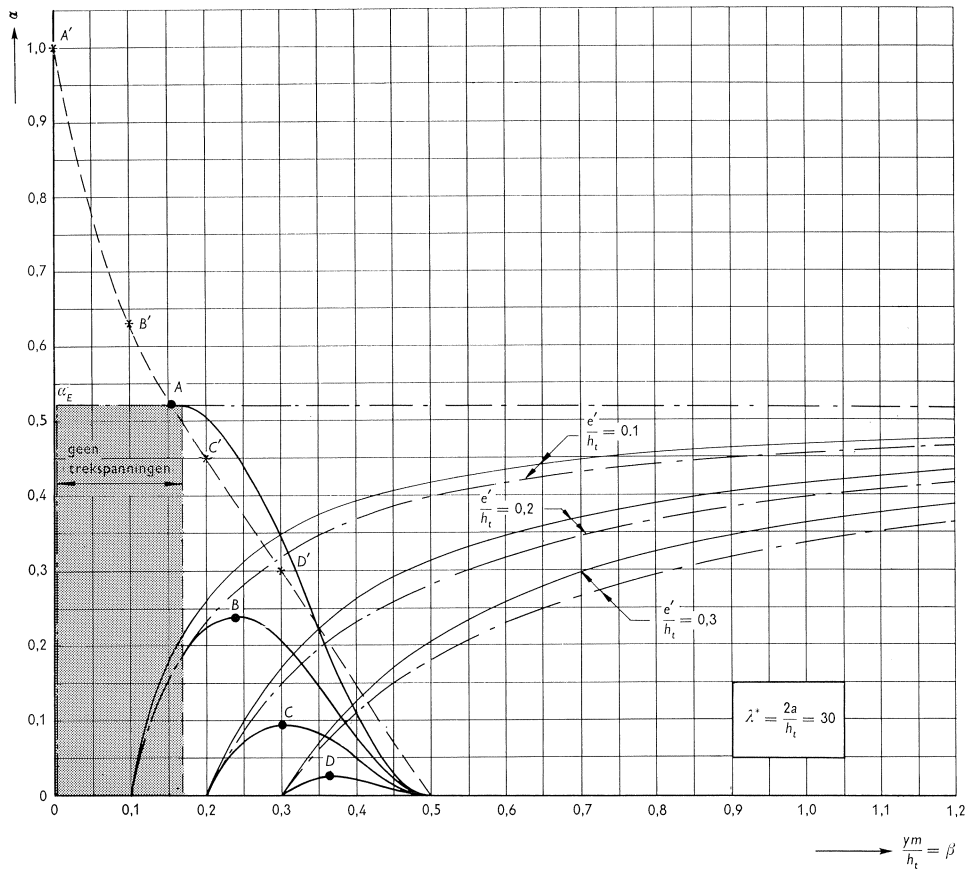
$$\alpha_E = \frac{\pi^2}{12\lambda^{*2}\varepsilon_u} \dots \dots \dots (9)$$

Vergelijking (9) is identiek aan de knikformule van EULER. Na substitutie van  $\alpha_E = N_E/\sigma_u b h_t$ ,  $\lambda^* = 2a/h_t$ ,  $\sigma_u = \varepsilon_u E$  en  $I = 1/12 b h_t^3$  gaat verg. (9) nl. over in:

$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{(2a)^2}$$

Zoals bekend, is bij de ideaal centrisch belaste kolommen ( $e'/h_t = 0$ ) tot het bereiken van  $\alpha_E$  geen uitbuiging aanwezig (zie ook fig. 9 en 10). Het gedrag van de centrisch belaste kolom wordt dus beschreven door 2 takken, nl. een verticale, die samenvalt met de  $\alpha$ -as en een horizontale gegeven door  $\alpha_E$ . Een

Fig. 10. Verband tussen  $\alpha$  en  $y_m/h_t$  voor verschillende waarden van  $e_0/h_t$  bij  $\lambda^* = 30$ , uitgaande van een lineair  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram.



en ander is direct met behulp van verg. (8) aan te tonen. Als  $e'/h_t = 0$  wordt verg. (8):

$$0 = \frac{y_m}{h_t} [\cos (\lambda^* \sqrt{3\alpha\epsilon_u})]$$

Hieraan wordt voldaan als

$y_m/h_t = 0 \rightarrow$  eerste tak langs  $\alpha$ -as, of  $[\cos (\lambda^* \sqrt{3\alpha\epsilon_u})] = 0 \rightarrow$  tweede tak gegeven door  $\alpha_E$ .

In de figuren 9 en 10 is ook aangegeven de lijn voor de ongescheurde doorsnede wanneer deze wordt berekend met de bekende formule:

$$\frac{y_{m1}}{h_t} = \frac{e'}{h_t} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \dots \dots \dots (10)$$

In deze vergelijking stelt de waarde  $n$  het quotiënt voor van de Eulerse kniklast en de optredende normaalkracht [9]. De lijn valt alleen samen met de lijn die is berekend met verg. (8) wanneer, zoals in fig. 11 is afgebeeld, de beginexcentriciteit  $e'$  wordt veroorzaakt door een sinusvormige initiële uitbuiging.

Voor een constante beginexcentriciteit is vergelijking (10) dus een benadering.

De exacte uitkomst, die geheel overeenkomt met het resultaat van vergelijking (8), wordt verkregen met de volgende reeks [9]:

$$\frac{y_{m2}}{h_t} = \frac{4}{\pi} \frac{e'}{h_t} \left\{ \frac{n}{n-1} - \frac{3n}{9n-1} + \frac{5n}{25n-1} - \dots \right\} \dots \dots \dots (11)$$

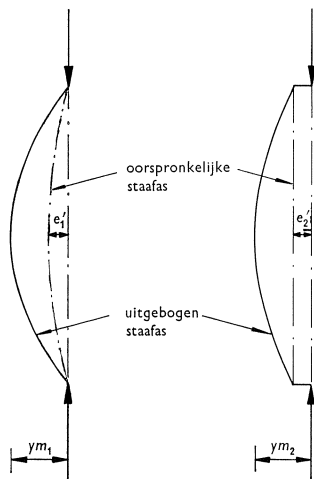


Fig. 11. Kolom met sinusvormige resp. constante beginexcentriciteit.

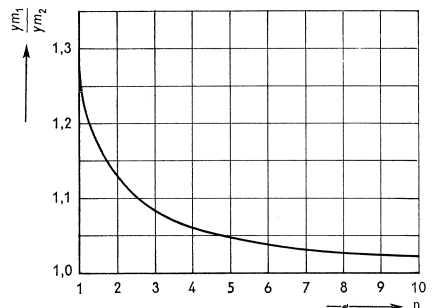


Fig. 12. De afwijking tussen de resultaten van de benaderingsformule (10) en de exacte formule (11).

De afwijking tussen de resultaten van de benaderingsformule (10) en de exacte formule (11) is ook weergegeven in fig. 12. Hierin is de verhouding  $y_{m2}/y_{m1}$  uitgezet tegen verschillende waarden van  $n$ . Uit deze figuur blijkt,

wat ook reeds uit de figuren 9 en 10 volgde, dat de doorbuigingen volgens de exacte berekening groter zijn dan die volgens de benaderingsformule (10).

In het voorgaande is ondersteld, dat het materiaal in staat is trekspanningen op te nemen. Nu zal worden nagegaan, wat de gevolgen zijn als dit niet het geval is. Wordt  $\varepsilon_1$  in verg. (1b) c.q. (2b) van fig. 5 nul gesteld, dan blijkt dat de doorsnede zal scheuren als

$$\beta = \frac{y_m}{h_t} \geq \frac{1}{6}$$

In de figuren 9 en 10 is het gebied waarin geen trekspanningen optreden gearceerd. Vanaf het ogenblik dat scheuren optreden wordt het probleem beheerst door de verg. (1b), (2b), (4) en (6). Het blijkt niet mogelijk de onbekenden in expliciete vorm te geven. In fig. 9 en 10 zijn de berekende krommen met een getrokken lijn aangegeven. Uiteraard gaan alle krommen door het punt  $\alpha = 0, \beta = 0,5$ . Alleen voor  $e'/h_t = 0$  wordt de waarde  $\alpha_E$  bereikt. Elke andere kromme voor  $e'/h_t$  vertoont een maximum, dat lager ligt dan  $\alpha_E$  en afneemt naarmate  $e'/h_t$  groter wordt.

Wordt niet gelet op het al dan niet overschrijden van de breukstuk – m.a.w. wordt de breukspanning niet gelimiteerd – dan geven de toppen van de krommen de belasting aan, waarbij bezwijken t.g.v. instabiliteit optreedt. Opvallend is, dat deze toppen vaak zeer laag liggen ten opzichte van de kniklast van EULER. Dit is vooral het geval bij de grote excentriciteiten. Uit fig. 10 blijkt b.v. dat bij  $e'/h_t = 0,3$  het maximum is gelegen bij een waarde van  $\alpha$  die slechts ongeveer  $50/10$  is van  $\alpha_E$ .

Wordt wel rekening gehouden met het bereiken van de breukstuk, dan kan het verband tussen  $\alpha$  en  $\beta$  worden bepaald voor die toestand, waarbij  $\varepsilon_2 = \varepsilon_u$ . Hiertoe wordt  $\varepsilon_1$  uit de vergelijkingen (1a) en (2a) c.q. (1b) en (2b) geëlimineerd. Voor het geval, dat geen trekspanningen in de doorsnede optreden (verg. 1a en 2a) wordt dan gevonden:

$$\beta = \frac{1-\alpha}{6\alpha} \dots \dots \dots (12)$$

In het gescheurde stadium (verg. 1b en 2b) geldt:

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \alpha \dots \dots \dots (13)$$

Het door de vergelijkingen (12) en (13) gegeven verband is in de figuren 9 en 10 met een stippellijn aangegeven.

In de figuren 9 en 10 is thans aan te geven bij welke waarden van  $\alpha$  en  $\beta$  de kolom zal bezwijken als het materiaal geen trekspanningen kan opnemen (punten A, B, C en D, aangeduid met •).

Figuur 9, welke betrekking heeft op niet te slanke kolommen, toont dat bezwijken in drie van de vier in beschouwing genomen gevallen wordt ver-

oorzaakt door het bereiken van  $\varepsilon_u$ , m.a.w. door verbrijzeling van het beton. Bij de slankere kolommen, waarvan het gedrag in figuur 10 is weergegeven, treedt instabiliteit op voordat  $\varepsilon_u$  wordt bereikt. Slechts centrisch belaste en niet te slanke kolommen met kleine excentriciteiten blijken op het ogenblik van bezwijken ongescheurd te zijn.

Uit de figuren 9 en 10 blijkt duidelijk de invloed van de uitbuiging op de bezwijkbelasting. Voor het geval, dat geen rekening wordt gehouden met de uitbuiging – m.a.w. als wordt volstaan met de doorsnedeberkening – zal de kolom steeds bezwijken door het bereiken van de breukstuik  $\varepsilon_u$ . Voor de beschouwde beginexcentriciteiten  $e'/h_t$  worden de aldus verkregen bezwijkbelastingen aangegeven door de punten A', B', C' en D'. Wordt wel rekening gehouden met de uitbuiging, dan treedt bezwijken op bij de punten A, B, C resp. D. Vergelijking van de met elkaar corresponderende punten toont de belangrijke invloed van de uitbuiging, die toeneemt naarmate de slankheid en de beginexcentriciteit groter worden.

#### 4.4. *Kromlijinig spannings-vertormingsdiagram*

Dezelfde beschouwing als hierboven is ook toe te passen als voor het beton een kromlijinig  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram wordt aangenomen. Analoog aan de figuren 9 en 10 kan weer een figuur worden samengesteld, waarin het verband tussen  $\alpha$  en  $\beta$  voor een bepaalde slankheid wordt aangegeven. In figuur 13 is dit verband geschetst.

Vergelijkt men figuur 13 met de figuren 9 en 10, dan blijkt dat de streepstip-lijnen die gelden als beton onbeperkt trekspanningen kan opnemen, met

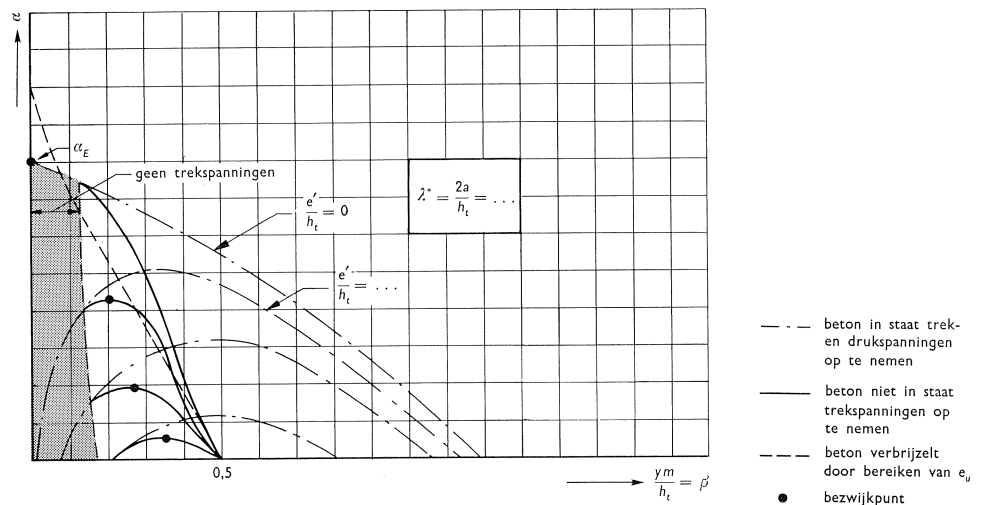


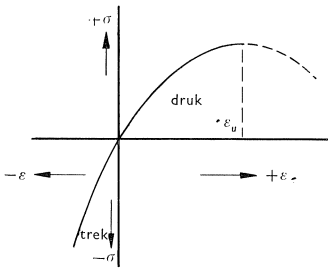
Fig. 13. Schematisch verband tussen  $\alpha$  en  $y_m/h_t$  voor verschillende waarden van  $e'/h_t$  bij een willekeurige slankheidsgraad en uitgaande van een parabolisch  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram.



toenemende  $\beta$  afnemen tot  $\alpha = 0$ . De dalende tendentie kan worden aange-  
toond door de vergelijkingen op te lossen voor b.v. een parabolisch  $\sigma$ - $\varepsilon$ -dia-  
gram. Voor  $e'/h_t = 0$  kunnen de formules in expliciete vorm worden gegeven;  
uit de vergelijkingen (1c), (2c), (4) en (6) volgt nl. na eliminatie van de  
onbekenden  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  en  $\vartheta$ :

$$\frac{y_m}{h_t} = \beta = \frac{2\lambda^* \varepsilon_u \sqrt{3}}{\pi^2} \sqrt{1 - \alpha - \frac{36\alpha^2 \lambda^{*4} \varepsilon_u^2}{\pi^4}} \dots \dots \dots (14)$$

Uit verg. (14) blijkt, dat  $\beta$  alleen kan toenemen, als  $\alpha$  kleiner wordt. Bij de  
afleiding van verg. (14) is voor de grotere waarden van  $\beta$  stilzwijgend aange-  
nomen, dat het  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram van beton onder trek verloopt als aangegeven  
in figuur 14. Over de juistheid van dit uitgangspunt zou men van mening  
kunnen verschillen. Ook voor andere vormen van het  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram van beton  
onder trek (zoals b.v. een soortgelijke parabool als bij beton onder druk)  
blijft de dalende tendentie echter bestaan. De hoogste belasting  $\alpha_{ES}$  die een  
centrisch belaste kolom met gegeven slankheid kan weerstaan, blijkt dus te  
liggen bij  $\beta = 0$ . Uit verg. (14) volgt voor  $\beta = 0$ :



$$\sqrt{1 - \alpha_{ES} - \frac{36\alpha_{ES}^2 \lambda^{*4} \varepsilon_u^2}{\pi^4}} = 0$$

of uitgewerkt:

$$\alpha_{ES} = \frac{-\pi^4 + \pi^2 \sqrt{\pi^4 + 144\lambda^{*4} \varepsilon_u^2}}{72\lambda^{*4} \varepsilon_u^2} (15)$$

De grootheid  $\alpha_{ES}$  is de knikspanning volgens de  
theorie van ENGESSER-SHANLEY.

Volgens deze theorie geldt nl.:

Fig. 14. Aangenomen verloop van de trekspanningen.

$$N_{ES} = \frac{\pi^2 E_t I}{(2a)^2} \dots \dots \dots (16)$$

of in andere vorm geschreven:

$$\alpha_{ES} = \frac{\pi^2 E_t}{12\sigma_u \lambda^{*2}} \dots \dots \dots (17)$$

Hierin is  $E_t$  de tangentmodulus. Volgens figuur 5 geldt hiervoor:

$$E_t = \frac{2}{\varepsilon_u} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right) \sigma_u \dots \dots \dots (18)$$

In deze formule is  $\varepsilon$  de tot het ogenblik van uitknikken over de gehele kolom  
aanwezige specifieke samendrukking. De bij deze vervorming behorende  
spanning is bij een paraboolvormig  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \left( 2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right) \sigma_u \dots \dots \dots (19)$$

Eliminatie van  $\varepsilon/\varepsilon_u$  uit de vergelijkingen (18) en (19) geeft met  $\sigma/\sigma_u = \alpha$ :

$$E_t = \frac{2\sigma_u}{\varepsilon_u} \sqrt{1-\alpha} \dots \dots \dots (20)$$

Substitutie van (20) in (17) leidt tenslotte tot dezelfde betrekking als (15).

De lijnen, die in figuur 13 het verband tussen  $\alpha$  en  $\beta$  aangeven voor het geval het beton niet in staat is trekspanningen op te nemen, vertonen een overeenkomstig beeld als in de figuren 9 en 10. Hetzelfde geldt voor de lijn, die aangeeft bij welke waarden van  $\alpha$  en  $\beta$  de breukstuik wordt bereikt. Uit de ligging van het snijpunt van deze laatste lijn met de eerder genoemde krommen blijkt of de kolom door instabiliteit of door het bereiken van de breukstuik bezwijkt.

#### 4.5 *Uitgewerkte voorbeelden; de invloed van de vorm van het spannings-vertormingsdiagram op de bezwijkbelasting*

De berekeningen zijn uitgevoerd voor de  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagrammen, aangegeven in figuur 15. De berekeningsresultaten zijn weergegeven in de figuren 16A...E, en wel voor de slankheden  $\lambda^* = 2a/h_t = 0, 10, 20, 30$  en  $40$ . Voor elk  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram is uitgezet de grootte van de bezwijkbelasting  $\alpha_u = N_u/\sigma_u b h_t$  tegen de beginexcentriciteit  $e_0/h_t = e'/h_t$ .<sup>1)</sup> In al deze gevallen is ervan uitgegaan, dat het beton niet in staat is trekspanningen op te nemen.

In figuur 18 is voor de diverse diagrammen het verband uitgezet tussen  $\alpha_u$  en  $\lambda^*$  voor het geval de kolommen centrisch worden belast.

De lijnen in de figuren 16A...E berekend met de in fig. 15 getekende  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagrammen geven alle verwante beelden. De lijnen, berekend met het lineaire diagram a (fig. 15) maken hierop geen uitzondering. Het verloop wordt in belangrijke mate beïnvloed door de scheurvorming (zie ook fig. 9, 10 en 13), waardoor alle lijnen door het punt ( $\alpha = 0$ ;  $e_0/h_t = 0,5$ ) gaan. Andere invloeden zijn uiteraard de vorm van het  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram en de grootte van de breukstuik c.q. de elasticiteitsmodulus in de oorsprong.

De lijnen, die het verband tussen  $\alpha_u$  en  $e_0/h_t$  aangeven voor de verschillende  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagrammen, mogen dan wel op het eerste gezicht een tamelijk smalle lijnenbundel vormen, bij nadere beschouwing blijken toch zeer grote verschillen aanwezig. Om enkele voorbeelden te noemen: Wanneer de slankheid  $\lambda^* = 20$  geeft diagram a bij  $e_0/h_t = 0$  een bezwijkbelasting, die  $1,5 \times$  zo groot is als de bezwijkbelasting berekend met diagram b. Voor  $\lambda^* = 30$  en

<sup>1)</sup> Met de beginexcentriciteit  $e_0/h_t$  wordt bedoeld de beginexcentriciteit in de maatgevende doorsnede. Voor de beschouwde kolommen, waarbij de beginexcentriciteit constant is over de lengte, geldt  $e_0/h_t = e'/h_t$ . Werkt op het einde van een aan één zijde ingeklemde kolom b.v. een verticale en een horizontale kracht, dan is  $e_0/h_t \neq e'/h_t$  (zie fig. 17, blz. 85).

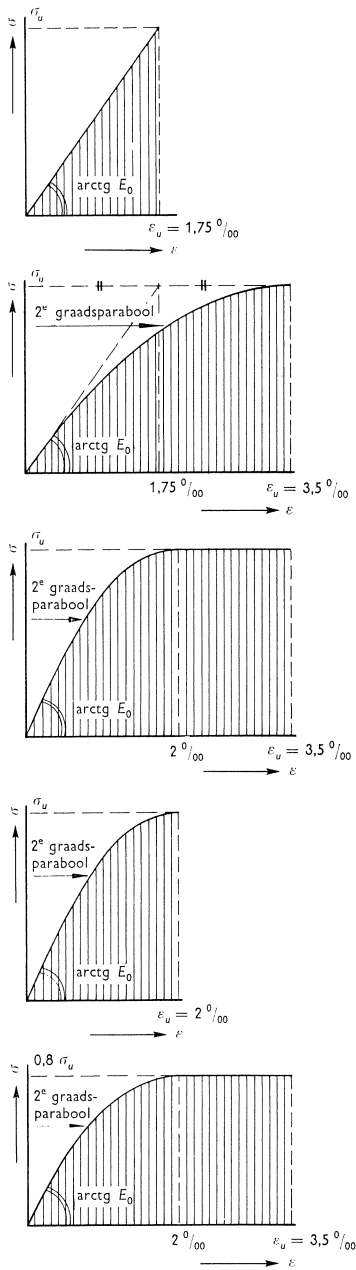


Fig. 15. Overzicht van de verschillende in beschouwing genomen  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagrammen.

$e_0/h_t = 0,2$  geven de diagrammen c en d een waarde voor  $\alpha_u$ , die  $1,7 \times$  zo groot is als die, berekend met diagram b.

diagram a  
 $E_0 = 571 \sigma_u$

diagram b  
 $E_0 = 571 \sigma_u$

diagram c  
 $E_0 = 1000 \sigma_u$

diagram d  
 $E_0 = 1000 \sigma_u$

diagram e  
 $E_0 = 800 \sigma_u$

Een nadere analyse van de figuren 16 en 18 toont het volgende: De invloed van de 'afgebogen vorm' van het  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram is te zien door de lijnen, berekend met de diagrammen a en b met elkaar te vergelijken. Genoemde diagrammen hebben in de oorsprong dezelfde helling en dus dezelfde elastici-

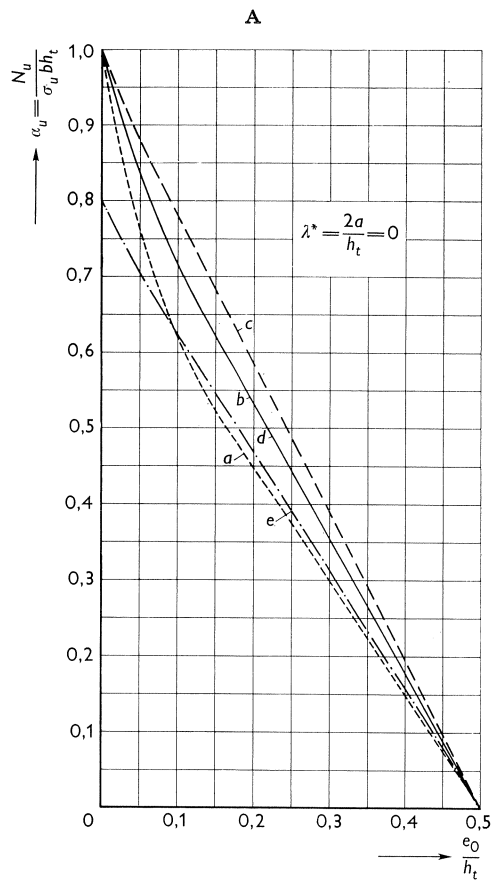
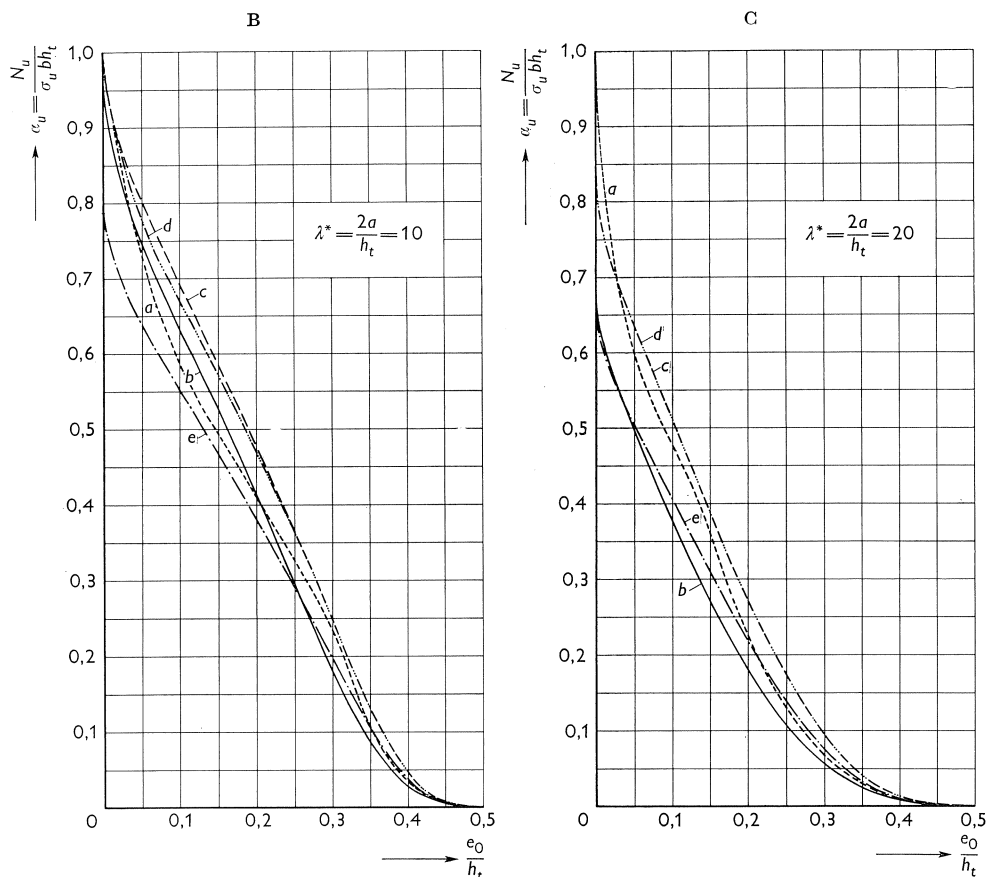


Fig. 16A...E. Verloop van de bezwijkbelasting  $\alpha_u$  als functie van de beginexcentriciteit  $e_0/h_t$ , uitgaande van de  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagrammen a...e van fig. 15. (Op bovenstaande figuur A volgen B...E op blz. 84/85).



teitsmodulus. Voor de grote slankheden  $\lambda^*$  geeft het kromlijngige diagram b een ongunstiger resultaat dan het lineaire diagram a; de afwijkingen zijn het grootst bij kleine beginexcentriciteiten en slankheidswaarden in de buurt van 20 à 30 (zie b.v. fig. 18 en bovengenoemd voorbeeld). Bij de doorsnedeberkening ( $\lambda^* = 0$ ) geeft diagram a steeds de laagste waarden. De invloeden van de breukstuik c.q. van de elasticiteitsmodulus in de oorsprong is bij een paraboelvormig  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram te ontlenen aan de lijnen berekend met de diagrammen b en d. Vooral bij de grote slankheden is deze invloed groot. De verhouding tussen de met beide diagrammen berekende bezwijkbelastingen zal maximaal bedragen:

$$\frac{E_{0(\varepsilon_u = 2\text{‰})}}{E_{0(\varepsilon_u = 3,5\text{‰})}} = 1,75.$$

Bij  $\lambda^* = 0$  geven beide diagrammen elk dezelfde bezwijkbelasting. Het effect van de mate van 'plasticiteit' is te zien uit vergelijking van de lijnen berekend met de diagrammen c en d. Omdat bij de grote slankheden instabiliteit optreedt, bij waarden van  $\varepsilon_2 \leq 20\text{‰}$ , geven beide lijnen daar hetzelfde resultaat.

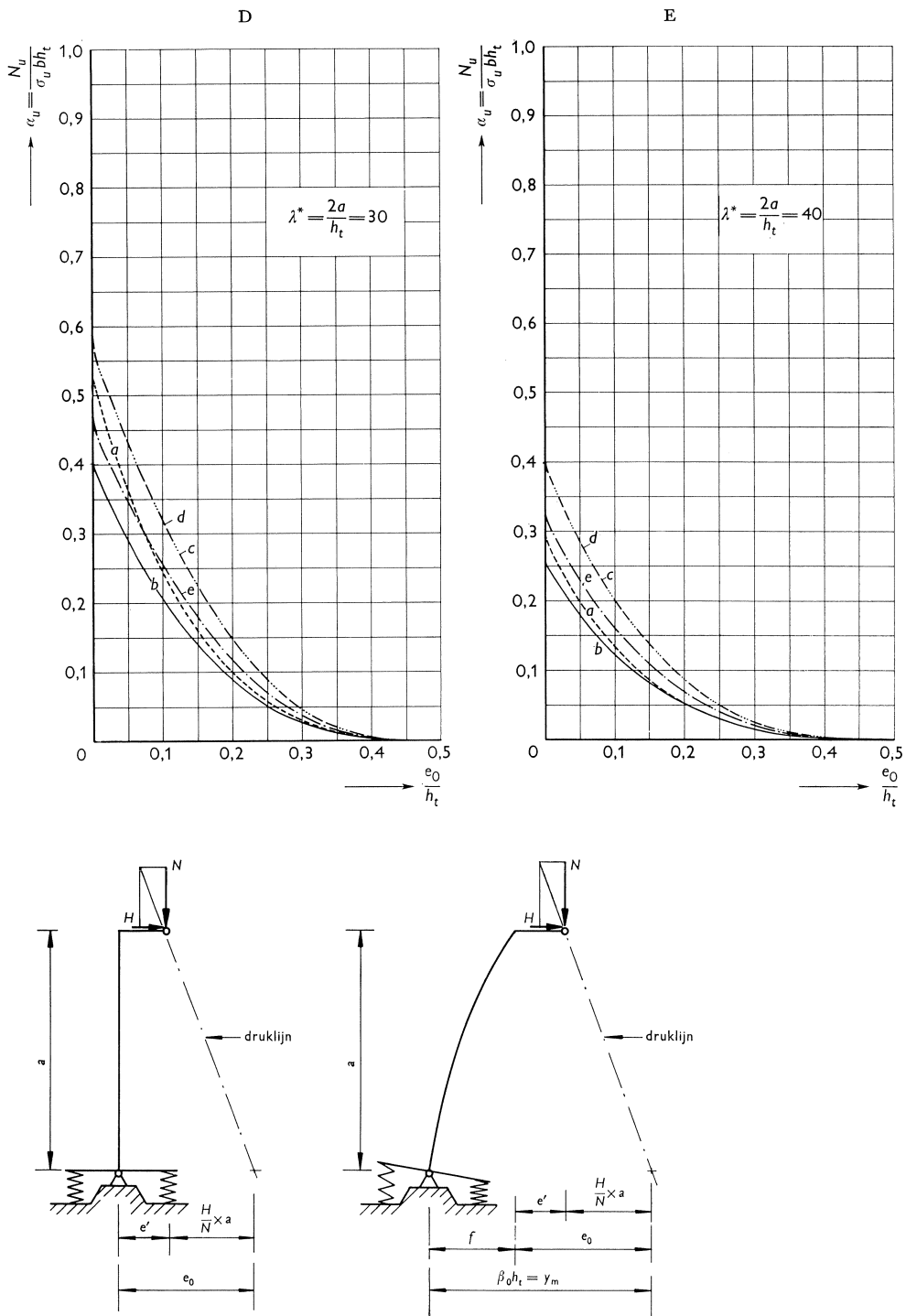


Fig. 17. Definitie van de beginexcentriciteiten. (Behoort bij noot 1, blz. 82).

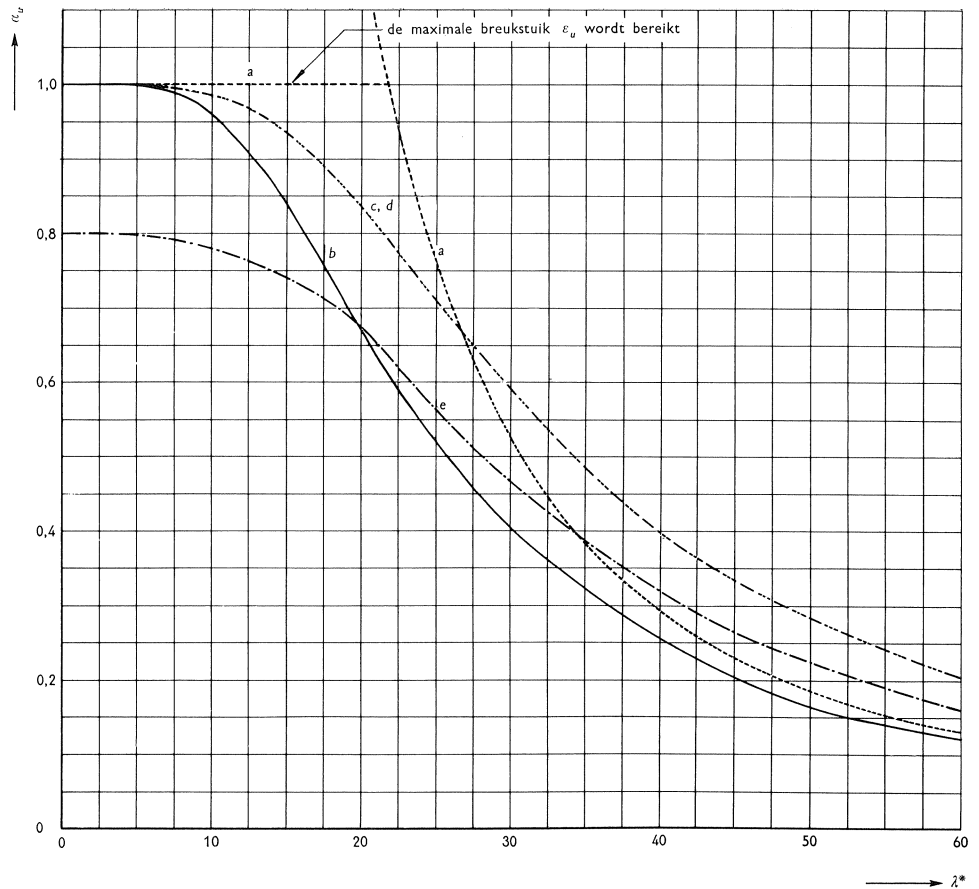


Fig. 18. Verloop van de bezwijkbelasting  $\alpha_u$  als functie van de slankheid  $\lambda^*$  bij centrisc belaste kolommen, berekend met de  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagrammen uit fig. 15.

Bij de kleinere slankheden is diagram c gunstiger. Ten slotte kunnen nog de beide in de 'Praktische Richtlijnen' van het CEB voorkomende diagrammen worden vergeleken, t.w. de diagrammen b en e. Eerstgenoemd diagram wordt ook in de GBV-1962 voorgeschreven. Bij de grote slankheden leidt diagram e tot hogere bezwijkbelastingen dan diagram b als gevolg van de hogere elasticiteitsmodulus in de oorsprong; bij de kleine slankheden geeft diagram b daarentegen de hoogste waarden.

Uit het bovenstaande mag de conclusie worden getrokken, dat de keus van het  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram belangrijke consequenties heeft. Dit zal in mindere mate het geval zijn bij kolommen van *gewapend* beton; immers naarmate meer wapening wordt toegepast speelt het beton relatief een kleinere rol. In feite zou men dat diagram moeten aanhouden, dat zo goed mogelijk met de werkelijkheid overeenstemt. De moeilijkheid is echter, dat het verband tussen spanningen en vervormingen door zeer veel factoren wordt beïnvloed. In hoofdstuk

P.3.1 van de 'Praktische Richtlijnen' [2], worden de voornaamste factoren genoemd. In hetzelfde hoofdstuk wordt opgemerkt, dat de taak van de staticus te zwaar zou worden, als hij met al deze factoren rekening zou moeten houden. Men ontkomt dus niet aan een zekere schematisering. Een aannemelijke vorm, waarmede de werkelijkheid redelijk kan worden benaderd, is de 2e-graadsparabool. In de hierna volgende berekeningen zal dan ook van deze vorm worden uitgegaan. De breukstuk wordt in eerste instantie op  $3,50/00$  gesteld. Dit is gedaan, omdat het aldus verkregen  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram (zie fig. 15, diagr. b)

- 1e door het CEB als één van de mogelijkheden wordt aanbevolen;
- 2e in de GBV-1962 wordt voorgeschreven;
- 3e volgens de fig. 16A...E in het belangrijke gebied van de grotere slankheden – dus wanneer het bezwijken primair wordt ingeleid door instabiliteit – van alle beschouwde diagrammen het veiligste uitgangspunt vormt.

Zijn de met bovenbedoeld diagram berekende resultaten bekend, dan is het mogelijk deze te gebruiken voor elke willekeurige waarde van de breukstuk c.q. elasticiteitsmodulus in de oorsprong, door toepassing van een eenvoudige transformatie (zie hoofdstuk 7).

## 5 Differentiemethode, toegepast op eenzijdig verend ingeklemde kolommen

### 5.1 Algemene opzet

Ter toelichting hierbij diene het belastingsschema volgens fig. 1b.

Aan het bovenende van de kolom (met een lengte  $a$ ) grijpt een verticale kracht  $N$  aan op een afstand  $e'$  uit de staafas, alsmede een horizontale kracht  $H$ . Aan het onderende van de kolom is een verende inklemming aanwezig, waarvan het verband tussen de hoekverdraaiing  $\varphi$  en het moment  $M$  bekend wordt verondersteld.

Om te beginnen wordt de kolom in een aantal, b.v. 10, gelijke moten verdeeld.<sup>1)</sup> Elke moot heeft dan een hoogte  $\Delta x = a/10$  (zie fig. 19).

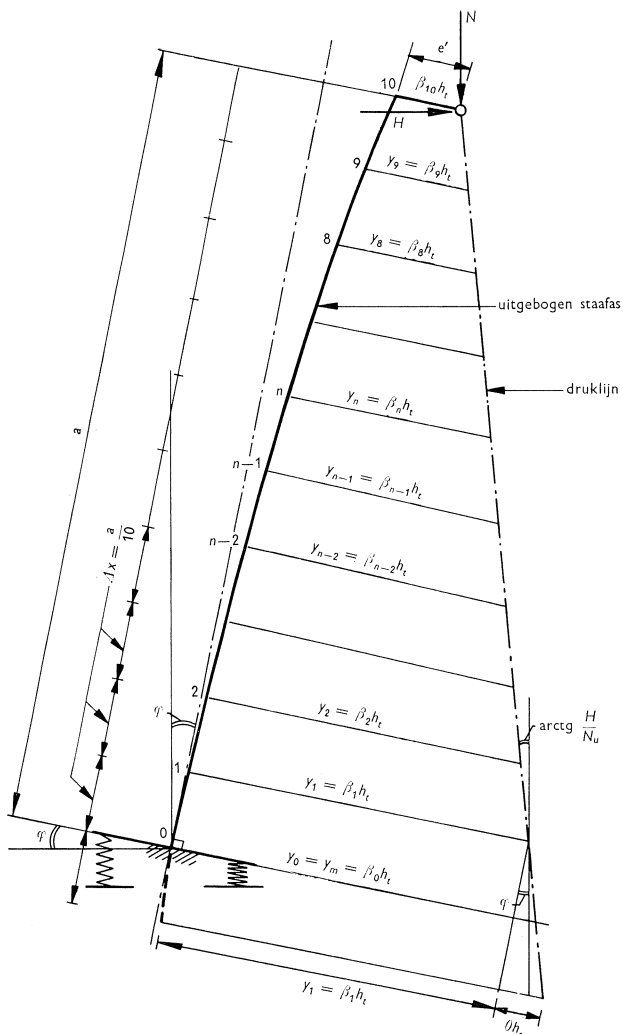
De algemene differentiaalvergelijking voor de kromming

$$\kappa = - \frac{d^2y}{dx^2}$$

wordt vervangen door een differentievergelijking, zodat voor een willekeurig differentiepunt kan worden geschreven:

$$\kappa_{n-1} = - \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{(\Delta x)^2}$$

<sup>1)</sup> In principe is het uiteraard mogelijk uit te gaan van niet gelijke stukken. Dit kan b.v. voorkomen als het gaat om kolommen, waarvan de doorsnede-afmetingen over de hoogte variëren.



$$\beta_n = 2\beta_{n-1} - \beta_{n-2} - \frac{\alpha_{n-1}}{h_t} (\Delta x)^2$$

$$\beta_1 = \beta_0 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{h_t} (\Delta x)^2 - \frac{1}{2} \theta$$

Fig. 19. Schema van een verend ingeklemde kolom met een belasting op het vrije uiteinde.

of:

$$\beta_n = 2\beta_{n-1} - \beta_{n-2} - \frac{\alpha_{n-1}}{h_t} (\Delta x)^2 \dots \dots \dots (21)$$

De afstand tussen de druklijn en de uitgebogen staafas in een punt kan met behulp van verg. (21) uit de gegevens van de vorige punten worden afgeleid. Alleen voor  $\beta_1$  geldt een andere vergelijking, nl.:

$$\beta_1 = \beta_0 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{h_t} (\Delta x)^2 - \frac{1}{2} \theta \dots \dots \dots (22)$$



Deze vergelijking volgt uit symmetrieoverwegingen. De waarde van  $\theta$  kan uit fig. 19 worden afgeleid en is afhankelijk van de helling van de oorspronkelijke staafas en van de helling van de druklijn. Voor de gebruikelijke kleine waarden van  $\varphi$  en  $H/N$  geldt:

$$\theta = 2 \left( \varphi + \frac{H}{N} \right) \frac{\Delta x}{h_t} \dots \dots \dots (23)$$

Als gegeven worden nu verondersteld:

1. de normaalkracht  $N$ ;
2. de horizontale kracht  $H$ ;
3. het  $M$ - $\varphi$ -diagram van de veer;
4. de kolomlengte  $a$ ;
5. het verband tussen het moment  $M$  en de kromming  $\varkappa$  voor de onder 1. genoemde normaalkracht  $N$ ; dit verband kan worden weergegeven door een zgn.  $M$ - $N$ - $\varkappa$ -diagram.

In beginsel kan het probleem nu als volgt worden opgelost:

1. Kies in de maatgevende doorsnede een kromming  $\varkappa_0$ .
2. Daar de normaalkracht is gegeven, kan met behulp van het  $M$ - $N$ - $\varkappa$ -diagram het moment ter plaatse worden bepaald.
3. Uit dit moment is de afstand  $\beta_0 h_t$  te berekenen, door het moment te delen door de normaalkracht.
4. Bepaal met het  $M$ - $\varphi$ -diagram voor de veer de hoekverdraaiing  $\varphi$ .
5. Bereken met verg. (22) en (23) de afstand  $\beta_1 h_t$ , waardoor het moment in de volgende doorsnede verkregen wordt, nl.  $N\beta_1 h_t$ .
6. Bepaal met het  $M$ - $N$ - $\varkappa$ -diagram de kromming aldaar ter plaatse.
7. Met verg. (21) is de afstand  $\beta_2 h_t$  te bepalen, waardoor het moment aldaar vastligt.
8. Bepaal met het  $M$ - $N$ - $\varkappa$ -diagram de kromming, en zo voort.

Tenslotte wordt in het bovenste punt van de kolom een waarde voor  $e'$  gevonden, die behoort bij de aangenomen  $\varkappa_0$  in de maatgevende doorsnede. Door de berekening te herhalen met steeds andere waarden voor  $\varkappa_0$  kan de maximaal mogelijk waarde van  $e'$  worden bepaald.

### 5.2 $M$ - $N$ - $\varkappa$ -diagrammen

Om voornoemde rekenwijze te kunnen toepassen is het noodzakelijk te beschikken over  $M$ - $N$ - $\varkappa$ -diagrammen. Deze diagrammen kunnen worden berekend als het  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram is gegeven.

Zoals vermeld zal alleen het parabolische  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram met een breukstuik van  $\varepsilon_u' = 3,50/00$  worden onderzocht. De basisvergelijkingen voor de berekening van een  $M$ - $N$ - $\varkappa$ -diagram vormen de verg. (1c) en (2c) voor het onge-

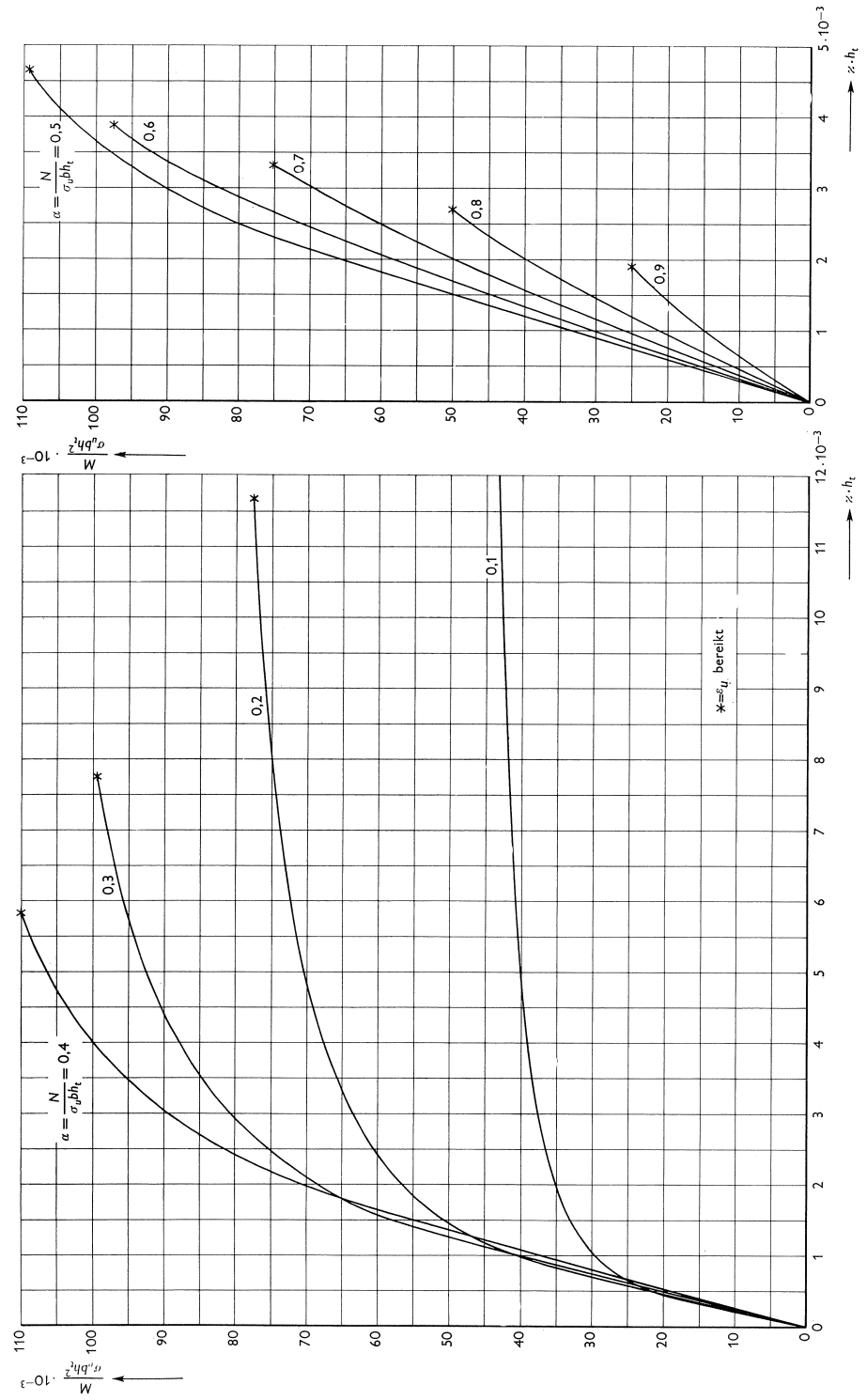


Fig. 20.  $M-N-z$ -diagram behorende bij een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstuik van  $3,5 \text{ ‰}$ .

scheurde stadium en de verg. (1d) en (2d) voor het gescheurde stadium (zie fig. 5). De berekening verloopt als volgt:

- a. de normaalkracht  $N$  is gegeven, waardoor  $\alpha$  bekend is;
- b. kies een waarde voor  $\varepsilon_2$ ;
- c. bereken met verg. (1c) of (1d) de waarde voor  $\varepsilon_1$ ;
- d. bepaal  $\varkappa = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/h_t$ ;
- e. bereken  $\beta$  met de verg. (2c) of (2d);
- f. bepaal  $M = \beta h_t N$ ;

Voor iedere gekozen waarde van de normaalkracht volgt dus een kromme. Iedere kromme eindigt daar, waar  $\varepsilon_2$  de waarde  $\varepsilon_u$  bereikt. De rotatiecapaciteit van de doorsnede wordt vanaf dat punt overschreden. In fig. 20 is het  $M-N-\varkappa$ -diagram aangegeven.

Het gebruik van  $M-N-\varkappa$ -diagrammen biedt in principe een universele mogelijkheid ook meer gecompliceerde constructies bestaande uit kolommen en balken c.q. wanden en vloeren te berekenen. Als het uitsluitend gaat om de berekening van kolommen of wanden, kan de oplossing enigszins worden vereenvoudigd door te werken met  $\beta-N-\varkappa$ -diagrammen; deze diagrammen kunnen eenvoudig uit het  $M-N-\varkappa$ -diagram worden afgeleid door het moment te delen door de bijbehorende normaalkracht. Toepassing van  $\beta-N-\varkappa$ -diagrammen maakt het mogelijk het verband tussen  $\beta$  en kromming direct te geven zonder dat als tussenstap het moment behoeft te worden uitgerekend.

Het verband tussen  $N$ ,  $\beta$  en  $\varkappa$  is weergegeven in fig. 21. Met een voorbeeld zal worden geïllustreerd hoe deze grafiek moet worden gelezen.

Stel  $\alpha = 0,2$  en  $\beta = 0,3$ . Waar de horizontale lijn  $\alpha = 0,2$  de  $\beta$ -krommen snijdt kunnen de waarden voor  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_2$  worden afgelezen. De kromming wordt voorgesteld door de afstand tussen beide snijpunten:

$$\varkappa = \frac{(1,4 + 1,0)10^{-3}}{h_t} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{h_t}$$

Op te merken valt dat de lijn voor  $\beta = 0$  juist het aangenomen  $\sigma-\varepsilon$ -diagram voorstelt. De waarden van  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_2$  zijn daar gelijk omdat de doorsnede centrisch wordt belast.

### 5.3 Uitgewerkte voorbeelden

Aangenomen is een rechtlijnig verband tussen het moment  $M$  aan de kolomvoet en de hoekverdraaiing  $\varphi$  daar ter plaatse, dus:

$$\frac{M}{\varphi} = C \dots \dots \dots (24)$$

Hierin is  $C$  de veerconstante met de dimensie [kgf·m]. Om de berekening geheel met dimensieloze grootheden te kunnen uitvoeren, is een nieuwe 'constante'  $\eta$  ingevoerd:

$$\eta = \frac{\sigma_u b h_t^2}{C} \dots \dots \dots (25)$$

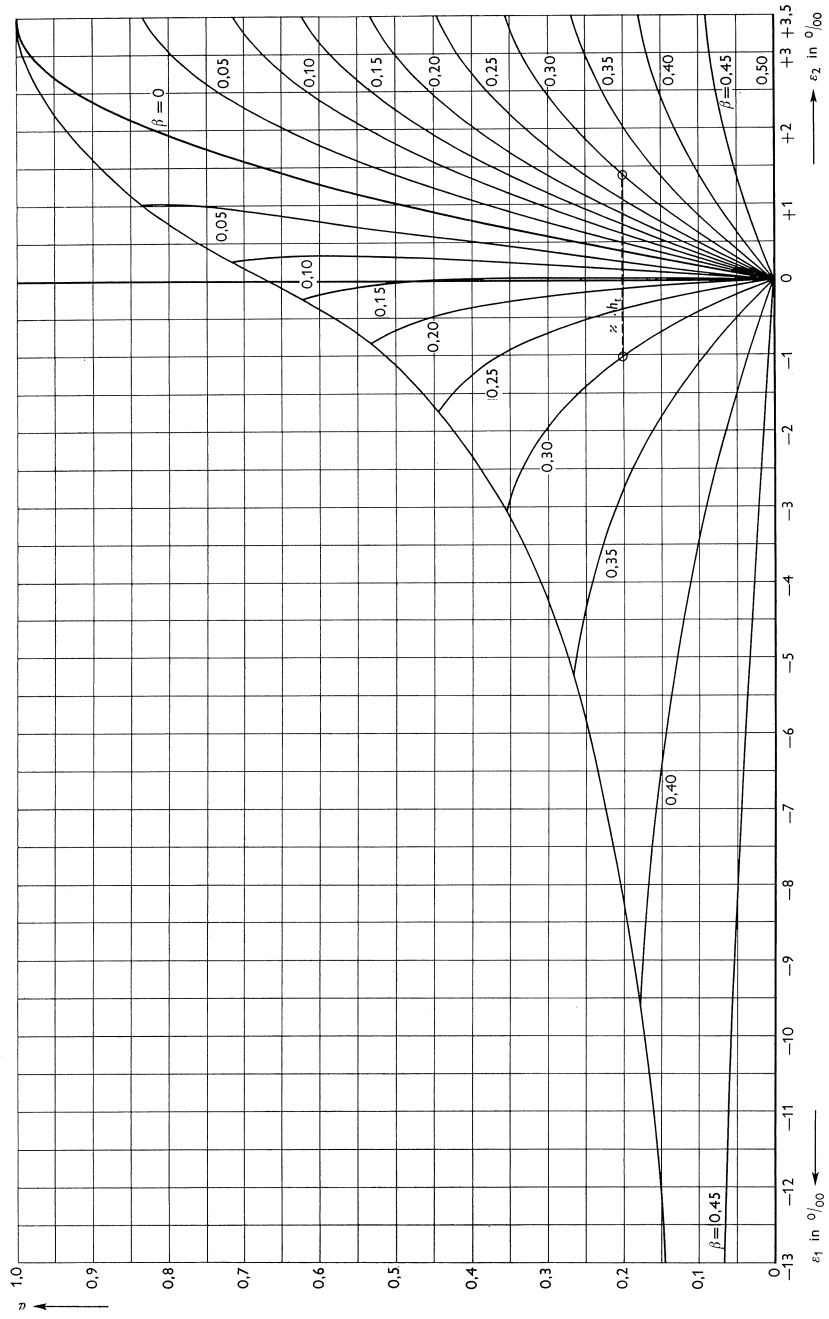


Fig. 21.  $\beta$ - $N$ - $\nu$ -diagram behorende bij een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstuik van  $3,5\%$ .

Hiermede wordt verg. (24):

$$\varphi = \eta \frac{M}{\sigma_u b h_t^2} \dots \dots \dots (26)$$

Voor  $\eta$  zijn de volgende dimensieloze waarden gekozen: 0, 0,05, 0,1, 0,2 en 0,4. Voorts is een aantal verhoudingen van  $H/N$  onderzocht, nl. 0, 0,01, 0,02 en 0,03. De slankheidsgraad  $\lambda^* = 2a/h_t$  is gevarieerd van 0 . . . 40 (met intervallen van 5).

Alvorens de berekeningen uit te voeren is onderzocht in hoeveel moten de kolomlengte  $a$  moet worden verdeeld om een voldoende graad van nauwkeurigheid te bereiken. Hiertoe is voor eenzelfde belastingsgeval het aantal delen gevarieerd. Voor het geval met constante beginexcentriciteit bleek, dat de berekening met 2 moten voor dezelfde  $a$  een excentriciteit opleverde, die slechts 1% lager was dan bij de berekening met 10 kolomdelen. Als een horizontale kracht aanwezig is, gelijk aan 3% van de verticale last, blijkt bij 5 delen een nauwkeurigheid van 2% te worden bereikt.

Op grond van het bovenstaande werd de volgende verdeling aangehouden:

- 5 moten voor kolommen zonder  $H$ -kracht;
- 10 moten voor de overige kolommen.

Hiermee is naar het voorkomt een voldoende hoge graad van nauwkeurigheid te bereiken.

De resultaten zijn weergegeven in de figuren 22 . . . 26; hierin is  $\alpha_u$  uitgezet tegen  $e_0/h_t$  voor de verschillende waarden van  $\lambda^*$ . Tevens is de grootte van de uitbuiging  $f/h_t$  aangegeven. In principe hadden de resultaten ook gegeven kunnen worden door  $\alpha_u$  tegen  $e'/h_t$  uit te zetten. Daar men in de praktijk echter gewend is te rekenen met excentriciteiten in de maatgevende doorsnede (ook in de GBV komt  $e_0$  in de formules voor de kolomberekening voor) is aan de hier gevolgde methode de voorkeur gegeven. De figuren behoeven daarbij enige toelichting.

Uit de figuren 22a . . . d kan voor  $\eta = 0$  (volledige inklemming) en b.v.  $\lambda^* = 20$  een grafiek worden samengesteld als aangegeven in fig. 27. Uit deze figuur volgt, dat naarmate de kracht  $H$  toeneemt de kolommen bij eenzelfde  $\alpha_u$  een grotere waarde van  $e_0$ , dus een groter inklemmingsmoment kunnen leveren. Dit hangt samen met de wijze waarop de grootte van  $e_0$ , dus van het inklemmingsmoment, is opgebouwd. In fig. 28a b.v. wordt uitsluitend als gevolg van een excentrisch geplaatste verticale last een bepaalde waarde van  $e_0$  gevonden; het hierbij optredende momentenvlak (1e-orde theorie) is rechthoekig. In fig. 28b wordt een even grote waarde van  $e_0$  bereikt door dezelfde normaalkracht centrisch te laten aangrijpen en een passende horizontale kracht aan te brengen. Het momentenvlak is dan driehoekig. Het is duidelijk dat dit laatste geval gunstiger is dan het eerste, omdat de uitbuigingen geringer zullen zijn. In fig. 29 is voor het geval  $\eta = 0$  een grafiek gegeven waaruit,

uitgaande van eenzelfde  $e_0$ , de invloed van de beide in fig. 28 gegeven belastingschema's duidelijk blijkt.

Het bovenstaande doet uiteraard niets af aan het feit dat een horizontale, in de uitbuigingsrichting werkende, kracht altijd een verlaging van de verticale bezwijkbelasting tot gevolg zal hebben. Het invoeren van zo'n horizontale kracht betekent immers een vergroting van  $e_0$  en dus een vermindering van  $\alpha_u$ .

In fig. 30 is voor het bijzondere geval  $e'/h_t = 0$  en  $\eta = 0$  het verband tussen  $\alpha_u$ ,  $e_0/h_t$  en  $f/h_t$  weergegeven.

Uit de figuren 22 ... 26 blijkt voorts, dat de constante  $\eta$  een grote invloed heeft. Dit is ook duidelijk te zien in fig. 31, waarbij voor  $H = 0$  en  $\lambda^* = 20$  het effect van de veer is weergegeven. De grote invloed van de veer op de bezwijklast moge voor de constructeur een waarschuwing zijn om in de praktijk met de te verwachten graad van inklemming rekening te houden.

In figuur 22a is met een arcering het gebied aangegeven, waarin geen trekspanningen optreden. De figuur laat zien, dat voor waarden  $\alpha_u < 0,67$  (met uitzondering van de *zeer kleine* excentriciteiten) volgens de berekeningsaannamen scheurvorming zal optreden.

De vervormingen  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_2$  op het ogenblik van bezwijken kunnen eenvoudig worden bepaald. Daar in elk van de figuren 22 ... 26 behalve de bezwijkbelasting  $\alpha_u$  ook de uitbuiging  $f/h_t$  kan worden afgelezen, is de totale excentriciteit  $\beta = y_m/h_t = e_0/h_t + f/h_t$  bekend (te vinden door horizontale opmeting). Met behulp van het in fig. 21 gegeven  $\beta$ - $N$ - $\alpha$ -diagram kunnen nu direct voor de bekende waarden van  $\alpha_u$  en  $\beta$  de randvervormingen  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_2$  worden bepaald.

#### 5.4 *Vergelijking met de sinusvormige uitbuiging*

Het geval  $H = 0$  en  $\eta = 0$  is zowel met de differentiemethode als met de aanname van de sinusvormige uitbuigingslijn berekend. In fig. 32 zijn de betreffende resultaten met elkaar vergeleken. De overeenkomst is alleszins redelijk te noemen. De benadering met de sinusvormige uitbuigingslijn blijkt aan de veilige kant.

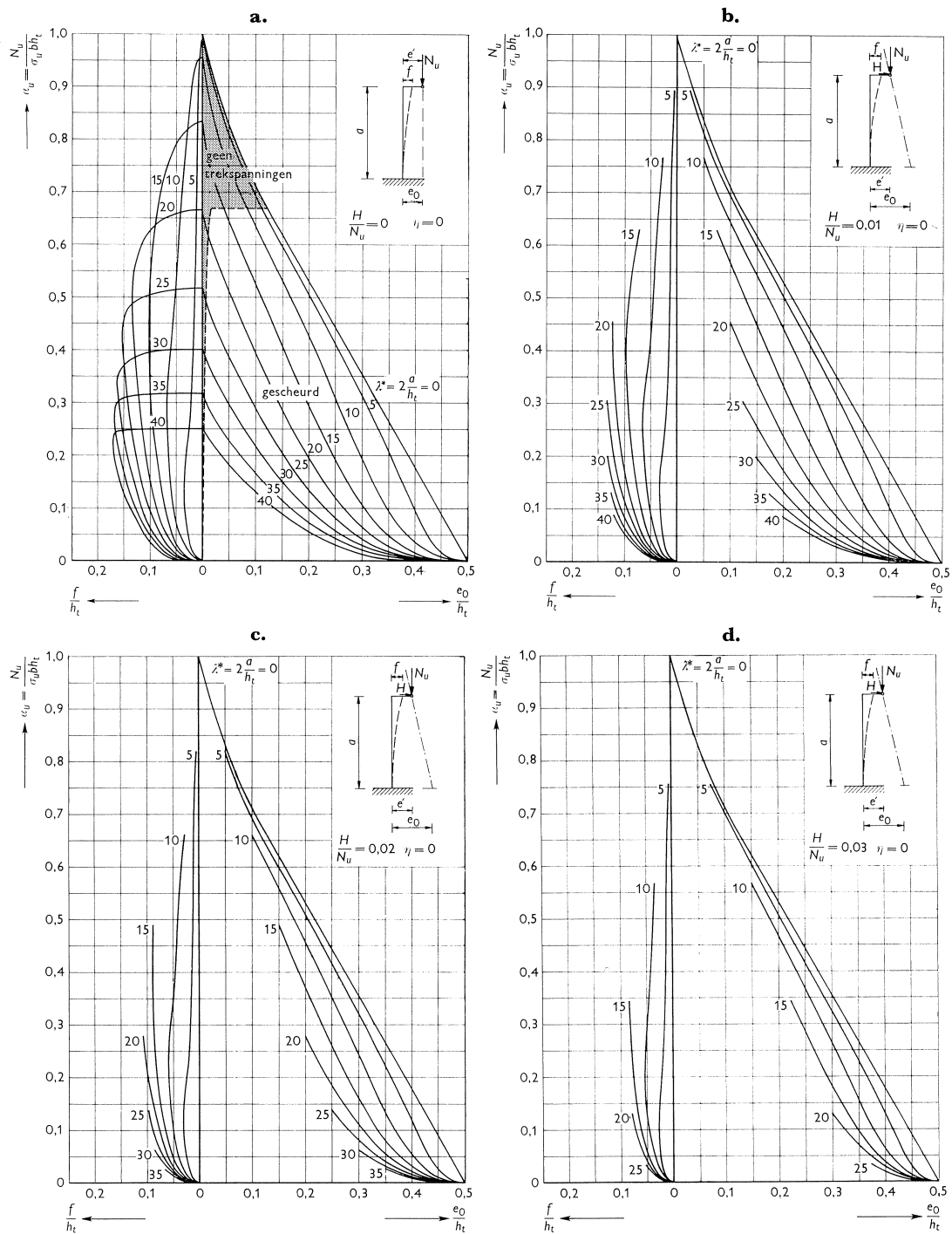


Fig. 22. Verloop van de bezwijkbelasting  $\alpha_u$  als functie van  $e_0/h_t$  voor een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstuijk van  $3,5\sigma_{00}$ .

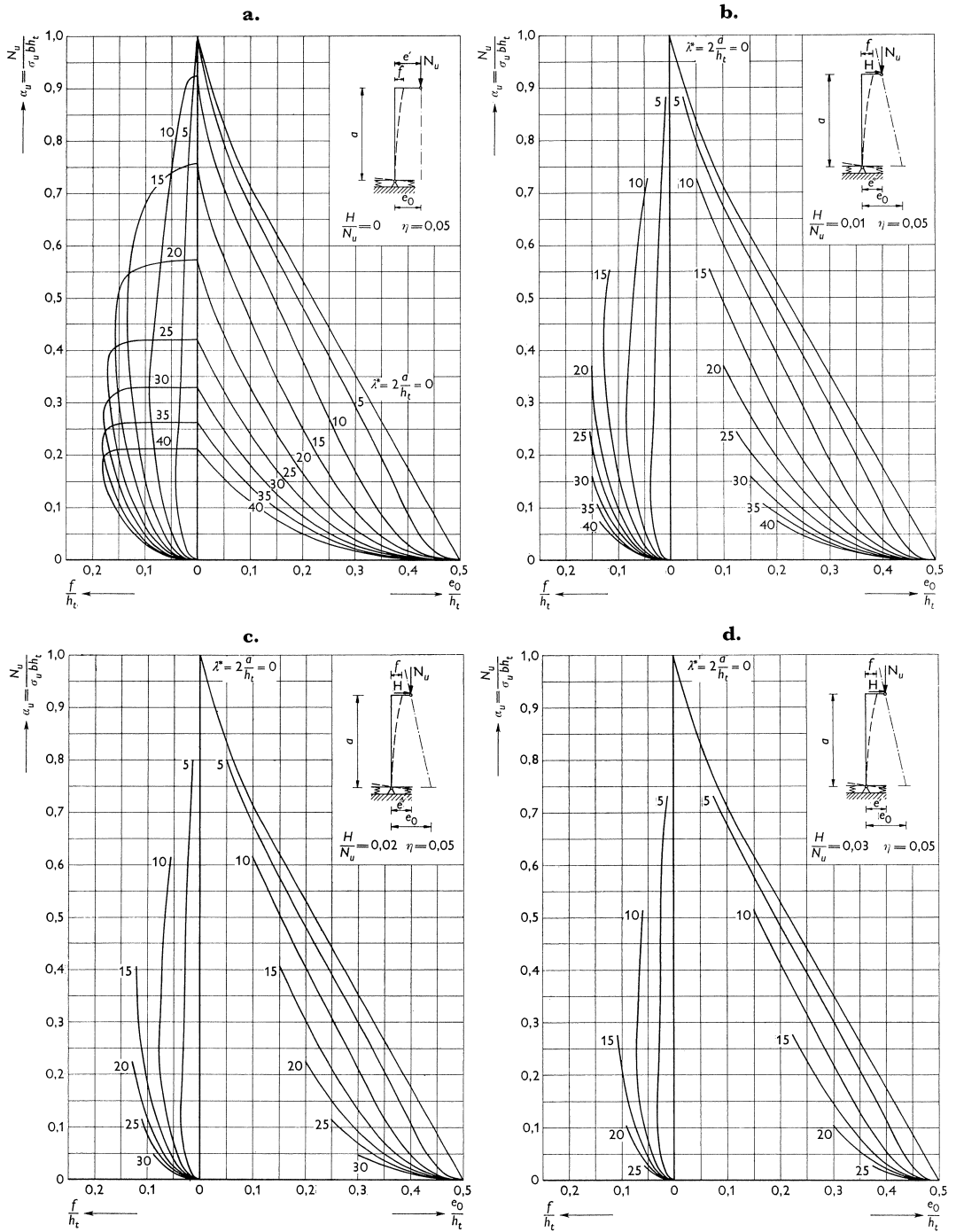


Fig. 23. Verloop van de bezwijkbelasting  $\alpha_u$  als functie van  $e_0/h_t$  voor een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstuk van  $3,5\%$ .



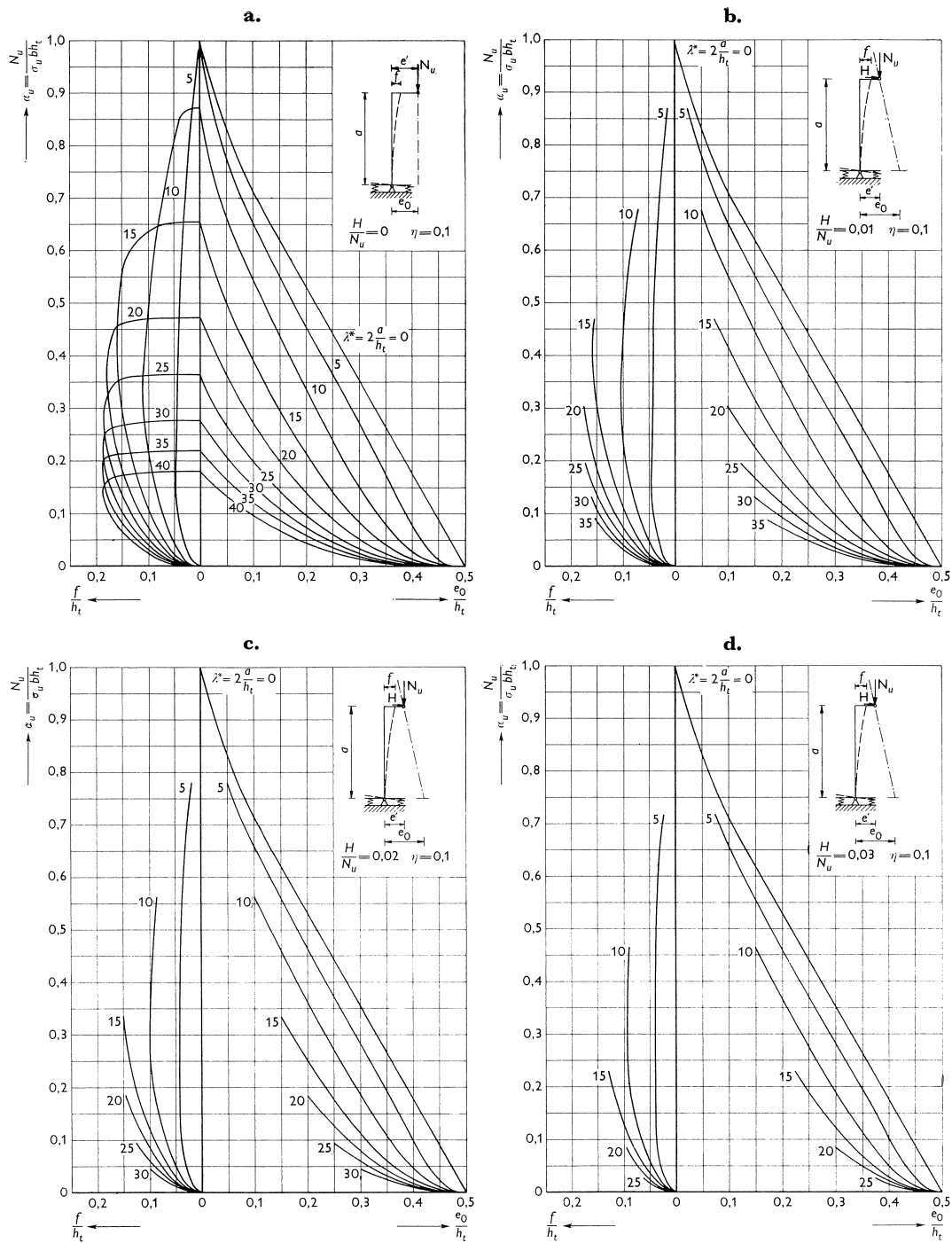


Fig. 24. Verloop van de bezwijkbelasting  $\alpha_u$  als functie van  $e_0/h_t$  voor een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstuik van  $3,5^0/00$ .

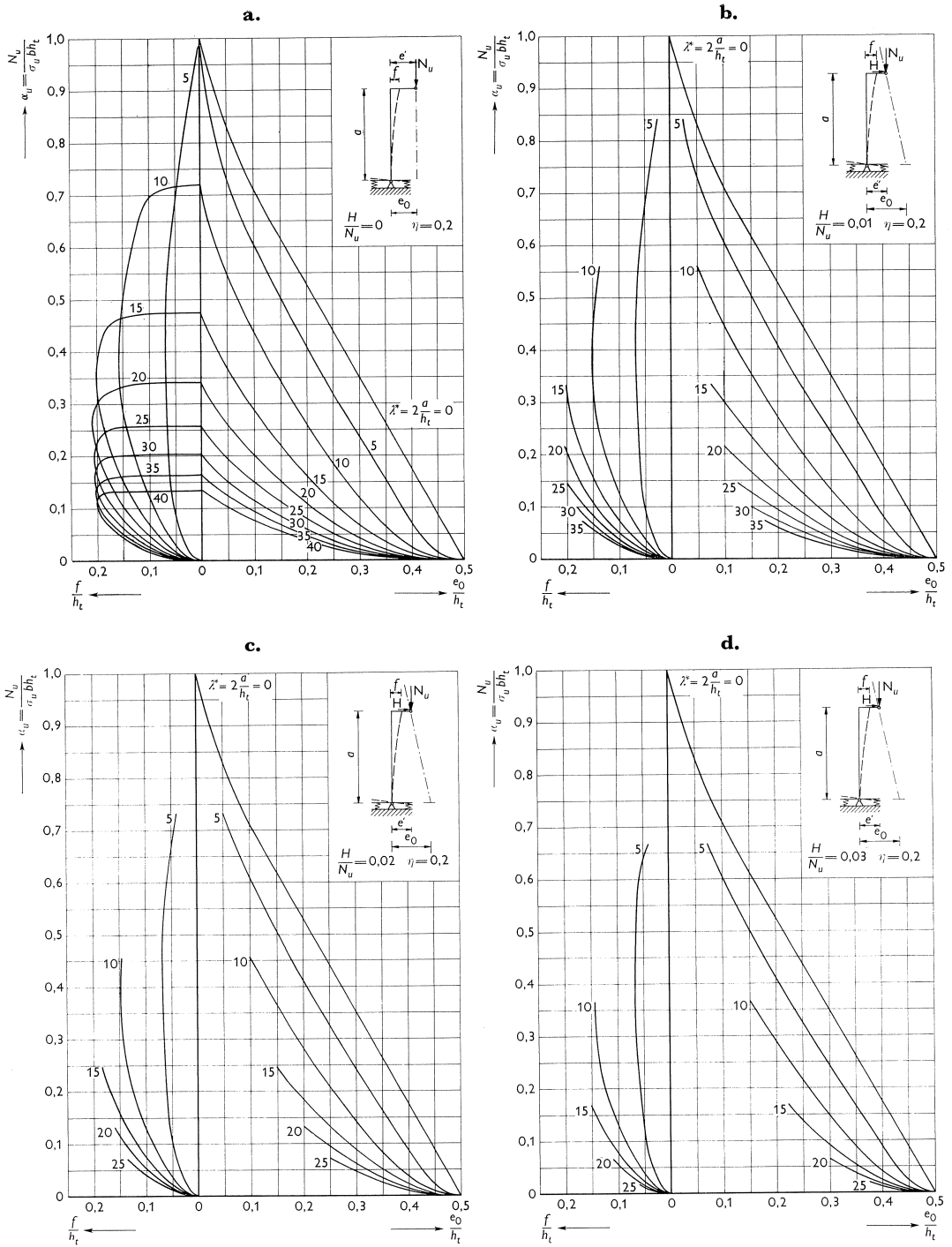


Fig. 25. Verloop van de bezwijkbelasting  $\alpha_u$  als functie van  $e_0/h_t$  voor een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstuik van  $3,5\%$ .

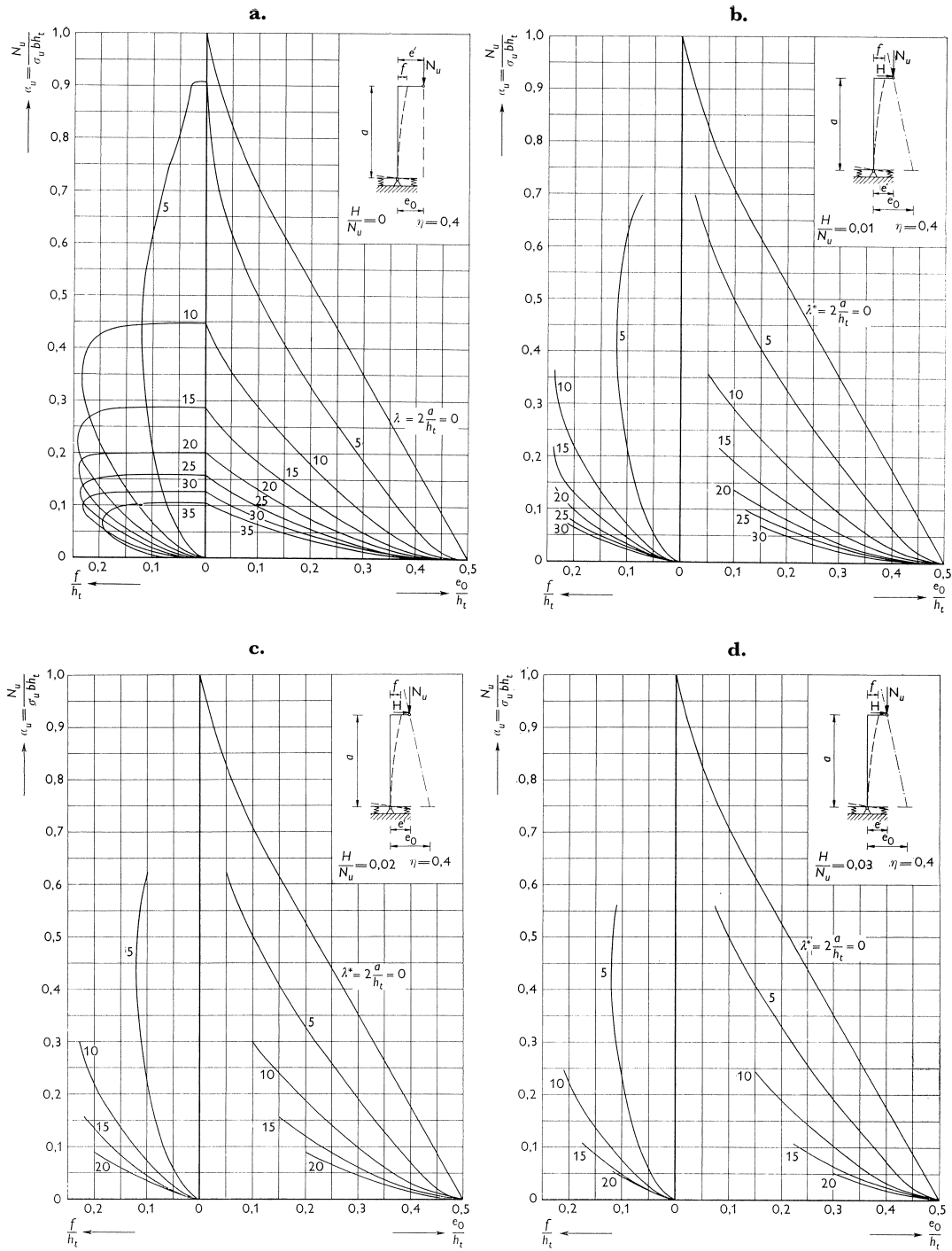


Fig. 26. Verloop van de bezwijkbelasting  $\alpha_u$  als functie van  $e_0/h_t$  voor een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstuik van  $3,5^0/00$ .

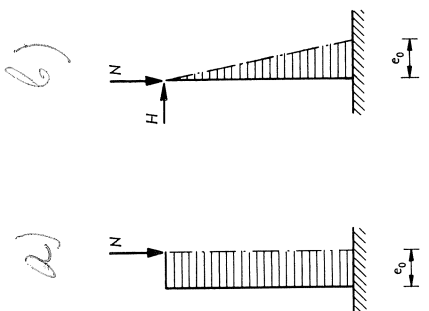


Fig. 28. Twee mogelijkheden, waarop de beginexcentriciteit  $e_0/h_t$  kan worden opgebouwd.

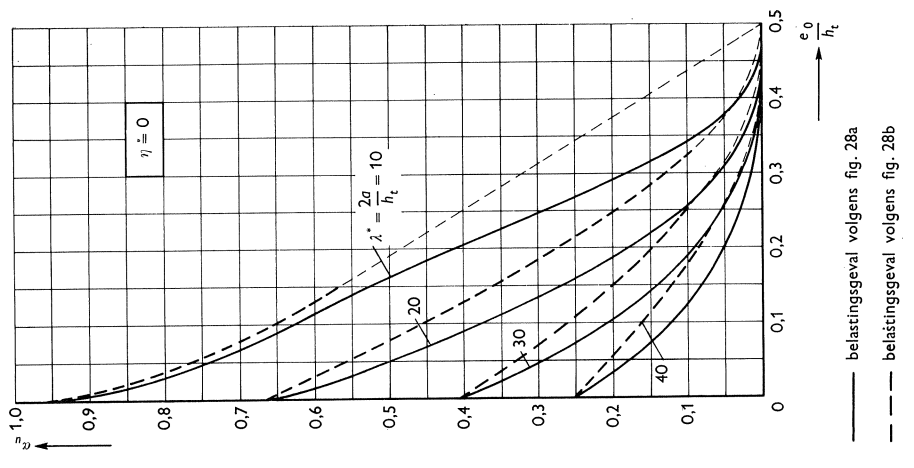
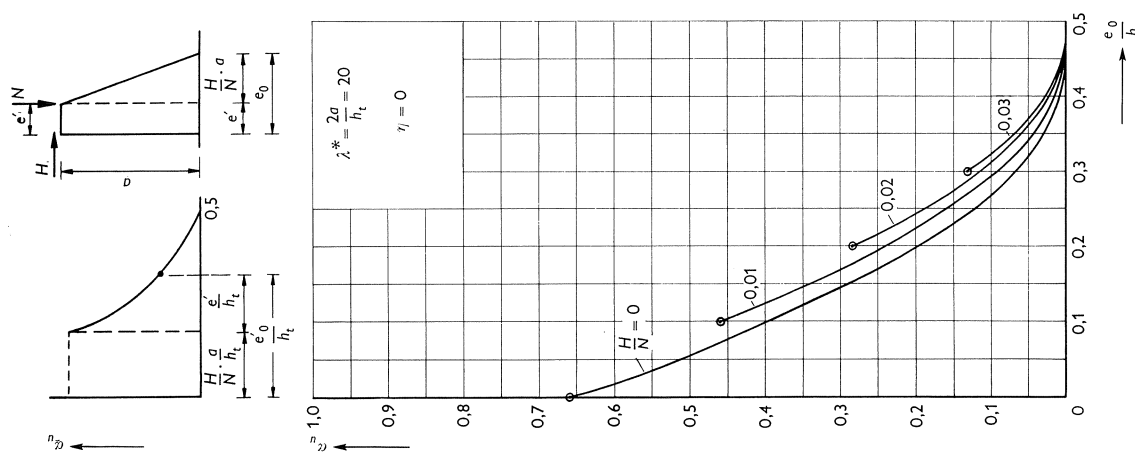


Fig. 29. Verloop van  $\alpha_0$  als functie van  $e_0/h_t$  voor de beide in fig. 28 gegeven belastingsevalen, uitgaande van het parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstrijk van  $3,5^0/100$ .

Fig. 27. Verloop van de bezwijkbelasting  $\alpha_0$  als functie van  $e_0/h_t$  voor verschillende waarden van  $H/N$ , uitgaande van een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstrijk van  $3,5^0/100$ .

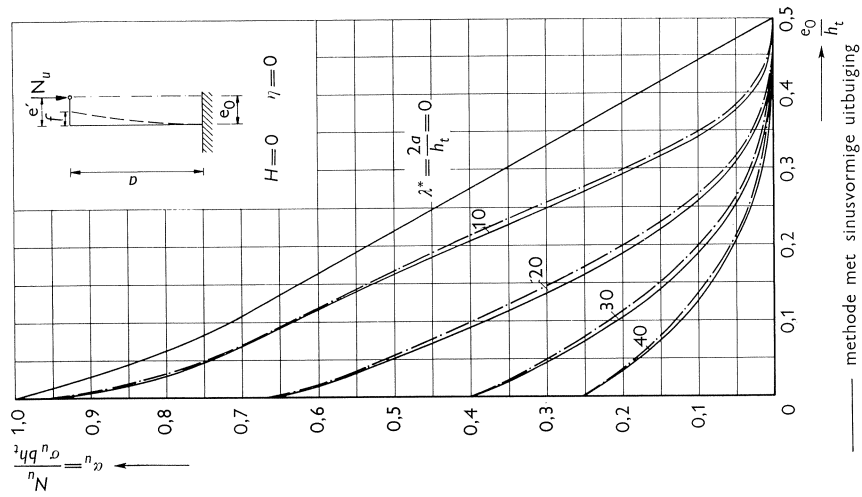


Fig. 32. Vergelijking tussen de berekeningsresultaten verkregen met de methode waarbij de uitbuiging sinusvormig wordt verondersteld, en die verkregen met de differentiemethode.

In beide gevallen is gerekend met een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram, waarbij voor de breukstuijk  $3,5^{0/100}$  is aangenomen.

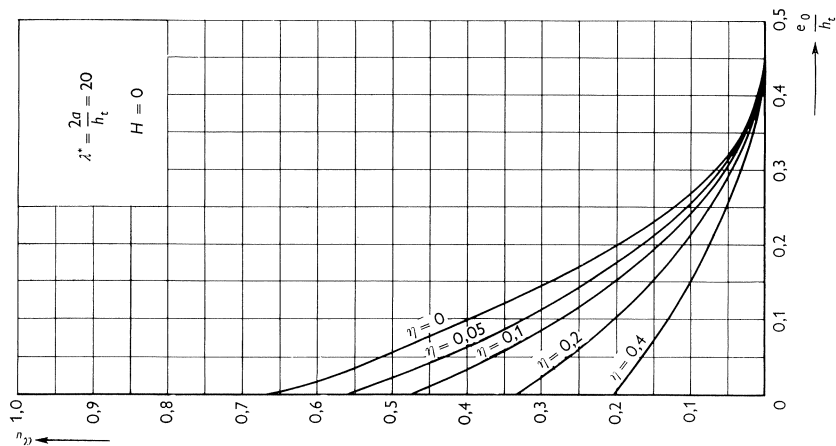


Fig. 31. Invloed van de mate van inklemming  $\eta$ , uitgaande van een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstuijk van  $3,5^{0/100}$ .

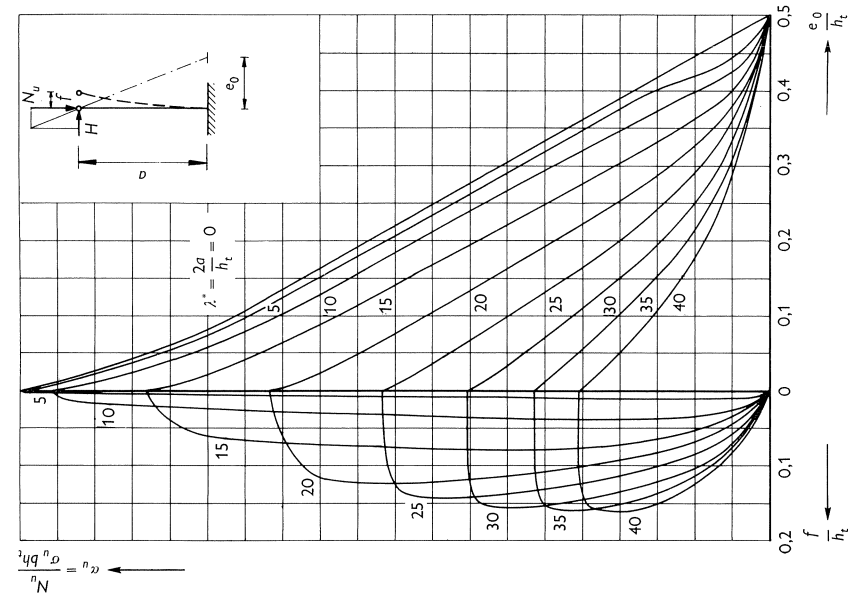


Fig. 30. Verloop van  $\alpha_u$  als functie van  $e_0/h_t$  voor  $e'/h_t = 0$ , voor een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstuijk van  $3,5^{0/100}$ .

## 6 Differentiemethode, toegepast op kolommen met verschillend kop- en voetsmoment

### 6.1 Algemene opzet

Ook de belastingsgevallen aangegeven in de figuren 2 en 3 kunnen met de differentiemethode worden opgelost. De kolomlengte  $l$  is hiertoe in 20 gelijke moten  $\Delta x$  verdeeld (zie fig. 33). Op grond van de in paragraaf 5.3 beschreven berekeningen met verschillende aantallen moten mag worden verwacht dat met 20 moten een voldoende hoge graad van nauwkeurigheid wordt bereikt. Het probleem wordt nu als volgt benaderd:

1. gegeven is  $\alpha$  en de excentriciteit aan de onderzijde  $e_{\text{ond}} = \beta_0 h_t$ ;
2. bepaal met het  $\beta$ - $N$ - $\kappa$ -diagram de kromming  $\kappa_0$  in de onderste doorsnede;
3. kies in de volgende doorsnede een waarde voor  $\kappa_1$ ;

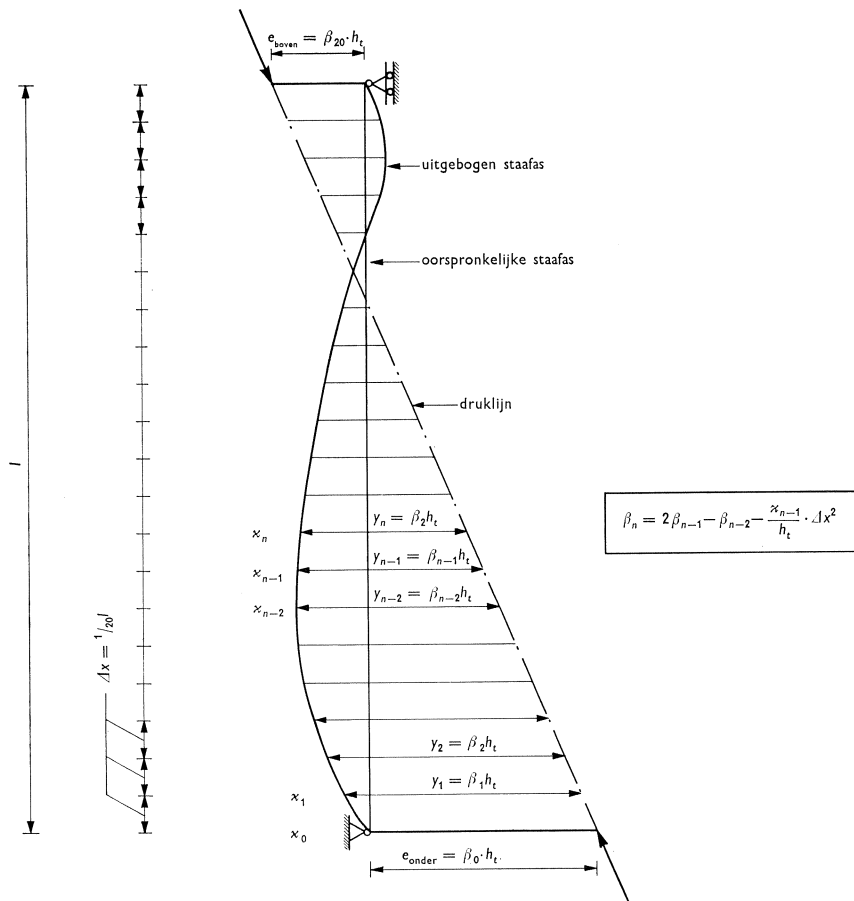


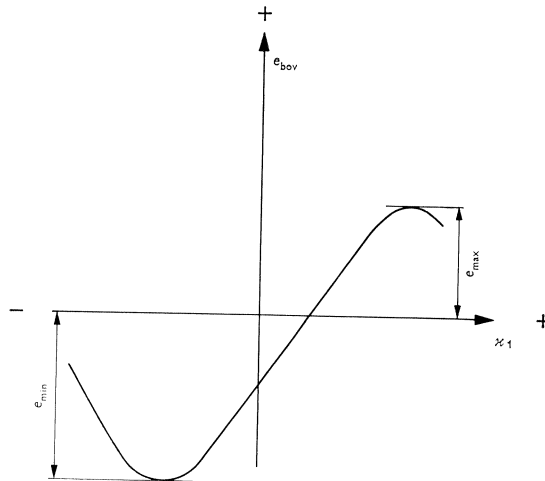
Fig. 33. Schema van een kolom met verschillende excentriciteiten aan boven- en onderzijde.

Fig. 34. Schematisch verband tussen  $\varkappa_1$  en  $e_{\text{bov}}$  bij gegeven  $e_{\text{ond}}$ .

4. met het  $\beta$ - $N$ - $\varkappa$ -diagram kan  $\beta_1$  worden gevonden;
5. bereken  $\beta_2$  met verg. (21);
6. met het  $\beta$ - $N$ - $\varkappa$ -diagram kan  $\varkappa_2$  worden bepaald;
7. bereken  $\beta_3$  met verg. (21).

Deze berekeningsgang wordt voortgezet totdat  $e_{\text{bov}} = \beta_{20} h_t$  is bepaald. Vervolgens wordt het proces herhaald voor andere aangenomen  $\varkappa_1$ -waarden.

De verschillende oplossingen, die alle uit het oogpunt van evenwicht mogelijk zijn, kunnen nu in een grafiek worden uitgezet. Deze grafiek vertoont een aantal golven. Er zijn zowel in positieve als in negatieve zin een aantal extreme waarden aan te wijzen. Elk van deze 'toppen' vertegenwoordigt een evenwichtstoestand, waarbij bezwijken door instabiliteit kan optreden. Wordt voor elke oplossing de uitbuigingsvorm beschouwd, dan is direct te zien, dat slechts twee extreme waarden reëel zijn. Een voorbeeld van genoemde grafiek in het reële gebied is gegeven in fig. 34.



## 6.2 Uitgewerkte voorbeelden

In de figuren 35a...d zijn voor enige slankheden  $\lambda^* = l/h_t = 10, 20, 30$  en  $40$  de 'hoogtelijnen' voor  $\alpha_u$  gegeven bij verschillende combinaties van  $e_{\text{bov}}$  en  $e_{\text{ond}}$ . De figuren zijn a.h.w. overcompleet; op grond van symmetrie-overwegingen had volstaan kunnen worden met het geven van slechts een vierde gedeelte (zie het gearceerde gedeelte in fig. 36). Duidelijkheidshalve zijn echter de volledige figuren gegeven. In fig. 36 is tevens aangegeven welke belastingsgevallen en uitbuigingsvormen in de kwadranten I...IV optreden. Wanneer  $e_{\text{ond}}$  gelijk is aan  $e_{\text{bov}}$ , dan ontstaat het belastingsgeval met constante begin-excentriciteit. In de figuren liggen de  $\alpha$ -waarden dan op een lijn onder  $45^\circ$  door kwadrant I en III. De resultaten corresponderen met de waarden van fig. 22a. Wanneer  $e_{\text{ond}}$  en  $e_{\text{bov}}$  onderling gelijk zijn, maar tegengesteld van teken, liggen de  $\alpha$ -waarden op een lijn onder  $135^\circ$  door de kwadranten II en IV.

Hierbij dient te worden opgemerkt, dat in de berekening is gebleken dat in sommige gevallen, waarbij  $e_{\text{ond}}$  precies gelijk is aan  $-e_{\text{bov}}$ , een waarde voor  $\alpha_u$  kan worden gevonden, die veel hoger ligt dan de waarde voor  $\alpha_u$ , die zou volgen wanneer  $e_{\text{ond}}$  slechts een fractie zou verschillen met  $-e_{\text{bov}}$ . Zelfs blijken waarden te kunnen optreden hoger dan de knikbelasting behorende bij een centrisch belaste kolom met een slankheid  $\lambda^* = l/h_t$ .

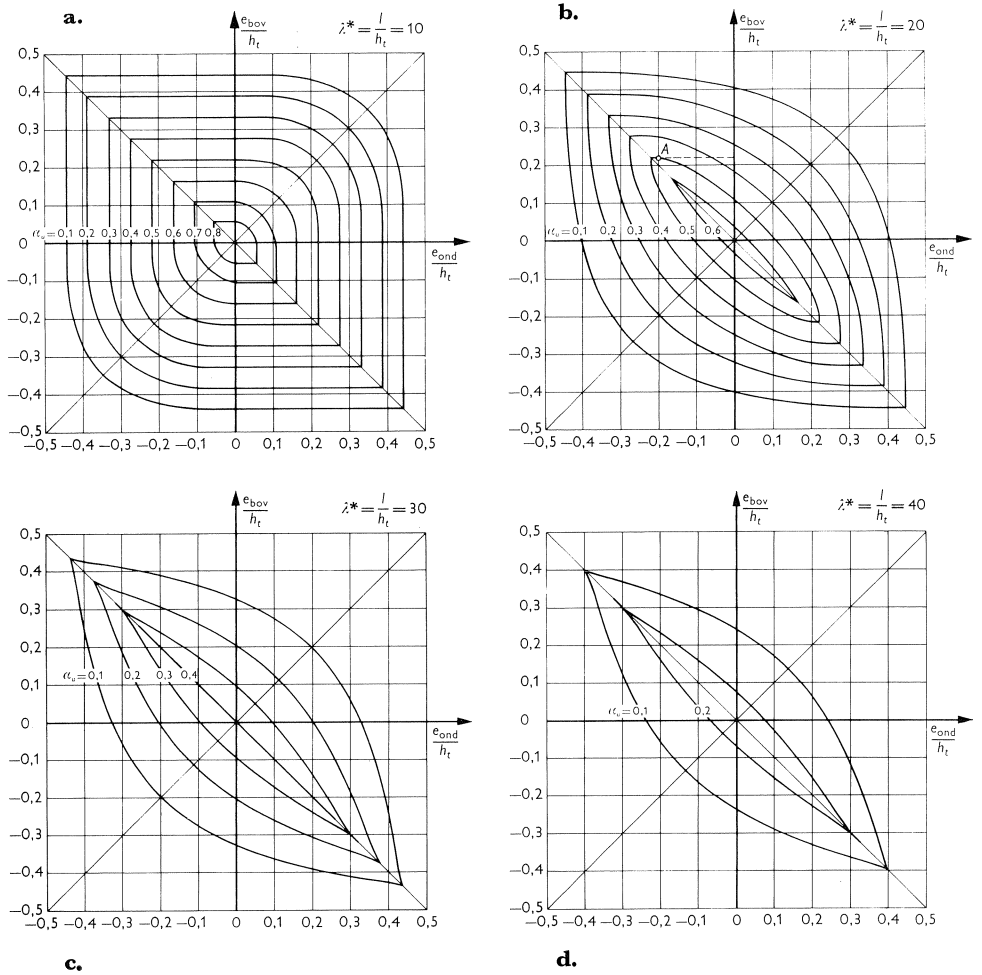


Fig. 35a . . . d. Verloop van de bezwijkbelasting  $\alpha_u$  als functie van de excentriciteiten aan boven- en ondereinde, uitgaande van een parabolisch  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram met een breukstuik van  $3,5\%$ .

Dit laatste kan als volgt worden ingezien. Wanneer men over de diagonaal in het 1e kwadrant ( $e_{\text{ond}} = e_{\text{bov}}$ ) naar de oorsprong van de grafiek gaat, dus wanneer men de over de hoogte van de kolom aanwezige constante begin-excentriciteit laat afnemen, dan loopt  $\alpha_u$  op tot de waarde, die behoort bij de centrisch belaste kolom met de slankheid  $\lambda^* = l/h_t$ . Zou men over de andere diagonaal naar de oorsprong gaan, zodat  $e_{\text{bov}} = -e_{\text{ond}}$ , dan blijft de kolom een s-vormige uitbuigingslijn houden. Ter plaatse van de oorsprong wordt een waarde voor  $\alpha_u$  gevonden, die behoort bij een slankheid  $\lambda^*/2$ . Deze waarde ligt uiteraard hoger dan de eerste, en kan slechts in theorie gehandhaafd



blijven. Een oneindig kleine kracht is voldoende om deze knikvorm te doen veranderen, zó dat in de uitbuigingslijn slechts één golf optreedt. Aan oplossingen voor  $\alpha_u$  die alleen gelden voor het geval dat  $e_{\text{ond}}$  precies gelijk is aan  $-e_{\text{bov}}$  kan uiteraard geen praktische betekenis worden toegekend.

Bij kleine slankheden lopen de 'hoogtelijnen' voor  $\alpha_u$  soms evenwijdig aan de  $e$ -assen. Dit is hoofdzakelijk het geval in de kwadranten II en IV. De grootte van  $e_{\text{bov}}$  is daar dus onafhankelijk van  $e_{\text{ond}}$  en omgekeerd. Dit feit wordt veroorzaakt doordat het bezwijken van de kolom wordt ingeleid door het bereiken van de breukstuik ter plaatse van het kolomeinde waar de grootste excentriciteit aanwezig is.

Uit symmetrie-overwegingen volgt verder, dat voor een kolom waarbij  $e_{\text{bov}}$  een gegeven waarde heeft en  $e_{\text{ond}} = 0$ , dezelfde bezwijkbelasting geldt als voor een  $2 \times$  zo lange kolom van hetzelfde profiel, waarbij  $e_{\text{ond}}$  precies gelijk is aan  $-e_{\text{bov}}$  (zie fig. 37).

In de fig. 38a...d zijn tenslotte de hoekverdraaiingen aan de kolomeinden gegeven. De figuren gelden voor de combinaties van  $e_{\text{ond}}/h_t$  en  $e_{\text{bov}}/h_t$ , gelegen in het door een arcering aangegeven gedeelte van fig. 36. Aan de hand van een voorbeeld zal worden getoond, hoe met fig. 38a...d kan worden gewerkt.

Gegeven:  $\lambda^* = l/h_t = 20$

$$\frac{e_{\text{bov}}}{h_t} = +0,215; \quad \frac{e_{\text{ond}}}{h_t} = -0,2$$

Gevraagd: de hoekverdraaiingen aan de einden.

Uit fig. 35b volgt de bezwijkbelasting:

$$\alpha_u = \frac{N_u}{\sigma_u b h_t} = 0,5 \quad (\text{punt A})$$

Als ingang tot fig. 38b worden gebruikt de parameters  $e_{\text{ond}}/h_t$  en  $\alpha_u$ . Gevonden wordt:

$$\varphi_{\text{ond}} = -0,010 \quad (\text{punt B})$$

$$\varphi_{\text{bov}} = +0,019 \quad (\text{punt C})$$

De tekenafspraak is in de figuur aangegeven.

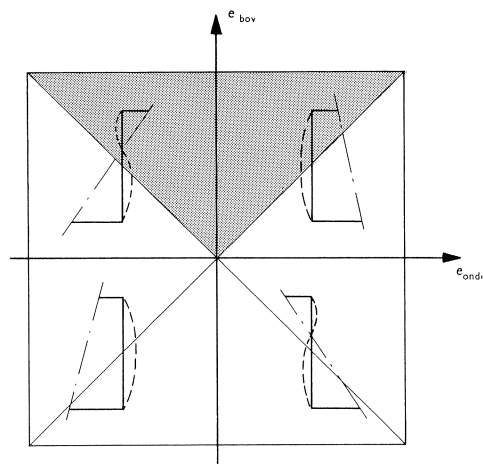


Fig. 36. Het gebied uit fig. 35 waarmee in principe kan worden volstaan.

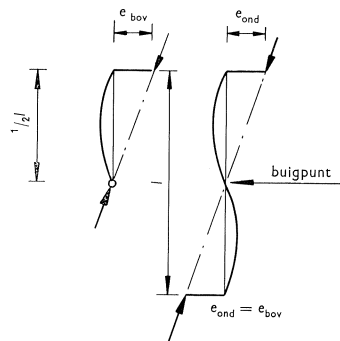
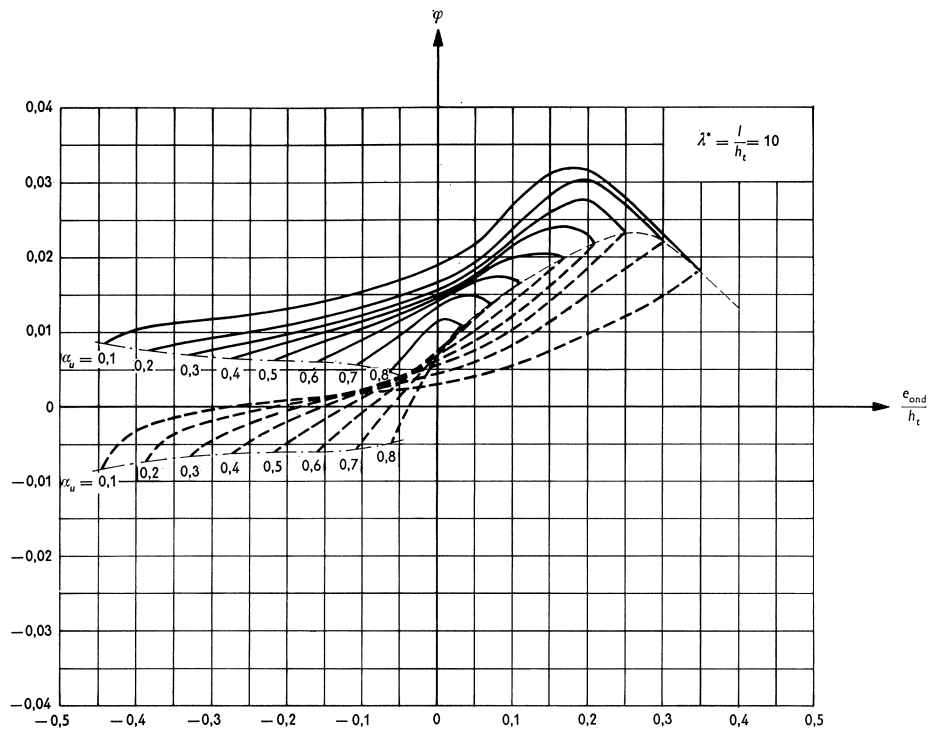
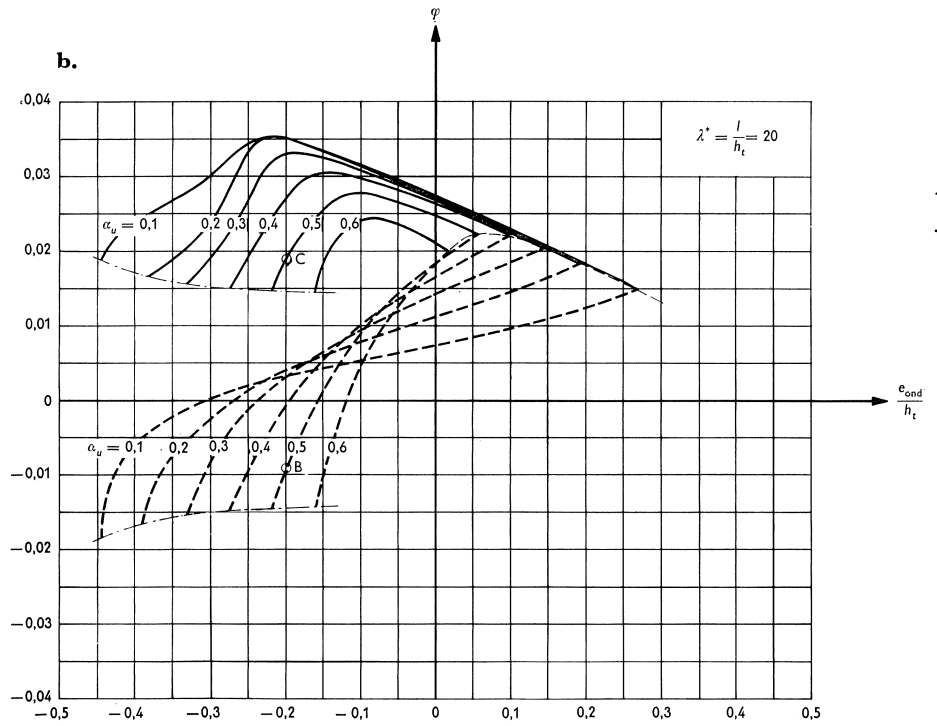


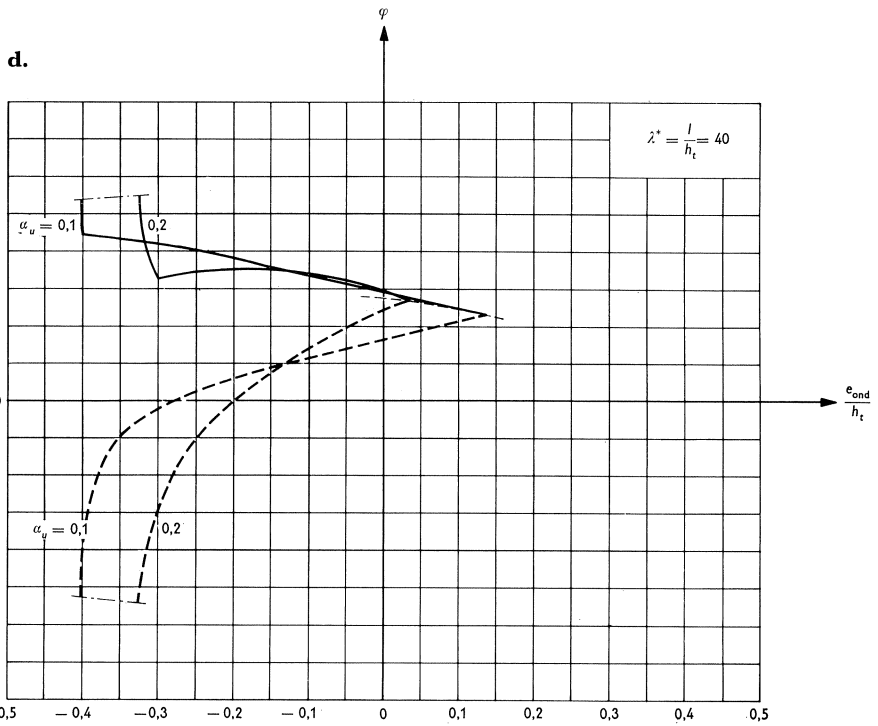
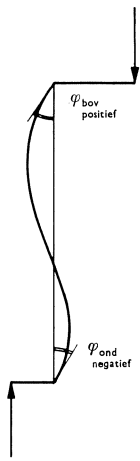
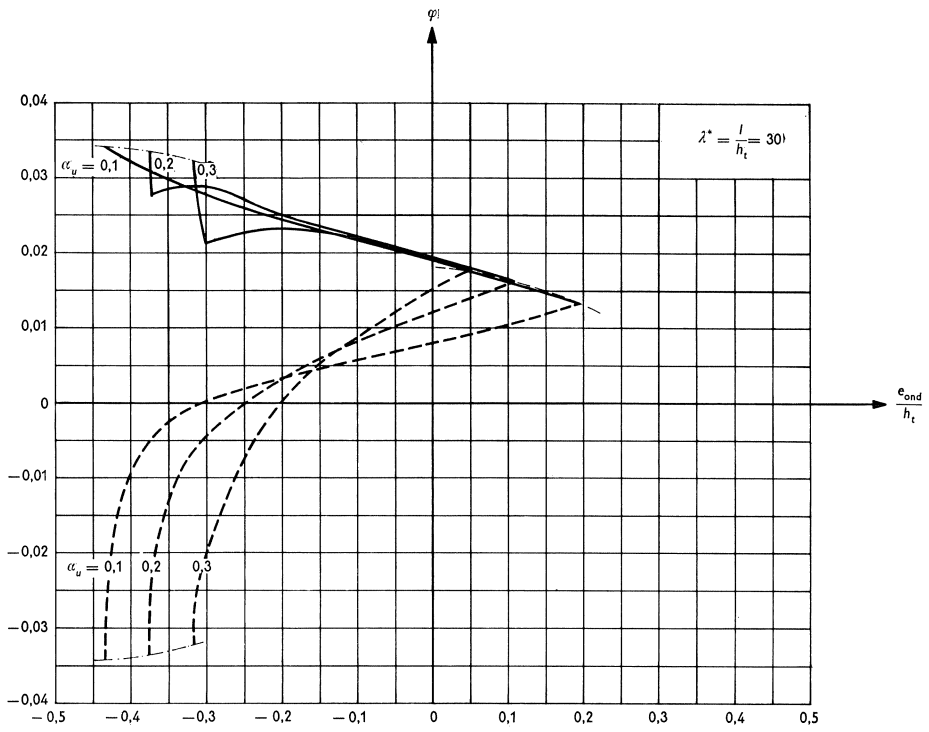
Fig. 37.



a.



b.



.....  $\varphi_{\text{ond}} = -\varphi_{\text{bov}}$   
 - - - - -  $\varphi_{\text{ond}} = \varphi_{\text{bov}}$

Fig. 38 Verband tussen  $e_{\text{ond}}$  en de hoekverdraaiingen aan de kolomeinden; de berekening is uitgevoerd met een parabolisch  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram, waarbij  $\varepsilon_u = 3,5\text{‰}$ .

## 7 Invloed van de breukstuik

De in de vorige hoofdstukken gegeven grafieken gelden voor een bepaalde waarde van de breukstuik. Het is echter mogelijk de grafieken door transformatie ook te gebruiken voor andere waarden van de breukstuik.

Als wordt uitgegaan van een sinusvormige uitbuiging wordt het probleem beheerst door de verg. (1), (2), (4) en (6). De doorsnede-vergelijkingen (1) en (2) (zie fig. 5) kunnen in zodanige vorm worden gebracht, dat  $\varepsilon_u$  alleen voorkomt in de quotiënten  $\varepsilon_1/\varepsilon_u$  en  $\varepsilon_2/\varepsilon_u$ . Verg. (4) blijft onveranderd, terwijl verg. (6) geschreven kan worden als:

$$\beta(\pi\vartheta)^2 = \lambda^{*2} \varepsilon_u \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_u} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_u} \right)$$

Aan de 4 vergelijkingen verandert dus niets als het produkt  $\lambda^{*2} \varepsilon_u$  constant wordt gehouden.

Hetzelfde geldt ook als de differentiemethode wordt toegepast. Bij deze methode wordt het probleem beheerst door het  $\beta$ - $N$ - $\kappa$ -diagram en de differentievergelijkingen (21) en (22). Het  $\beta$ - $N$ - $\kappa$ -diagram is in feite niets anders dan een grafische weergave van de vergelijkingen (1) en (2). Verg. (21) kan ook geschreven worden in de vorm:

$$\beta_n = 2\beta_{n-1} - \beta_{n-2} - \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_u} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_u}}{h_i^2} (\Delta x)^2 \cdot \varepsilon_u \dots \dots \dots (27)$$

Deze vergelijking heeft geen invloed op het berekeningsresultaat als het produkt  $(\Delta x)^2 \cdot \varepsilon_u$  ongewijzigd blijft. Bij een gelijkblijvend aantal moten  $\Delta x$  geldt ook hier dat het produkt  $\beta^2 \varepsilon_u$  (c.q.  $\lambda^{*2} \varepsilon_u$ ) ongewijzigd moet blijven om dezelfde waarden voor  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon_1/\varepsilon_u$  en  $\varepsilon_2/\varepsilon_u$  te verkrijgen.

Uit de vergelijkingen (22) en (23) volgt:

$$\beta_1 = \beta_0 - \frac{1}{2} \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_u} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_u}}{h_i^2} (\Delta x)^2 \cdot \varepsilon_u - \left( \frac{H}{N} + \eta\alpha\beta_0 \right) \cdot \frac{\Delta x}{h_i} \dots \dots \dots (28)$$

Om de berekeningsresultaten niet te beïnvloeden, zullen zoals uit vergelijking (28) blijkt, de produkten  $(H/N) \cdot \Delta x$  en  $\eta \cdot \Delta x$  ongewijzigd moeten blijven, m.a.w.  $(H/N)\lambda^*$  en  $\eta\lambda^*$  mogen niet veranderen.

Uit het bovenstaande blijkt, dat als de breukstuik  $\varepsilon_u$  wordt gewijzigd in  $\bar{\varepsilon}_u$ , de oorspronkelijke  $\lambda^*$  moet worden veranderd in een 'nieuwe'  $\bar{\lambda}^*$  volgens de formule:

$$\lambda^{*2} \cdot \varepsilon_u = \bar{\lambda}^{*2} \cdot \bar{\varepsilon}_u$$

of:

$$\bar{\lambda}^* = \lambda^* \sqrt{\frac{\varepsilon_u}{\bar{\varepsilon}_u}} \dots \dots \dots (29)$$

De horizontale kracht  $H$  en de constante  $\eta$  wijzigen volgens de formules

$$\bar{H} = H \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_u}{\varepsilon_u}} \dots \dots \dots (30)$$

$$\bar{\eta} = \eta \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_u}{\varepsilon_u}} \dots \dots \dots (31)$$

De waarden van  $\beta$  (en daarmee  $f/h_t$ ),  $\varepsilon_1/\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_2/\varepsilon_u$  en dus  $\varkappa/\varepsilon_u$  blijven – zoals vermeld – in de berekening ongewijzigd, zodat geldt:

$$\frac{\bar{\varepsilon}_1}{\bar{\varepsilon}_u} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_u} \quad \text{of} \quad \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \cdot \frac{\bar{\varepsilon}_u}{\varepsilon_u} \dots \dots \dots (32)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 \cdot \frac{\bar{\varepsilon}_u}{\varepsilon_u} \dots \dots \dots (33)$$

$$\bar{\varkappa} = \varkappa \cdot \frac{\bar{\varepsilon}_u}{\varepsilon_u} \dots \dots \dots (34)$$

Aan de hand van een voorbeeld zal de werkwijze worden verduidelijkt.

Gegeven is: het  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram is parabolisch waarbij  $\varepsilon_u = 20/00$ ;  $\lambda^* = 26,4$ ;

$$\frac{H}{N} = 0,0076; \quad \eta = 0; \quad \frac{e_0}{h_t} = 0,19.$$

Gevraagd wordt de bezwijkbelasting  $\alpha_u$  te bepalen, alsmede de vervormings-toestand in de maatgevende doorsnede.

Voor een parabolisch  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram met een breukstuik van  $3,5/00$  zijn de berekeningsresultaten bekend (fig. 20 ... 26). Daarom zal worden getransformeerd naar  $\bar{\varepsilon}_u = 3,5/00$ . De ‘nieuwe’ dus getransformeerde grootheden worden weer van een streep voorzien. Uit de verg. (29), (30) en (31) volgt resp.:

$$\bar{\lambda}^* = \lambda^* \sqrt{\frac{\varepsilon_u}{\bar{\varepsilon}_u}} = 26,4 \times \sqrt{\frac{2}{3,5}} = 20$$

$$\frac{\bar{H}}{N} = \frac{H}{N} \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_u}{\varepsilon_u}} = 0,0076 \sqrt{\frac{3,5}{2}} = 0,01$$

$$\bar{\eta} = \eta \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_u}{\varepsilon_u}} = 0 \quad \times \sqrt{\frac{3,5}{2}} = 0$$

Nu deze gegevens zijn bepaald, kan uit fig. 22b de bezwijkbelasting en de grootte van de uitbuiging worden afgelezen.

Gevonden wordt:

$$\alpha_u = 0,26$$

en

$$f/h_t = 0,11$$

De totale uitbuiging bedraagt  $\beta = y_m/h_t = e_0/h_t + f/h_t = 0,19 + 0,11 = 0,30$ .  
 Uit het  $\beta$ - $N$ - $x$  diagram (fig. 21) volgt dan:

$$\bar{\varepsilon}_1 = -1,50^0/00 \text{ en } \bar{\varepsilon}_2 = +1,98^0/00$$

Deze waarden behoren bij  $\bar{\varepsilon}_u = 3,5^0/00$ ; de gezochte waarden zijn volgens verg. (32) en (33):

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \times \frac{2}{3,5} = -0,86^0/00$$

$$\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2 \times \frac{2}{3,5} = +1,13^0/00$$

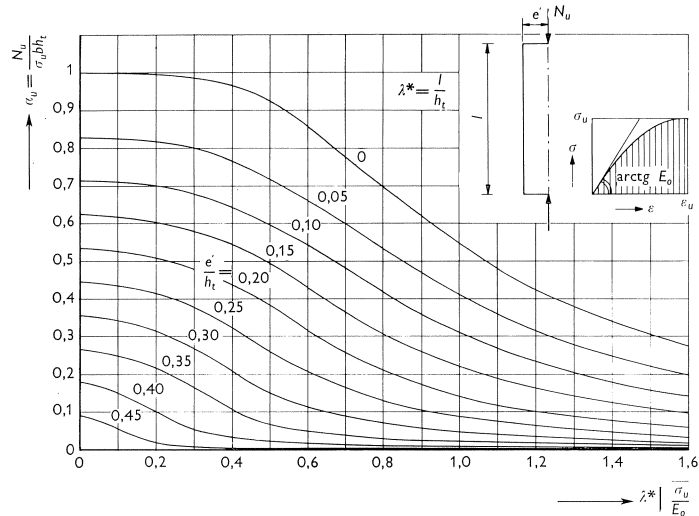


Fig. 39. Grafiek, waarmee de bezwijkbelasting van kolommen, belast met een constante beginexcentriciteit, kan worden bepaald voor verschillende slankheden; de grafiek geldt voor een parabolisch  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram, waarbij voor de breukstuik c.q. elasticiteitsmodulus in de oorsprong een willekeurige waarde kan worden aangenomen.

De mogelijkheid tot transformatie impliceert, dat voor een gegeven vorm van het  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram grafieken kunnen worden samengesteld, die onafhankelijk zijn van de breukstuik  $\varepsilon_u$  c.q. de elasticiteitsmodulus  $E_0$  in de oorsprong. Voor een parabolisch  $\sigma$ - $\varepsilon$ -diagram is voor het bijzondere geval  $\eta = 0$  en  $H/N = 0$  een dergelijke grafiek in fig. 39 weergegeven.

## 8 Slotbeschouwingen

De methode met de sinusvormige uitbuigingslijn bleek voor het belastingsgeval met constante beginexcentriciteit resultaten te leveren, die weinig afwijken van die, verkregen met de meer exacte differentiemethode. De rekentijd van eerstgenoemde methode is echter aanzienlijk korter. In beginsel is het mogelijk de methode met de sinusvormige uitbuigingslijn ook te gebruiken voor

die belastingsgevallen waarbij aan boven- en ondereinde verschillende excentriciteiten aanwezig zijn [1]; de berekening wordt dan echter veel gecompliceerder en het voordeel ten opzichte van de differentiemethode vermindert sterk. Aan de differentiemethode is de voorkeur gegeven omdat deze meer mogelijkheden tot uitbreiding biedt; bovendien is de differentiemethode nauwkeuriger.

De in dit artikel gevolgde rekenwijze is in wezen voor ieder materiaal en voor iedere doorsnede vorm te gebruiken. Wanneer de betreffende basisgegevens beschikbaar zijn, zoals het  $M-N-\kappa$ -diagram (c.q.  $\beta-N-\kappa$ -diagram) van een kolomdoorsnede en het  $M-\varphi$ -diagram voor de verende inklemming, dan is het probleem geheel volgens de gegeven methode op te lossen.

## 9 Conclusies

1. Het bezwijken van een kolom kan – rekening houdend met de uitbuiging – worden veroorzaakt, doordat in de maatgevende doorsnede de breukstuik wordt bereikt (vooral bij korte gedrongen kolommen), of doordat instabiliteit intreedt voordat de breukstuik optreedt (vooral bij slanke kolommen). Zonder berekening is in veel gevallen niet te voorspellen welke van de beide bezwijkcriteria zal gelden.
2. Bij een kolom met constante beginexcentriciteit blijkt de bezwijkbelasting afhankelijk te zijn van:
  - a. het al dan niet gescheurd zijn;
  - b. de vorm van het  $\sigma-\varepsilon$ -diagram;
  - c. de grootte van de breukstuik c.q. elasticiteitsmodulus in de oorsprong. De mate waarin deze factoren de bezwijkbelasting beïnvloeden is af te leiden uit de figuren 9, 10 en 16A...E. Het blijkt dat voor verschillende slankheidsgraden en beginexcentriciteiten de genoemde invloeden een sterk wisselend effect op de bezwijkbelasting uitoefenen. Volgens fig. 16A...E vormt het parabolische  $\sigma-\varepsilon$ -diagram van alle beschouwde diagrammen in het gebied van de grotere slankheden – dus wanneer bezwijken wordt ingeleid door instabiliteit – het veiligste uitgangspunt.
3. Uitgaande van een parabolisch  $\sigma-\varepsilon$ -diagram zijn met de differentiemethode onderzocht:
  - a. eenzijdig verend ingeklemde kolommen, waarop aan het vrije uiteinde een verticale kracht, een moment en een horizontale kracht werken;
  - b. aan beide einden scharnierende kolommen, waarop behalve de normaalkracht aan beide einden een moment werkt.

ad a

De mate van inklemming (veerconstante) heeft grote invloed op de bezwijkbelasting (zie fig. 22 . . . 26 en fig. 31). Bij een gegeven moment in de maatgevende doorsnede (inklemming) neemt de bezwijkbelasting toe naarmate het aandeel van de horizontale kracht in dit moment groter wordt (zie fig. 29).

ad b

De invloed op de bezwijkbelasting van de slankheid en de excentriciteiten aan de beide kolomeinden is weergegeven in fig. 35a . . . d. Bij kleine slankheden blijkt de bezwijkbelasting bij excentriciteiten van verschillend teken soms alleen afhankelijk te zijn van de in absolute zin kleinste excentriciteit; dit wordt veroorzaakt door het feit dat bij het uiteinde waar de grootste excentriciteit aanwezig is, de breukstuik wordt bereikt.

4. Bij een kolom met constante beginexcentriciteit blijkt de onderstelling, dat de uitbuigingslijn sinusvormig is een veilig uitgangspunt (zie fig. 32).
5. De resultaten, die zijn weergegeven voor een gekozen waarde van  $\varepsilon_u = 3,50/00$ , kunnen door gebruik te maken van een eenvoudige transformatie ook worden toegepast voor elke andere waarde van de breukstuik.

### Literatuur

1. VAN LEEUWEN, ir. J. en A. C. VAN RIEL, Berekening van centrisch en excentrisch gedrukte constructiedelen volgens de breukmethode. *Heron 10* (1962) no. 3/4.
2. Praktische Richtlijnen CEB, uitgave van de Betonvereniging, Den Haag, mei 1966.
3. GALAMBOS, T. V. and R. L. KETTER, Columns under combined bending and thrust. Proceedings of the A.S.C.E., Engineering Mechanics Division Vol. 85, No. EM 2, April 1959, pp. 1–30.
4. WESTERGAARD, H. M. and W. R. OSGOOD, Strength of steel columns. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. Part I. Vol. 49–55, No. APM 50–59, 1928.
5. CHWALLA, E., Theorie des aussermittig gedruckten Stabes aus Baustahl. *Stahlbau*, Vol. 7. 1934, pp. 161–165, 173–176, 180–184.
6. HABEL, A., Die Tragfähigkeit der ausmittig gedruckten Stahlbetonsäulen. *Beton- und Stahlbetonbau*, 48. Jahrgang, Heft 8, Aug. 1953, pp. 182–190.
7. CRANSTON, W. B., A computer method for the analysis of restrained columns. London, Cement and Concrete Association, April 1967, TRA 402.
8. IBC-mededelingen no. 1, jg. 5, jan. 1957: Het gedrag van betonconstructies onder invloed van kortstondige belastingen.
9. TIMOSHENKO, S., Theory of elastic stability. (pp. 31 e.v.). Mc Graw-Hill, New York, 1961.