

H. VAN KOTEN

SPANNINGSGOLVEN IN EEN AXIAAL AANGESTOTEN PRISMATISCHE STAAF

U.D.C. 624.058.5; 624.058.8; 624.154.3

Enige berekeningen worden uitgevoerd voor de spanningen in een geïdealiseerd model van een heipaal en een heiblok.

De met berekening en impedantiediagrammen bepaalde spanningen worden vergeleken met de resultaten van enige eenvoudige laboratoriumproeven.

Vervolgens worden de spanningen bepaald in heipalen waarbij de mutsvulling in rekening is gebracht. Hierbij wordt aangetoond, dat de theorie voor spanningsgolven tot dezelfde resultaten leidt als berekeningen voor een massa-veer-systeem.

De invloed van de vorm van paal en blok op de spanningen wordt onderzocht.

0 Inleiding

Bij het heien van palen komen enige problemen voor, welke niet eenvoudig door berekening zijn te bepalen, zoals de invloed van een verzwaarde paalpunt op de spanningsgolf in de paal of de invloed van de vorm van het blok. Om inzicht te krijgen in deze problemen zijn een aantal proeven uitgevoerd op een geïdealiseerd model.

Hierbij werden in het laboratorium twee staven horizontaal en in elkaars verlengde opgehangen (zie fig. 1).

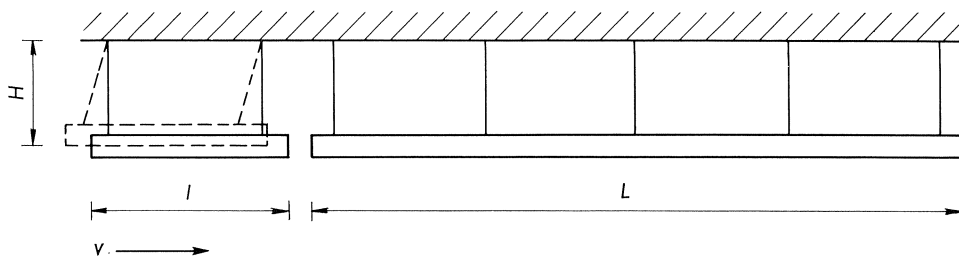


Fig. 1. Schema van de proefopstellingen.

De langste van beide staven kan worden beschouwd als de heipaal, de kortste als het heiblok.

De slag van het heiblok werd nagebootst door de korte staaf, vrijgelaten na een

hieraan gegeven amplitude-uitwijking, tegen de lange staaf te laten slingeren. De hierop ontstane beweging van de lange staaf en de spanningsgolf die zich in deze staaf voortplant werden gemeten.

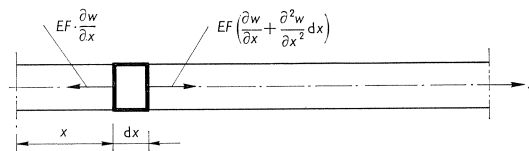
Bij dit onderzoek zijn diverse mogelijkheden nagegaan: zo werden de lengte en de diameter van de korte staaf gevarieerd, en de lange staaf werd aan één uiteinde vrijgelaten, of gesteund, of van een verzwaring voorzien.

De optredende spanningsgolven bleken goed te berekenen te zijn door gebruik te maken van de methode met karakteristieken, zoals door ir. G. DE JOSSELIN DE JONG*) beschreven in het artikel „Wat gebeurt er in de grond tijdens het heien?“, (De Ingenieur' 1956 nr. 25, blz. B 77). Op de hoofdzaken van deze methode zij hier in het kort teruggekomen.

1 Berekening van de spanning

De neutrale as van een prismatische staaf wordt als x -as gekozen. De dwarsdoorsnede is F , de elasticiteitsmodulus van het materiaal is E en ρ de soortelijke massa. Verondersteld wordt, dat vlakke doorsneden vlak blijven. De specifieke verlenging ϵ_x tengevolge van een verplaatsing w in langsrichting is $\partial w/\partial x$.

Op een doorsnede, abscis x , werkt dan een kracht groot $EF(\partial w/\partial x)$ en op de doorsnede $(x+dx)$ een kracht $EF(\partial w/\partial x + \partial^2 w/\partial x^2 dx)$.



De vergelijking voor de beweging van het staafelement dx is:

$$EF \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - EF \frac{\partial w}{\partial x} = \rho F dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

of: $E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, waaruit met $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$ volgt:

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking is

$$w = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

*) Thans: Dr. ir. G. DE JOSSELIN DE JONG, hoogleraar in de grondmechanica, T.H. Delft.

(Tweemaalige differentiatie van deze betrekking naar x resp. naar t levert immers:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f_1''(x+at) + f_2''(x-at) \text{ resp.}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 f_1''(x+at) + a^2 f_2''(x-at)$$

Derhalve geldt

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

d.i. de vorenbedoelde differentiaalvergelijking.)

De oplossing $w = f_2(x-at)$ geeft voor bepaalde t een verloop van de verplaatsing w te zien als functie van de coördinaat x langs de staaf. De verplaatsing w verandert niet als met een tijdsdeel Δt de coördinaat x toeneemt met een waarde $\Delta x = a\Delta t$. Dit betekent, dat het beeld van de verplaatsing w onveranderd langs de staaf voortschrijdt met een snelheid $\Delta x/\Delta t = a$.

Analoog geeft bij $f_2(x-at) = 0$ de oplossing $w = f_1(x+at)$ een verplaatsingsbeeld dat met dezelfde snelheid a in *tegenovergestelde* richting van die in het voorgaande geval langs de staaf voortschrijdt.

De kracht in de staaf is

$$P = -EF \frac{\partial w}{\partial x} = -EF \{f_1'(x+at) + f_2'(x-at)\}$$

(Een drukkracht is *positief* gekozen.)

Lijst van notaties

	dimensie
a	$\sqrt{Eg/\gamma}$ = snelheid van de spanningsgolf
E	elasticiteitsmodulus
F	oppervlakte der doorsnede van de staaf
g	versnelling van de zwaartekracht
H	lengte van de slinger
P	kracht
t	tijd
u_n	verplaatsing van de staaf
v, v_n	snelheid van de staaf
w	verplaatsing
x	coördinaat
Z	EF/a = impedantie
γ	soortelijk gewicht
ϱ	soortelijke massa = dichtheid

De snelheid van de deeltjes van de staaf is

$$v = \frac{\partial w}{\partial t} = a \{f_1'(x+at) - f_2'(x-at)\}$$

Dus is

$$P + \frac{EF}{a}v = -2EFf_2'(x-at)$$

Voor een spanningsgolf die zich met een snelheid a verplaatst in positieve x -richting is $(x-at)$ constant, dus ook $f_2'(x-at)$.

Voor de punten die door deze spanningsgolf worden gepasseerd is:

$$P + \frac{EF}{a}v = C_1 = \text{constant.} \quad \dots \dots \dots \quad (I)$$

Dit geldt dus voor de spanningsgolf die in de richting van de negatieve x -as loopt.

Voor een golf die in de positieve richting loopt vindt men (door de spanningsgolf in de staaf te beschouwen, waarvoor geldt $x+at = \text{constant}$) dat voor de hierbij gepasseerde punten geldt:

$$P - \frac{EF}{a}v = C_2 = \text{constant} \quad \dots \dots \dots \quad (I')$$

Deze twee betrekkingen zijn door ir. G. DE JOSSELIN DE JONG in het vorenaangehaalde artikel gebruikt om op overzichtelijke wijze de spanningen in prismatische staven te bepalen door toepassing van *karacteristieken*.

Wordt bijvoorbeeld de snelheid v_0 van een staaf plotseling gestuit bij stoten tegen een starre wand, dan wordt de staafsnelheid nul en dus in verband met (I), waarin voor het stoten $P = 0$ was en

$$C_1 = \frac{EF}{a}v_0,$$

de kracht in de staaf, na het stoten

$$P = \frac{EF}{a}v_0, \quad \text{en de spanning } \sigma = \frac{E}{a}v_0$$

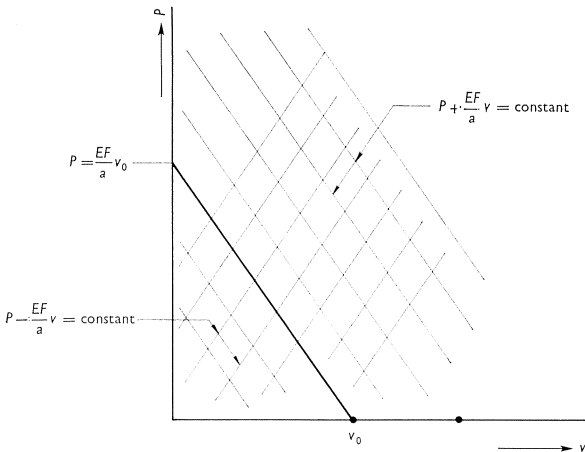
Grafisch is dit aan te geven in een impedantiediagram (zie fig. 2).

Als een staaf met snelheid v_0 botst tegen een staaf van dezelfde doorsnede met snelheid nul, dan zal in de staaf die in rust was een spanningsgolf ontstaan die zich voortplant in de bewegingsrichting van de aanstotende staaf.

De tweede vergelijking

$$P - \frac{EF}{a}v = C_2, \quad \text{met } C_2 = 0,$$

Fig. 2. Impedantiediagram.



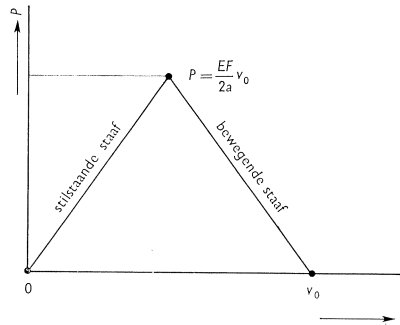
moet dus worden gebruikt voor de in beweging gekomen staaf. De aanstotende staaf wordt afgeremd; de vergelijking

$$P + \frac{EF}{a}v = C_1 = \frac{EF}{a}v_0$$

geldt hiervoor.

In diagramvorm is in fig. 3 geschetst welke spanningen en snelheden na de botsing voorkomen. Andere voorbeelden worden in het meergenoemde artikel gegeven.

Fig. 3. Verband tussen spanningen en snelheden na de botsing.



Een praktisch voorbeeld is dat van de staaf zonder snelheid, waarvan een deel met een lengte $l <$ de staaf lengte een spanning P_0/F heeft. De snelheid waarmee de spanning langs de staaf verplaatst, is a . De snelheid van de deeltjes in het staafdeel onder spanning volgt uit:

$$P_0 - \frac{EF}{a}v = 0; \quad \text{dus} \quad v_0 = \frac{a}{EF} \cdot P_0$$

Als de staaf een vrij uiteinde heeft, kan de spanning P_0/F hier niet voorkomen. Zodra de spanningsgolf het uiteinde bereikt, start er een golf in tegengestelde richting met een spanning nul. Voor deze golf geldt:

$$P_1 + \frac{EF}{a}v_1 = -2EFf_2'(x-at) = +2P_0 = 2\frac{EF}{a}v_0$$

$$P_1 = 0 \quad \text{en} \quad v_1 = 2v_0.$$

Het staafeinde heeft de dubbele snelheid gekregen en ,trekt' aan de staaf. Hierdoor ontstaat een trek golf in de staaf, waarvoor geldt:

$$P_2 + \frac{EF}{a} v_2 = 0; \quad (P_2 = -P_0 \text{ en } v_2 = v_0)$$

In het impedantiediagram (fig. 4) zijn de verschillende snelheden en krachten af te lezen.

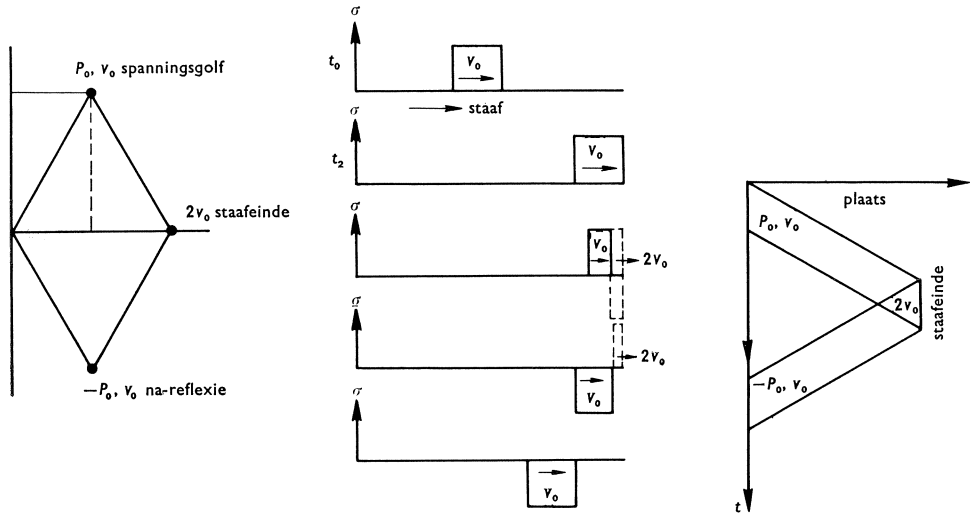


Fig. 4. Impedantiediagram voor een spanningsgolf aan het vrije uiteinde van een staaf.

2 Toepassingen

A. Botsing van een korte tegen een lange staaf van gelijke dwarsdoorsnede

Op het tijdstip van botsen heeft de korte staaf met de lengte l de snelheid v_0 en de lange staaf met de lengte L geen snelheid. De snelheid van het contactvlak onmiddellijk na de botsing is $\frac{1}{2}v_0$. De kracht die de staven daar op elkaar uitoefenen is $-(EF/a)(v_0/2)$. In elke staaf ontstaat een spanningsgolf met de deeltjessnelheid $\frac{1}{2}v_0$ en spanning $-(E/a) \cdot (v_0/2)$, zie fig. 5.

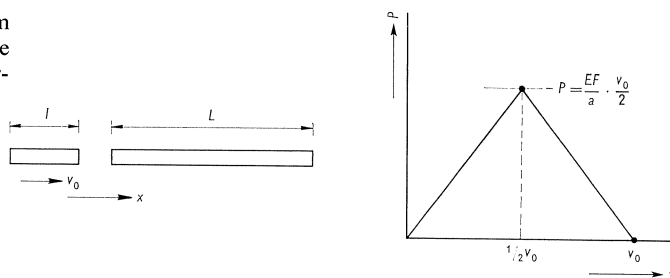
De deeltjessnelheid in de *korte* staaf wordt $\frac{1}{2}v_0$ tot de spanningsgolf het uiteinde heeft bereikt, waarna de richting van de spanningsgolf en het teken van de spanning wisselen, maar de snelheid hetzelfde teken en dezelfde grootte houdt.

De snelheid van de korte staaf wordt door deze in de richting van de positieve x -as lopende golf $\frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{2}v_0 = 0$.

De spanning wordt

$$-\frac{E}{a} \cdot \frac{1}{2}v_0 + \frac{E}{a} \cdot \frac{1}{2}v_0 = 0.$$

Fig. 5. Impedantiediagram voor de botsing van twee staven van gelijke doorsnede.



Als de spanningsgolf de korte staaf in beide richtingen heeft doorlopen is de staaf zonder snelheid of spanning, dus in rust: de druk op de lange staaf valt weg.

In de *lange* staaf loopt een spanningsgolf met lengte $2l$ en met een spanning $(E/a) \cdot (v_0/2)$.

De rekken ten gevolge van deze spanningsgolf zijn geregistreerd in fig. 6 en 7. Bij de proef was

- $l = 100 \text{ cm}$
- $L = 610 \text{ cm}$
- $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ (staal)
- $F = 3,14 \text{ cm}^2$ (cirkelvormige doorsnede $\varnothing 2,0 \text{ cm}$)
- $a = 5 \times 10^5 \text{ cm/s}$
- $v_0 = 105 \text{ cm/s}$

Metingsuitkomsten waren:

gemiddelde lengte van de spanningsgolf = 220 cm

en een spanning van 210 kgf/cm^2 ; maximale amplitude van de lange staaf = 4,5 cm.

Volgens de theorie zou de lengte van de spanningsgolf het dubbele van de staaf-lengte, dus $2 \times 100 = 200 \text{ cm}$ moeten zijn, en

$$\sigma = \frac{E \cdot v_0}{a \cdot 2} = \frac{2,1 \times 10^6}{5 \times 10^5} \times \frac{105}{2} = 220 \text{ kgf/cm}^2.$$

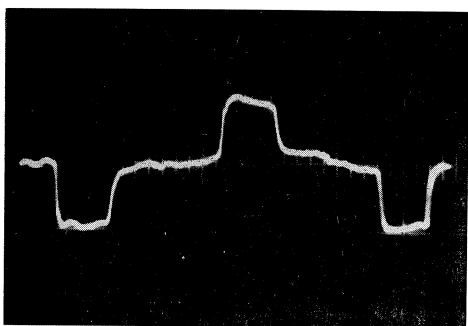


Fig. 6. Gemeten spanning-tijd-diagram in het midden van de lange staaf onmiddellijk na de botsing.

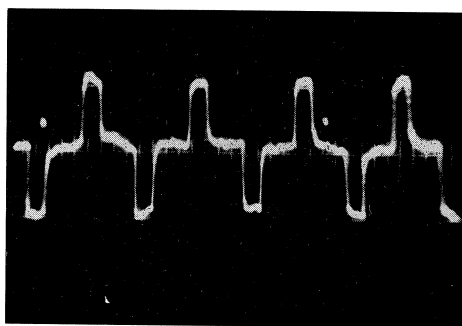
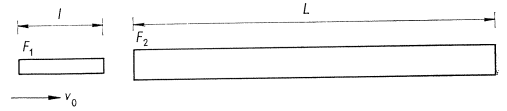


Fig. 7. Gemeten spanning-tijd-diagram in het midden van de lange staaf onmiddellijk na de botsing.

B. *Botsing van een dunne korte staaf tegen een lange dikkere*

Bij deze botsing blijkt de golflengte in de dikke staaf eveneens $2l$ te zijn, maar berekening van de spanning levert (fig. 8):



$$\frac{E_2 F_2}{a_2} = \frac{P}{Z}, \quad \text{dus} \quad Z = \frac{P a_2}{E_2 F_2}$$

$$\frac{E_1 F_1}{a_1} = \frac{P}{v_0 - Z}, \quad \text{dus} \quad v_0 - Z = \frac{P a_1}{E_1 F_1}$$

Opgeteld:
$$v_0 = P \left(\frac{a_1}{E_1 F_1} + \frac{a_2}{E_2 F_2} \right)$$

Dus

$$P = \frac{v_0}{\frac{a_1}{E_1 F_1} + \frac{a_2}{E_2 F_2}}$$

Omdat de snelheid van het contactvlak van de botsing kleiner is dan $\frac{1}{2}v_0$ is de snelheid van de golf die in de korte staaf terugloopt groter dan $\frac{1}{2}v_0$. De korte staaf springt terug als de spanningsgolf deze staaf heen en terug heeft doorlopen. Bij de proef was

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \\ a_1 &= a_2 = 5 \times 10^5 \text{ cm/s} \\ F_1 &= \frac{1}{4} F_2 \\ v_0 &= 105 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

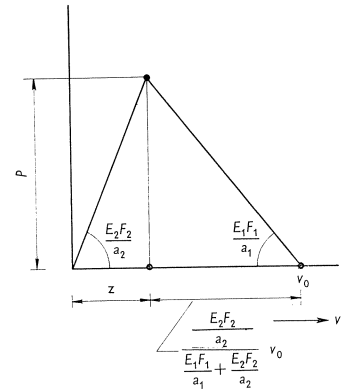


Fig. 8. Impedantiediagram voor de botsing van twee staven van verschillende doorsnede ($F_1 < F_2$).

Volgens de theorie zou de spanning in de staaf F_2 worden:

$$\frac{P}{F_2} = \frac{E}{a} v_0^{1/4} = 0,2 \frac{E v_0}{a} = 0,2 \times \frac{2,1 \times 10^6}{5 \times 10^5} \times 105 = 88,2 \text{ kgf/cm}^2$$

Gemeten is een gemiddelde lengte van de spanningsgolf van 200 cm, een spanning van 92 kgf/cm² en een maximale amplitude van de lange staaf van 2,0 cm (zie fig. 9 en 10).

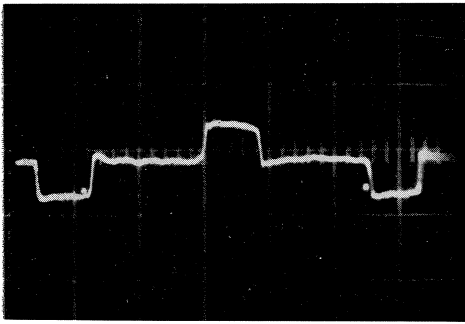


Fig. 9. Gemeten spanning-tijd-diagram in het midden van de lange staaf onmiddellijk na de botsing.

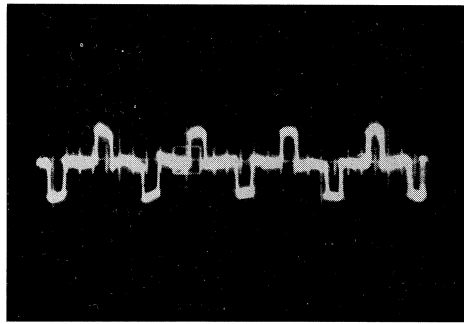
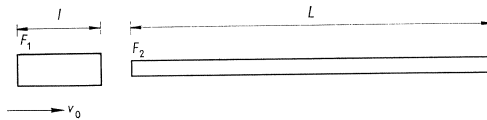


Fig. 10. Gemeten spanning-tijd-diagram in het midden van de lange staaf onmiddellijk na de botsing.

C. Botsing van een korte dikke staaf tegen een lange dunnere

Bij botsing tussen een korte staaf met een doorsnede F_1 , en een lange staaf met een doorsnede $F_2 < F_1$ blijft de spanningsgolf niet meer rechthoekig.



De korte staaf heeft op het moment van de botsing een snelheid v_0 , de lange is in rust en spanningloos. De snelheid van het contactvlak wordt door de botsing kleiner dan v_0 , maar blijft groter dan $\frac{1}{2}v_0$, zodat in de korte staaf een spanningsgolf met een snelheid kleiner dan $\frac{1}{2}v_0$ terugloopt na de botsing. Hierdoor blijft de korte staaf tegen de lange drukken. De krachten na de botsing zijn in fig. 11 bepaald.

Nadat de spanningsgolf de korte staaf $2 \times$ heeft doorlopen is de snelheid van deze staaf

$$v_0 \left(1 - \frac{\frac{2E_2F_2}{a_2}}{\frac{E_1F_1}{a_1} + \frac{E_2F_2}{a_2}} \right) = v_0 \left(\frac{\frac{a_2}{E_2F_2} - \frac{a_1}{E_1F_1}}{\frac{a_1}{E_1F_1} + \frac{a_2}{E_2F_2}} \right)$$

Door deze snelheid wordt opnieuw een spanningsgolf in de korte en lange staaf opgewekt, waarbij

$$\sigma_a = \frac{v_0}{F_2} \frac{1}{\frac{a_1}{E_1F_1} + \frac{a_2}{E_2F_2}}$$

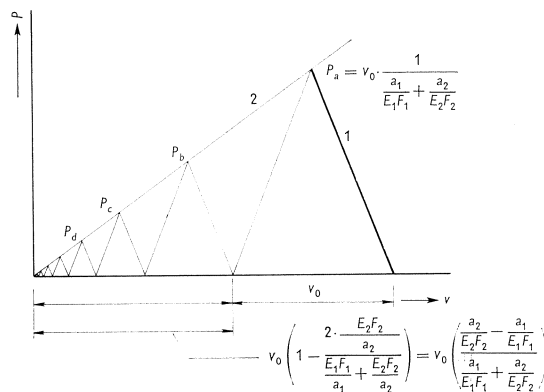


Fig. 11. Impedantiediagram voor de botsing van twee staven van verschillende doorsnede ($F_1 > F_2$).

en

$$\sigma_b = \frac{v_0}{F_2} \frac{1}{\left(\frac{a_1}{E_1 F_1} + \frac{a_2}{E_2 F_2}\right)} \cdot \left(\frac{a_2}{E_2 F_2} - \frac{a_1}{E_1 F_1}\right)$$

enz.

Bij de proef was

$$E_1 = E_2 = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2; \quad l = 50 \text{ cm}$$

$$a_1 = a_2 = 5,0 \times 10^5 \text{ cm/s}; \quad L = 610 \text{ cm}$$

$$F_1 = 4F_2$$

$$v_0 = 105 \text{ cm/s}$$

Dan zou

$$\sigma_a = v_0 \cdot \frac{E \cdot 4}{a(4+1)} = \frac{4}{5} v_0 \frac{E}{a} = \frac{4}{5} \times 105 \times \frac{2,1 \times 10^6}{5 \times 10^2} = 352 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_b = \sigma_a \cdot \left(\frac{4-1}{4+1}\right) = \frac{3}{5} \sigma_a = \frac{3}{5} \times 352 = 211 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{en}$$

$$\sigma_c = \sigma_a \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 127 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{enz.}$$

moeten zijn.

Het meetresultaat is gegeven in fig. 12 en 13, met als waarden:

$$\sigma_a = 360 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_b = 210 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_c = 115 \text{ kgf/cm}^2$$

De horizontale verplaatsing van de lange staaf was 7,5 cm. De proef is ook uitgevoerd door aan te stoten met een staaf van 100 cm lengte. De horizontale verplaatsing van de lange staaf was toen 13,4 cm.

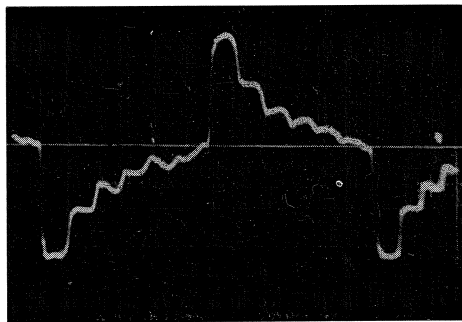


Fig. 12. Gemeten spanning-tijd-diagram in het midden van de lange staaf onmiddellijk na de botsing.

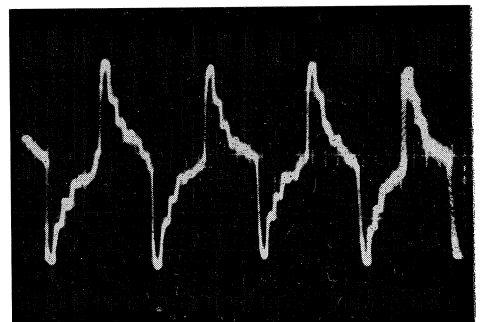


Fig. 13. Gemeten spanning-tijd-diagram in het midden van de lange staaf onmiddellijk na de botsing.

3 Afwijkingen van de prismatische staafvorm

a. Het blok

Bij de botsing tussen de dikke staaf met doorsnede $4F$ en snelheid v_0 en de in rust zijnde dunne met doorsnede F wordt de snelheid van het contactvlak $\frac{4}{5}v_0$, de spanning in de dikke staaf $\frac{1}{5}v_0(E/a)$, en in de dunne staaf $\frac{4}{5}v_0(E/a)$.

De dunne staaf werkt de beweging van de dikke staaf slechts voor een klein gedeelte tegen. Het oppervlak waartegen de dikke staaf stuit is te klein om de snelheid tot de helft af te remmen.

Wat gebeurt er als de dikke staaf bij het stootvlak in doorsnede wordt verkleind tot eenzelfde diameter als van de tweede staaf? Met een staaf, welke over een lengte gelijk aan de diameter taps verlopend werd afgedraaid tot op de diameter van de dunne staaf, is dit probleem door meting onderzocht.

De proefresultaten bleken volkomen gelijk aan die met de aanstotende staaf van onveranderde, constante dikte!

Een verklaring hiervoor is te vinden door een staaf te beschouwen welke trapsgevijs in dikte verandert. Voor het geval van een staaf waarvan de dikte in één sprong verandert is het impedantiediagram in fig. 14 gegeven.

De kracht in de spanningsgolf in het cilindrisch afgedraaide staafdeel (II) met oppervlakte F_2 , na de botsing, is

$$P = \frac{EF_2}{2a} \cdot v_0.$$

Deze spanningsgolf veroorzaakt in het staafdeel (I) met de grote oppervlakte F_1 en snelheid v_0 een kracht

$$P = \frac{\frac{EF_1}{a} \cdot \frac{EF_2}{a}}{\frac{EF_1}{a} + \frac{EF_2}{a}} v_0,$$

zoals ook bij de volledig prismatische staaf het geval is.

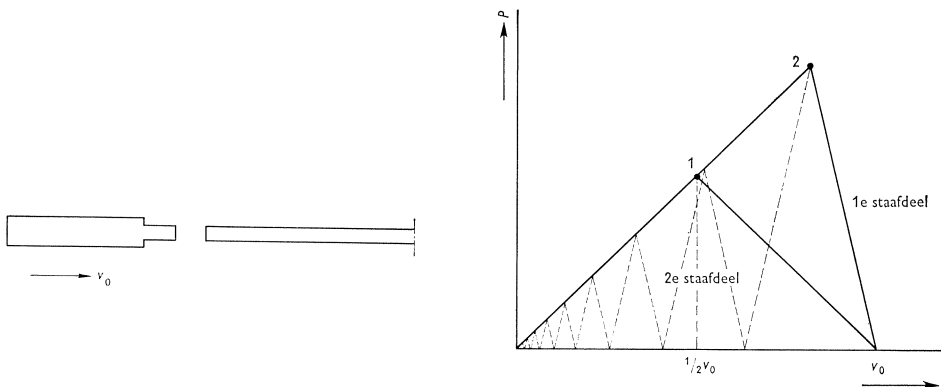


Fig. 14. Impedantiediagram voor een staaf met spronggewijze dikte variatie.

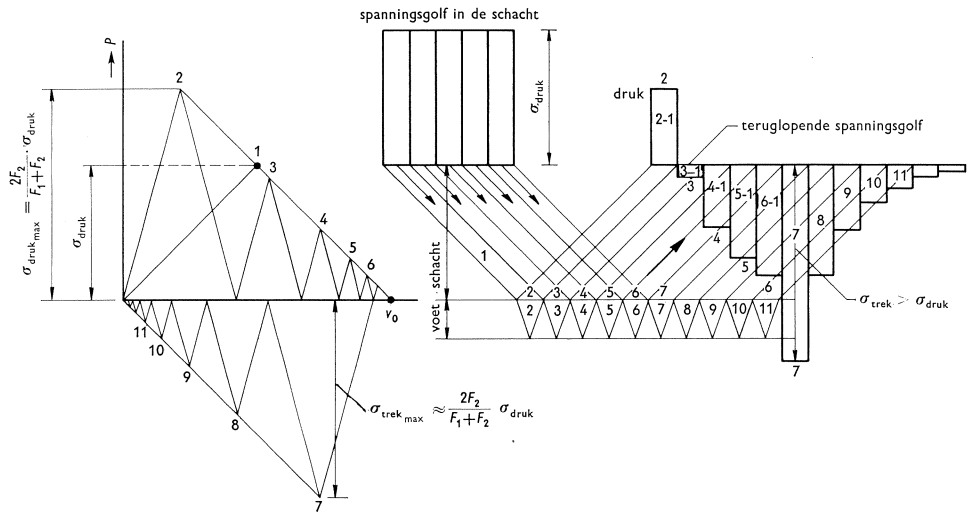


Fig. 16. Impedantie- en plaats-tijd-diagram voor een staaf met verzwaard uiteinde.

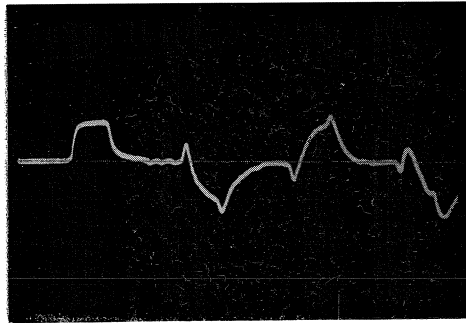


Fig. 15. Gemeten spanning-tijd-diagram in het midden van een lange staaf met verzwaard uiteinde.

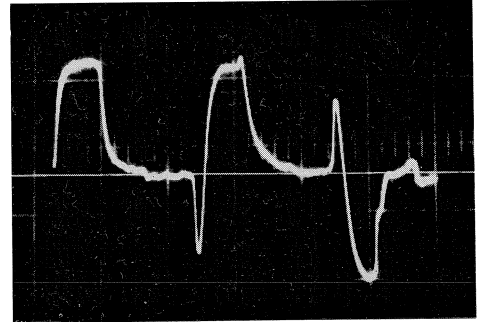


Fig. 17.

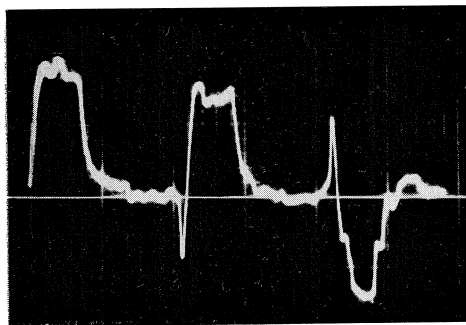


Fig. 18.

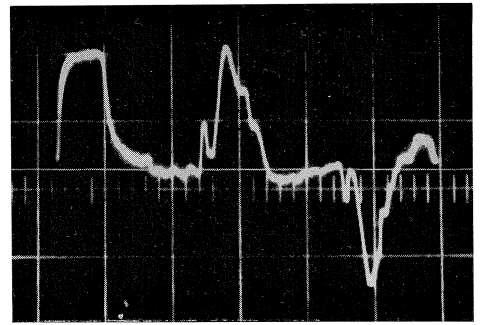


Fig. 19.

Fig. 17 ... 19. Enige gemeten spanning-tijd diagrammen voor staven met gesteund uiteinde.

b. De paal; onderzoek naar de invloed van de verzwaarde punt bij heipalen

Aan het niet-aangestoten uiteinde van de lange staaf werd een korte dikke staaf gelast (diameter = $2 \times$ en lengte = $4 \times$ de diameter van de lange staaf).

De lange staaf werd aan het niet-verzwaarde einde aangestoten door een korte staaf van even grote diameter.

De spanningsgolf, welke door de staaf loopt onmiddellijk na het aanstoten, is reeds bij het eerste voorbeeld beschreven (de lengte van de spanningsgolf is $2l_1$ en de spanning is $(E/2a)v_0$). Aan het uiteinde, waaraan de verzwaarde punt, weerkaatst de spanningsgolf maar verandert tevens sterk van vorm. In fig. 15 is het meetresultaat gegeven. Dit resultaat is met behulp van de methode met karakteristieken te verklaren en in fig. 16 getekend; bovendien is in de figuur een plaats-tijd-diagram gegeven.

De drukgolf weerkaatst als drukgolf op het vlak waar de verzwaaring van de punt begint. Daarna wordt, door heen- en teruglopen van de spanningsgolf, de snelheid van de punt v_0 . Hierdoor start een trekking in de staaf vanaf deze punt. De spanning in deze trekking wordt

$$\sigma = \frac{\frac{EF_p}{a_p}}{\frac{EF_s}{a_s} + \frac{EF_p}{a_p}} \cdot v_0$$

Als $F_{p(\text{unt})} = 4F_{s(\text{chacht})}$, wordt

$$\sigma = \frac{4}{4+1} \cdot v_0 \times \frac{E_s F_s}{a_s}$$

Deze trekspanning is $\frac{8}{5}$ of 1,6 maal de drukspanning. De teruglopende trekspanning is dus aanzienlijk hoger dan de opgewekte drukspanning.

Tenslotte nog een drietal proefresultaten:

Fig. 17 geeft de spanning in een prismatische staaf welke in het niet-aangestoten eind steunde tegen een groot betonblok. Fig. 18 geldt voor dezelfde staaf nu gesteund door een groot stalen blok.

Fig. 19 geldt voor de staaf met verzwaarde voet gesteund door een betonblok.

4 Samenvatting van de resultaten

Uit de eerste proeven bleek, dat een prismatisch (hei)blok met een impedantie (EF/a) , gelijk aan die van de paal, bij de botsing een spanningsgolf in deze paal opwekt met een constante amplitude en een lengte gelijk aan tweemaal de lengte van het heiblok.

Bij de botsing geeft het blok zijn totale energie af.

Als de impedantie van het prismatische (hei)blok kleiner is dan die van de paal, dan

heeft de spanningsgolf in de paal eveneens een constante amplitude en een lengte van tweemaal die van het blok, maar dit blok springt terug. Het blok geeft slechts een deel van de totaal beschikbare energie af.

Als de impedantie van het prismatische blok groter is dan die van de paal, dan neemt de spanning van de spanningsgolf af met het verlopen van de tijd.

Het blok blijft op de paal drukken, waardoor de trekspanningen in de paal, welke van de paalpunt afkomen, worden gereduceerd.

Aanzienlijke vermindering van de doorsnede van het heiblok aan de onder- of aan de bovenkant heeft ongeveer hetzelfde effect als vermindering van de lengte van het blok met de maat waarover de doorsnede (impedantie) is gereduceerd.

Door vergroting van de doorsnede van de heipaal aan de *voet* vervormt de spanningsgolf. De terugkerende golf heeft een hogere trekspanning dan de door het blok opgewekte drukspanning.

Een vergroting van de doorsnede van de heipaal aan de *kop* heeft in een extreem geval een gunstig effect op de spanningen in de paal zoals blijkt uit fig. 20a, waarbij de impedantie van de paalkop groter is gekozen dan die van het heiblok. De spanningsgolf in de paalschacht heeft door de verzwaarde kop altijd een grote lengte (of tijdsduur). De spanning in de schacht blijft lager dan in het geval zonder verzwaarde paalkop.

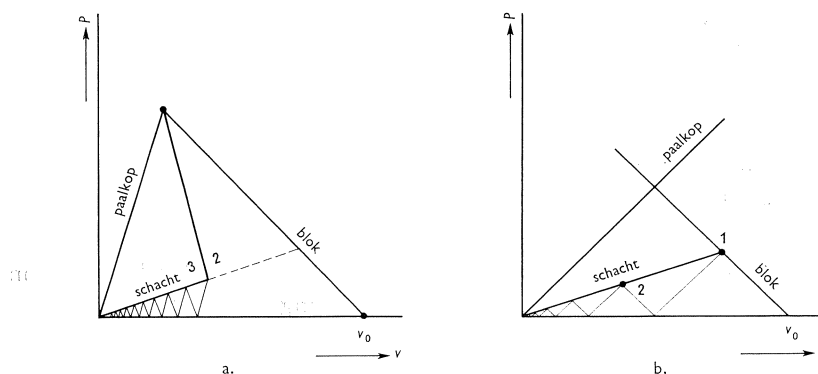


Fig. 20. Impedantiediagrammen voor staven met een verzwareing aan het aangestoten uiteinde.

Als de impedantie van de paalkop kleiner is dan of gelijk aan die van het blok, heeft de verzwareing weinig effect op de spanningsgolf in de schacht (fig. 20b).

De theoretisch rechthoekige spanningsgolven, zoals in het voorgaande werden berekend, komen in de praktijk niet voor, omdat door het toepassen van een (verende) heimuts bovenop de paal de vorm van de spanningsgolven wordt afgevlakt.

5 De bewegingen van de staven

De lange proefstaaf beweegt na het aanstoten als een slinger. De maximale amplitude is niet met een eenvoudige energiebeschouwing te berekenen, omdat een deel van de

energie, welke bij de stoot wordt overgebracht op de staaf, in de staaf blijft als spanningsgolf. Aldus wordt slechts een deel van de energie van de stoot omgezet in verhoging van de energie van plaats, conform de verticale verplaatsing van de staaf tot het hoogste punt van de slingering.

Voor het bepalen van de maximale horizontale uitslag van de staaf als slinger moeten de bewegingen van een punt van de staaf ten gevolge van het passeren van de spanningsgolf worden beschouwd.

Het passeren van de spanningsgolf geschiedt met tijdsintervallen $\Delta t = L/a$. Gedurende deze tijd Δt werkt de zwaartekracht op de massa van het beschouwde punt van de staaf. De zwaartekracht veroorzaakt vanwege de ophanging een beweging tegengesteld gericht aan die t.g.v. de spanningsgolf. De resultante van de kracht in de ophanging en de zwaartekracht werkt in de as van de staaf. Ten gevolge van deze resultante ondergaat de staaf een versnelling $= (u_n/H) \cdot g$, als u_n de verplaatsing is uit de verticale stand na n maal passeren van de spanningsgolf en g de versnelling van de zwaartekracht (zie fig. 21).

Ten gevolge van deze versnelling is de snelheid van de staaf $= v_n$ na n maal passeren van de spanningsgolf.

Verondersteld wordt, dat de versnelling $(u_n/H)g$ constant blijft gedurende de tijd $\Delta t = L/a$. Hierin is de aangroei van de snelheid:

$$v_n - v_{n-1} = \frac{u_n}{H} \cdot g \cdot \frac{L}{a} \dots \dots \dots (A)$$

De verplaatsing u_n volgt uit u_{n-1} door de verplaatsing tengevolge van éénmaal passeren van de spanningsgolf Δu hierbij op te tellen en de verplaatsing tengevolge van v_n gedurende Δt er van af te trekken, of in formule:

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u - v_n \cdot \frac{L}{a} \dots \dots \dots (B)$$

en analoog:

$$u_{n-1} = u_{n-2} + \Delta u - v_{n-1} \cdot \frac{L}{a} \dots \dots \dots (B')$$

Eliminatie van v_n en v_{n-1} uit (A), (B) en (B') geeft:

$$u_n \cdot \frac{g}{H} \cdot \left(\frac{L}{a}\right)^2 + u_n - u_{n-1} - \Delta u - u_{n-1} + u_{n-2} + \Delta u = 0$$

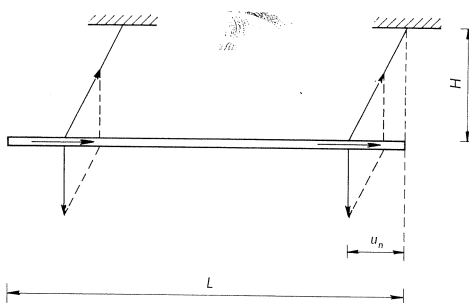


Fig. 21. Schema van de staafophanging.

Als differentievergelijking is hieruit af te leiden:

$$u_n \left(1 + \frac{gL^2}{Ha^2} \right) - 2u_{n-1} + u_{n-2} = 0 \quad \dots \dots \dots (C)$$

Voor het oplossen van deze vergelijking wordt ter vereenvoudiging geschreven:

$$\frac{gL^2}{Ha^2} = \beta$$

Stel nu:

$$u_n = \alpha^n,$$

Dan volgt uit (C) de betrekking:

$$1 + \beta - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0$$

waaruit:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{\beta}}{1 + \beta} \quad |\alpha_{1,2}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta}}$$

Voor $\alpha_{1,2}$ is met behulp van:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta}} \quad \text{resp.} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \beta}} \quad \dots \dots \dots (D)$$

te schrijven:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta}} (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \quad \dots \dots \dots (E)$$

De algemene oplossing van (C) is:

$$u_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n$$

Substitutie hierin van (E) en toepassing van de stelling van De Moivre levert als reële oplossing:

$$u_n = C(1 + \beta)^{-n/2} \cos n\varphi + D(1 + \beta)^{-n/2} \sin n\varphi$$

De constanten C en D volgen uit de randvoorwaarden:

voor $n = 0$ is $u = 0$, resp. voor $n = 1$ is $u = \Delta u$.

Uit de eerste voorwaarde volgt $C = 0$, en uit de tweede

$$D = \frac{\Delta U \sqrt{1+\beta}}{\sin \varphi}.$$

Als eindresultaat is dus te noteren:

$$u_n = \frac{\Delta u}{\sin \varphi} (1+\beta)^{-(n-1)/2} \sin n\varphi$$

Uit (D) volgt de hoek φ :

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}},$$

waarin

$$\beta = \frac{gL^2}{Ha^2}, \text{ of met } a^2 = \frac{Eg}{\gamma}:$$

$$\beta = \frac{\gamma L^2}{EH}$$

Deze constante β is klein t.o.v. 1.

Hieruit is af te leiden dat de hoek φ een kleine waarde heeft.

Voor $\cos \varphi$ luidt de reeksontwikkeling

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$$

terwijl ook geldt

$$\frac{1}{\sqrt{1+\beta}} = 1 - \frac{\beta}{2} + \dots$$

Dienovereenkomstig is te stellen als benadering dat $\beta = \varphi^2$, ofwel $\varphi = \sqrt{\beta}$, en ook $\sin \varphi = \sqrt{\beta}$.

Aldus ontstaat ten slotte de (benaderende) betrekking:

$$u_n \approx \frac{\Delta u}{\sqrt{\beta}} (1+\beta)^{-(n-1)/2} \sin(n\sqrt{\beta})$$

u_n is extreem als $du_n/dn = 0$. Aan deze voorwaarde is voldaan voor

$$n = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} - \frac{1}{2} \approx \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}},$$

m.a.w. $\sin n\sqrt{\beta} = 1$.

De maximale waarde van u_n is:

$$\bar{u}_n \approx \frac{\Delta u}{\sqrt{\beta}} (1 + \beta)^{-(\pi/4\sqrt{\beta}) + \frac{1}{2}} \approx \frac{\Delta u}{\sqrt{\beta}} \left\{ 1 + \beta \left(-\frac{\pi}{4\sqrt{\beta}} + \frac{1}{2} \right) \right\} \approx \frac{\Delta u}{\sqrt{\beta}}$$

En dus:

$$\bar{u}_n \approx \frac{\Delta u}{\sqrt{\beta}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{gL^2}} = \frac{a}{L} \Delta u \sqrt{\frac{H}{g}} = \frac{\Delta u}{\Delta t} \sqrt{\frac{H}{g}} \dots \dots \dots (F)$$

Dit is de amplitude van een slingerende staaf (opgehangen volgens fig. 21) met beginsnelheid

$$v_0 = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

De differentievergelijking (C) gaat voor

$$\Delta t = \frac{L}{a} \rightarrow 0$$

over in de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{H}u = 0$$

Dit is de vergelijking van de mathematische slinger. Een resultaat van de micro-mechanica. nl. $\Delta u/\Delta l$, wordt nu als randwaarde ingevoerd in de macromechanische slingervergelijking.

De uitwerking van (F) voor de verschillende proeven is samengevat in de volgende tabel:

proef		gemeten \bar{u}_n	berekend \bar{u}_n
1	$l = 100 \text{ cm}; F_1 = F_2$	4,5 cm	4,3 cm
2	$l = 100 \text{ cm}; F_1 = \frac{1}{4}F_2$	2,0 cm	1,7 cm
3	$l = 50 \text{ cm}; F_1 = 4F_2$	7,5 cm	7,6 cm
4	$l = 100 \text{ cm}; F_1 = 4F_2$	13,5 cm	12,8 cm

6 Botsingen met verende tussenlaag

Bij het heien van gewapend-betonpalen treft het stalen heiblok de paal via een hierop aangebrachte heimuts, voorzien van een zachthouten vulling. Hierdoor wordt de spanning in de getroffen paal lager dan bij een rechtstreekse botsing tussen blok en paal.

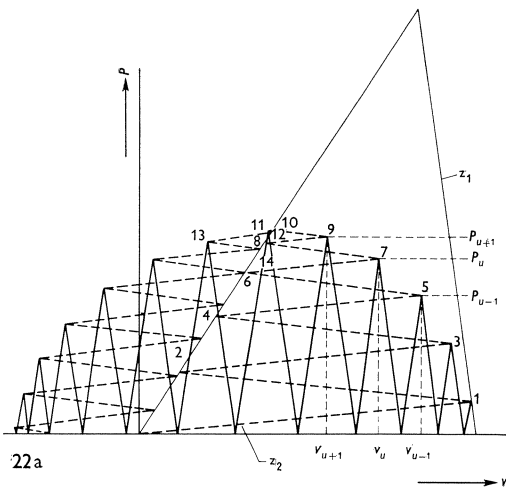


Fig. 22. Impedantiediagram voor de botsing met verende tussenlaag.

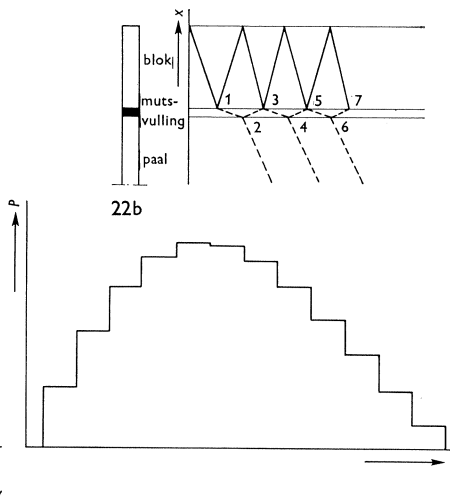


Fig. 23.

De spanningsgolf in de paal is ook nu weer met behulp van de methode met karakteristieken te bepalen.

Verondersteld wordt, dat de impedantie van de mutsvulling onafhankelijk is van de spanning; dit houdt in dat dit materiaal zich gedraagt volgens de wet van Hooke.

Het impedantiediagram voor dit geval is getekend in fig. 22a. Uit deze figuur is af te leiden, welke spanning ontstaat tussen blok en muts bij het eerste contact (punt 1), de spanning in de paal nadat de muts voor de eerste maal is doorlopen (punt 2), de spanning onder het blok na teruglopen van de golf door de muts (punt 3), enz. Bij het tekenen van deze figuur is verondersteld, dat de tijd (l_1/a_1) , waarin de spanningsgolf door het blok loopt, gelijk is aan de tijd (l_2/a_2) welke nodig is voor het doorlopen van de muts.

Dit blijkt duidelijk uit het plaats-tijd-diagram van fig. 22b. In fig. 23 is het kracht-tijd-diagram voor de paalkop getekend. Als de tijdsintervallen, nodig voor het doorlopen van het blok en/of van de muts niet gelijk zijn veranderen de impedantiediagrammen.

Fig. 24 is het diagram voor een blok, dat zo kort is dat het tweemaal doorlopen is in dezelfde tijd als waarin de muts éénmaal wordt doorlopen ($l_1/a_1 = \frac{1}{2}l_2/a_2$).

Fig. 25 geldt voor een blok met een zelfde massa als in het geval van fig. 24, maar nu van zo'n lengte, dat deze eenmaal door de spanningsgolf doorlopen wordt in de tijd waarin de muts tweemaal wordt doorlopen, d.w.z. $l_1/a_1 = 2 \cdot (l_2/a_2)$. De $P-t$ -diagrammen zijn in fig. 26 gegeven.

Deze impedantiediagrammen geven vrijwel vloeiend verloopende $P-t$ -diagrammen. Deze diagrammen zijn te berekenen met een differentiaalvergelijking welke uit de impedantiediagrammen kan worden afgeleid. Hiervoor wordt gebruikt het diagram van fig. 22, hoewel dat van fig. 24 of 25 tot hetzelfde resultaat leidt.

De snelheid van het blok, nadat de spanningsgolf n maal het blok in beide richtingen heeft doorlopen, zij v_n .

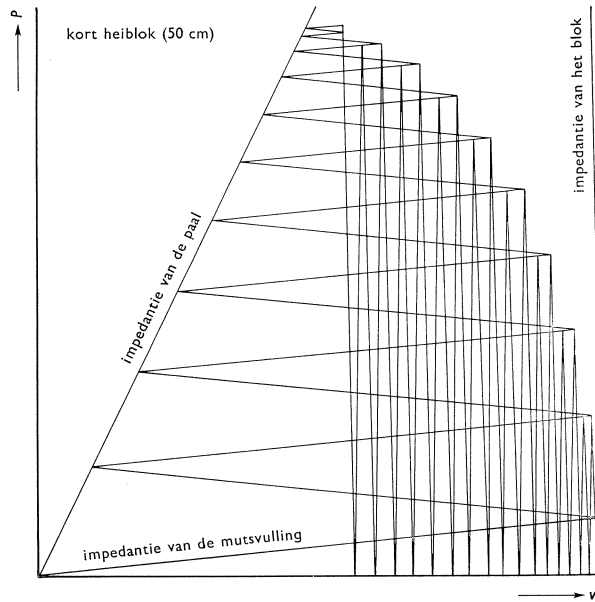


Fig. 24. Impedantiediagram voor de botsing tussen een kort heiblok en een heipaal met verende tussenlaag.

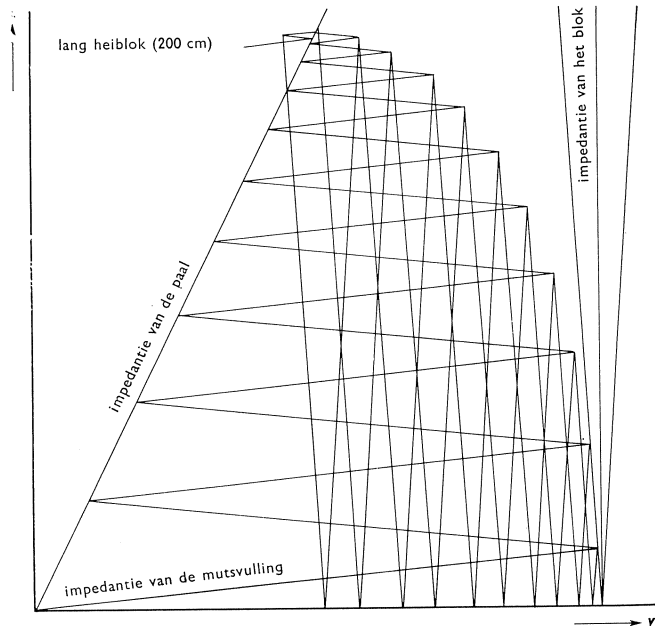


Fig. 25. Impedantiediagram voor de botsing tussen een lang heiblok en een heipaal met verende tussenlaag.

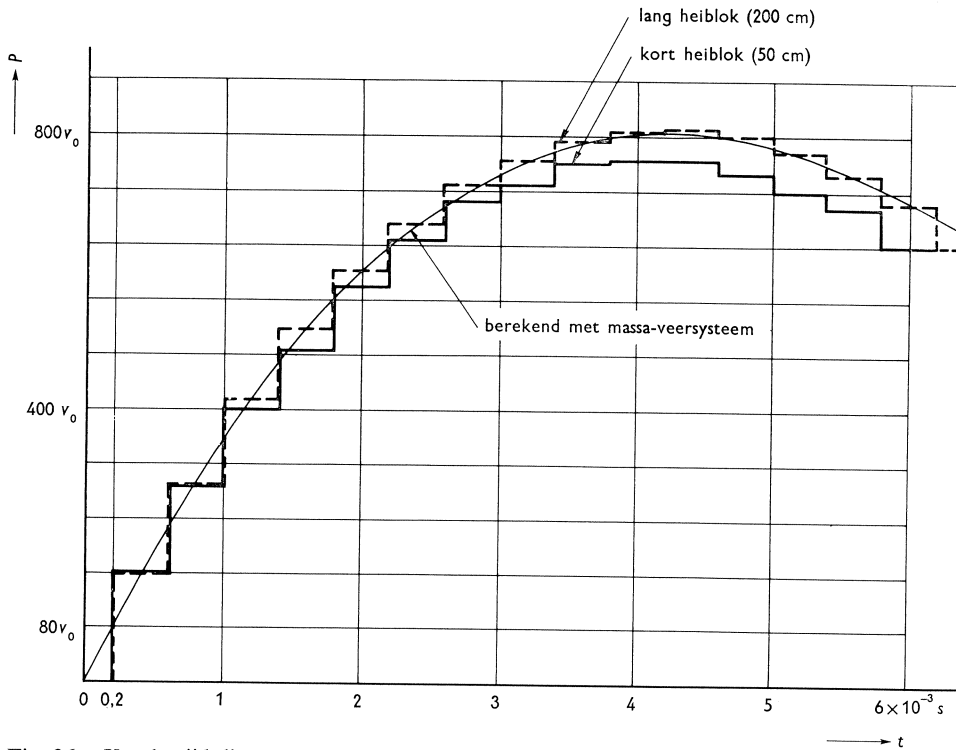


Fig. 26. Kracht-tijd-diagrammen.

Deze snelheid volgt uit v_{n-1} :

$$v_n = v_{n-1} - \frac{2P_n}{Z_1} \dots \dots \dots (G)$$

Hierin is P_n de kracht tussen blok en muts nadat het blok n maal in beide richtingen is doorlopen (zie fig. 22).

Het verband tussen P_n en P_{n-1} is:

$$P_n = P_{n-1} + 2\left(v_n - \frac{P_n}{Z_{paal}}\right)Z_2 \dots \dots \dots (H)$$

De krachten P_n en P_{n-1} zijn uit de vergelijkingen (G) en (H) te elimineren door (G) te schrijven als:

$$P_n = -\frac{Z_1}{2}(v_n - v_{n-1}) \dots \dots \dots (G')$$

resp. ook:

$$P_{n-1} = -\frac{Z_1}{2}(v_{n-1} - v_{n-2}) \dots \dots \dots (G'')$$

Substitutie in (H) geeft:

$$-\frac{Z_1}{2}(v_n - 2v_{n-1} + v_{n-2}) = 2 \left[v_n + \frac{Z_1}{2Z_{\text{paal}}}(v_n - v_{n-1}) \right] Z_2 \dots \dots \dots \text{(J)}$$

Het tijdsinterval tussen v_{n-1} en v_n is

$$\Delta t = 2 \frac{l_1}{a_1} = 2 \frac{l_2}{a_2}.$$

Hiermede is vergelijking (J) te schrijven als

$$-\frac{Z_1}{2} \frac{2l_1}{a_1} \frac{v_n - 2v_{n-1} + v_{n-2}}{(\Delta t)^2} = \frac{2Z_2}{2 \frac{l_2}{a_2}} v_n + \frac{2Z_1 \cdot Z_2}{2Z_{\text{paal}} \Delta t} \cdot \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t} \dots \dots \dots \text{(K)}$$

Als Δt klein is ten opzichte van de tijdsduur van het gehele verschijnsel, dan is met een kleine fout voor

$$\frac{v_n - 2v_{n-1} + v_{n-2}}{(\Delta t)^2} \text{ te schrijven: } \frac{d^2v}{dt^2}$$

en voor

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

De uitdrukking $Z_1 l_1 / a_1$ is gelijk aan

$$\frac{E_1 F_1 l_1}{E_1 a_1^2} = \frac{E_1 F_1 l_1 \cdot \gamma}{E_1 \cdot g} = \frac{G_1}{g} = M_1.$$

Dit is de massa van het heiblok.

De uitdrukking

$$\frac{Z_2}{\frac{l_2}{a_2}} = \frac{E_2 F_2}{l_2} = k_2.$$

Dit is de veerconstante van de heimuts.*)

*) In het algemeen is:

$$M = Z \cdot \frac{l}{a} \text{ en } k = \frac{Z}{l}. \text{ Dus } Z^2 = kM.$$

De vergelijking (K) wordt hiermede:

$$+ M \frac{d^2v}{dt^2} + kv + \frac{kM}{Z_{paal}} \cdot \frac{dv}{dt} = 0 \quad \dots \dots \dots (L)$$

Deze vergelijking is ook rechtstreeks af te leiden uit een massaveersysteem (zie fig. 27).
De bewegingsvergelijking voor de massa is:

$$M \cdot \frac{d^2w}{dt^2} + k \cdot w - ku = 0 \quad \dots \dots \dots (M)$$

De verplaatsing u volgt uit de samendrukking van de paal door de kracht uit de veer:

$$u(t) = - \int_x^\infty \frac{P}{EF} dx = - \frac{a}{EF} \int_t^\infty P dt$$

$$\frac{EF}{a} \cdot u = - \int_t^\infty k(w-u) dt \quad \text{met} \quad P = k(w-u)$$

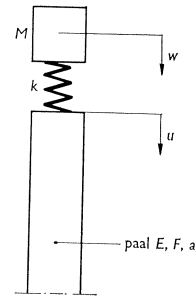


Fig. 27.

$$\frac{EF}{a} \frac{du}{dt} = k(w-u) \quad \dots \dots \dots (N)$$

Eliminatie van u uit (M) en (N) levert:

$$M \cdot \frac{d^3w}{dt^3} + \frac{kMa}{EF} \frac{d^2w}{dt^2} + k \frac{dw}{dt} = 0 \quad \dots \dots \dots (L')$$

welke uitkomst identiek is met vergelijking (L).

De kracht op de paal is voor het geval van de impedantiediagrammen van de fig. 24 en 25 berekend uit formule (L). Het resultaat is in fig. 26 aangegeven.

De drie $P-t$ -diagrammen vallen nagenoeg samen. De verschillen zijn veroorzaakt door tekenonnauwkeurigheden.

Bij de verende tussenlaag blijken micro- en macromechanica tot dezelfde resultaten te voeren.

De afmetingen van het heiblok blijken niet van belang te zijn voor de druk op de paal.