

ONDERZOEK NAAR DE INVLOED VAN GECONCENTREERDE LASTEN OP PLATEN

Voor het verkrijgen van een beter inzicht in de spanningsverdeling, die in platen optreedt bij geconcentreerde belasting en om daarmee tot een betere berekeningswijze te komen, speciaal voor plaatbruggen, zijn aan een stalen model metingen verricht.

De metingen werden verricht met behulp van weerstandsrekstrookjes.

In grote lijnen kan het onderzoek in twee delen worden gesplitst, t.w.:

- 1. Onderzoek naar de invloed van de grootte van het belaste oppervlak (de concentratie van de belasting dus) op de momenten.*
- 2. Onderzoek naar de spanningsverdeling in de plaat als functie van de randvoorwaarden en van de plaats van de belasting.*

De resultaten, die in grafiekvorm gegeven zijn, worden besproken en in sommige gevallen met de uitkomsten van de theorie vergeleken.

Tot slot worden nog enkele conclusies gegeven.

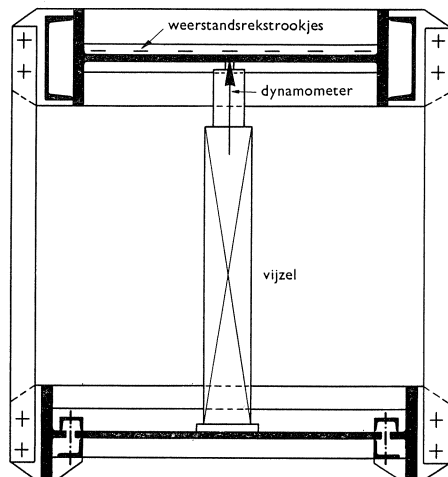
Inleiding

Voor viaducten en bruggen in gewapend beton worden in ons land en ook in het buitenland veelal plaatliggers toegepast. Deze plaatconstructies hebben ten opzichte van meer gecompliceerde constructies als b.v. T-liggers onder meer het voordeel van een eenvoudiger uitvoeringswijze en een geringere constructiehoogte. Hoewel de plaatligger dikwijls meer materiaal vergt, vormt deze constructie daarom toch in zeer veel gevallen de meest economische oplossing. Behalve door het eigen gewicht wordt de belasting gevormd door de wieldrukken van het verkeer, die vooral bij constructies met niet te grote overspanningen een relatief belangrijke bijdrage leveren.

Ook in de utiliteitsbouw vinden gewapend betonplaten veelvuldig toepassing en ook hier kunnen geconcentreerde belastingen voorkomen. Het is dus uiteraard van belang de spanningsverdeling in platen tengevolge van geconcentreerde belastingen te kennen.

Reeds in het begin van deze eeuw werden daarom, voornamelijk in de Verenigde Staten en in Duitsland, vele experimenten verricht. Het streven was er op gericht te komen tot zo eenvoudig mogelijke berekeningswijzen, wat geleid heeft tot het begrip „mee-werkende plaatbreedte”, zodat platen konden worden berekend met de gebruikelijke formules voor balken.

Fig. 1. Doorsnede van het model



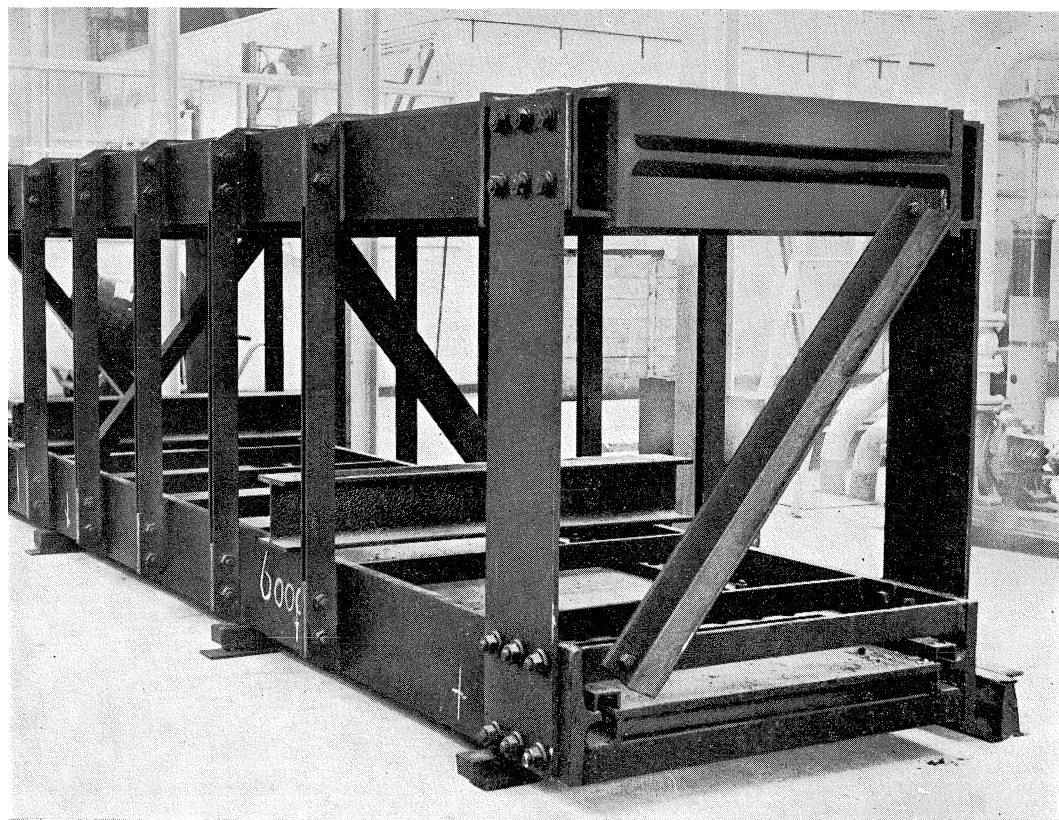


Fig. 2

Het is echter niet mogelijk gebleken bij de vele mogelijke variabelen (als b.v. de wijze van ondersteuning, de afmetingen van de plaat, de plaats en de afmetingen van de last) met een beperkt aantal eenvoudige formules te volstaan om de spanningsverdeling voldoende nauwkeurig te beschrijven. Over de tekortkomingen in de voorschriften hierover en de fouten waartoe deze kunnen leiden zal in een volgende bijdrage het een en ander worden medegedeeld.

Anderzijds werd het i.v.m. het toenemend gemotoriseerd verkeer, dat steeds zwaarder werd, noodzakelijk dat de in de autowegen te bouwen bruggen volgens meer wetenschappelijke inzichten werden ontworpen en berekend.

De ontwikkeling van de elementaire plaattheorie heeft de laatste decennia zeer snel plaats gehad. Het berekenen van een plaat volgens deze theorie is voor de constructeur echter een te tijdrovend werk, vooral bij geconcentreerde belastingen, wanneer b.v. de oplossing wordt verkregen in de vorm van reeksen van Fourier, die soms zeer langzaam convergeren. Ook dit had tot gevolg dat men eenvoudige formules voor de berekening van plaatbruggen trachtte te vinden.

Thans zijn echter vele berekende gevallen in de literatuur bekend en ook enkele tabellenboeken (lit. 1, 2, 3, 4) zijn reeds verschenen. Ook de singulariteitenmethode (lit. 5) betekende een belangrijke vooruitgang.

Vele vragen zijn echter nog onbeantwoord gebleven. Het onderzoek naar de invloed van geconcentreerde lasten op platen, zoals dat bij de Werkgroep

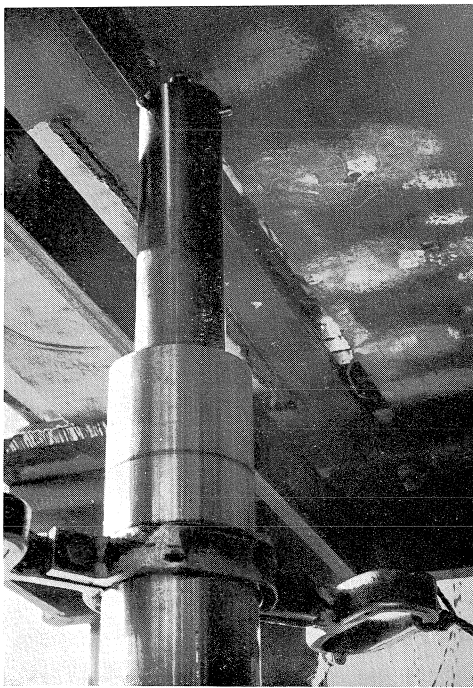


Fig. 3. De vijzel nabij de vrij zwevende rand.

Gewapend Beton- en Staalconstructies de laatste jaren heeft plaatsgevonden, is bedoeld om voornamelijk langs experimentele weg voor verschillende gevallen uitkomsten te verschaffen, terwijl anderzijds bepaalde rekencodes en resultaten van berekeningen van anderen (waarvan enkele tijdens het onderzoek verschenen) geverifieerd konden worden. Een publicatie van de eerste resultaten heeft reeds plaats gevonden in de Publication Préliminaire van het vierde congres van de A.I.P.C. te Cambridge en Londen in September 1952.

Wanneer men de resultaten van een experimenteel onderzoek wenst te toetsen aan de uitkomsten van een elasticiteitstheorie, is het noodzakelijk, dat het modelmateriaal voldoet aan de praemissen, waar deze theorie van uitgaat, t.w.: homogeen, isotroop, en gehoorzaamend aan de Wet van Hooke. Dit is

de voornaamste reden dat tot een model van staal is besloten. Voorts is het vervaardigen van een model op verkleinde schaal, zodat het ook representatief is, in staal eenvoudiger dan in beton en is het meten hieraan gemakkelijker. Bij de interpretatie van de resultaten op platen van gewapend beton ziet men zich nu voor de moeilijkheid geplaatst dat dit materiaal niet aan de bovengenoemde praemissen voldoet. Men kan echter wél zeggen, dat de momenten buiten de onmiddellijke omgeving van de geconcentreerde last voldoende overeenstemming zullen bezitten. Onder de geconcentreerde last is de interpretatie moeilijker. Verschijnselen als krimp, kruip, plasticiteit e.d. hebben bovendien invloed. Al deze factoren bij elkaar hebben nog zoveel onbekende facetten, dat de problemen die er mee samenhangen zelfs voor een eenvoudige balkconstructie nog niet zijn opgelost, laat staan dus voor een inwendig oneindigvoudig statisch onbepaalde constructie als een plaat is.

Het blijft dus nodig zoveel mogelijk de uitkomsten volgens de elasticiteitstheorie te vergelijken met die van proeven op gewapend betonplaten. De tot nog toe in diverse landen verrichte proeven verstrekken hiertoe waardevolle gegevens. Zij betreffen echter slechts een beperkt aantal gevallen. Hieruit mag echter wel worden geconcludeerd dat het bij het ontwerpen veilig is om te rekenen op de momenten volgens de elasticiteitstheorie en dat er aanleiding is de vraag te beschouwen in hoeverre het verantwoord is van de elasticiteitstheorie af te wijken in voordelige zin. Aanvullende metingen op bestaande constructies en voortgezette proeven op gewapend betonplaten zullen echter ook hier enig licht kunnen verschaffen.

Het hier volgend artikel zal zich beperken tot de elasticiteitstheorie en het probleem der voornoemde afwijkingen buiten beschouwing laten. Dit zeer belangrijke probleem behoeft nog nader onderzoek.

Berekeningen volgens de elasticiteitstheorie geven echter in diverse gevallen aanleiding tot lichtere constructies dan volgens de G.B.V. 1950 zouden worden verkregen. Hierop zal t. z. t. in een artikel nog nader worden ingegaan.

Het model, de opzet en de uitvoering van het experiment

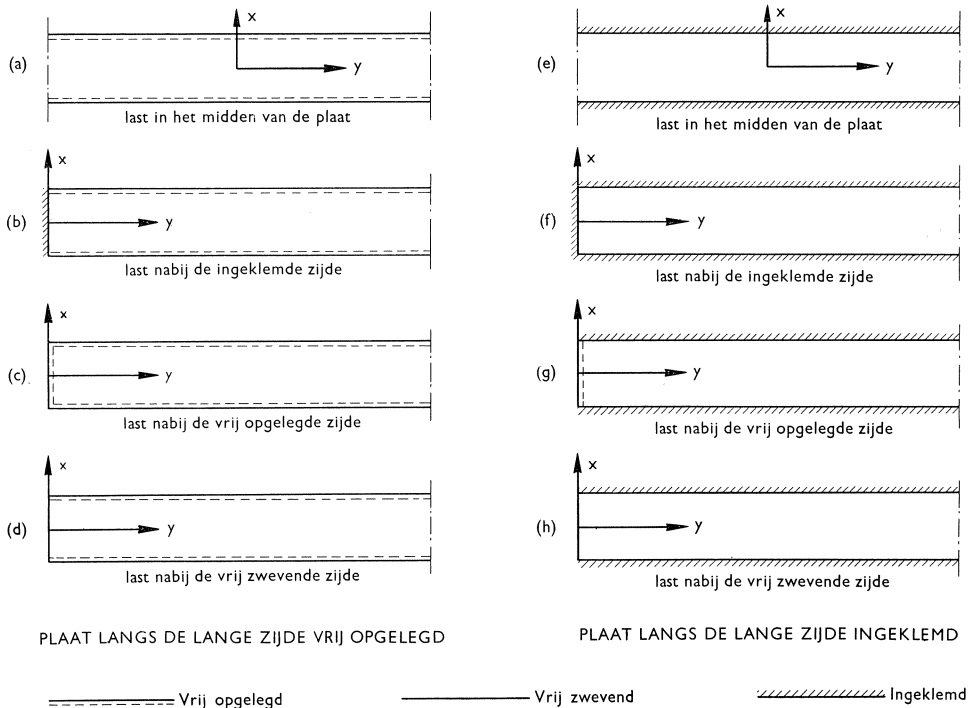
Het stalen model bestaat uit twee horizontaal gelegen rechthoekige platen van St 37, (Fig. 1 en 2). Eén van deze platen wordt gevormd door het lijf van een DIN 100 met een lengte van 580 cm; de lijfdikte bedraagt ongeveer 1,9 cm. Door aangelaste U-profielen is de wringingsstijfheid van de flenzen van de balk aanmerkelijk vergroot. Deze lijfplaat kan langs de lange zijden als volledig ingeklemd worden beschouwd. De andere plaat met een lengte van 506 cm en een dikte van ongeveer 1,9 cm, is langs de lange zijden vrij opgelegd. De afstand tussen deze opleggingen bedraagt 92 cm.

Beide platen zijn verticaal boven elkaar in een stijf raamwerk verenigd. Langs één van de beide korte zijden zijn de platen ingeklemd, langs de andere waren zij vrij opgelegd. Deze laatste ondersteuningsconstructies konden worden weggebrand, zodat de platen langs deze beide (korte) zijden vrij zwevend werden.

Om lasspanningen te elimineren is het gehele model éénmaal uitgloeid.

Met het model konden dus de volgende typen van randvoorwaarden worden onderzocht (fig. 4).

Fig. 4



De belasting werd aangebracht met behulp van een vijzel met oliedruk, die verticaal tussen de twee platen werd geplaatst (fig 3). Om de oliedruk constant te houden werd een drukaccumulator ingeschakeld.

De grootte van de door de vijzel uitgeoefende kracht werd met behulp van een dynamometer, werkend m. b.v. rekstrookjes, gemeten. Er werd steeds bij één grootte van de belasting (ca. 1500 kg) gemeten, daar bij inleidende metingen het lineair verband tussen de grootte van de belasting en de optredende rekken in de plaat was geverifieerd.

De spanningen en de momenten in de plaat werden bepaald uit rekmetingen met behulp van weerstandsrekstrookjes. De kleine meetlengte (bij de toegepaste rekstrookjes in het algemeen 12 mm), de aflezing in één centraal punt, en het gedurende zeer lange tijd bruikbaar zijn voor het verrichten van metingen, betekenden hier evenzovele voordelen in de meettechniek.

Om het moment in één richting te kennen moeten de rekken in deze en de daar loodrecht op staande richting bekend zijn. De momenten kunnen dan worden bepaald met behulp van de betrekkingen

$$M_x = \sigma_x \cdot W = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \cdot \frac{1}{6} h^2$$

$$M_y = \sigma_y \cdot W = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \cdot \frac{1}{6} h^2$$

Hoewel er zgn. „strain-rosettes” bestaan, waarmee in één punt de rekken in twee of meer richtingen gemeten kunnen worden, zijn deze niet toegepast daar ze moeilijk verkrijgbaar en zeer kostbaar zijn. Bij de eerste metingen, op het middenveld van de vrij opgelegde plaat, werd nu gebruik gemaakt van de symmetrie van het model in de richting loodrecht op de korte overspanning (de plaat werd oneindig breed gedacht). In ieder meetpunt werd slechts de rek in één richting gemeten. Door het kiezen van een doelmatig schema kon echter steeds een ε_x -waarde van een meetpunt gecombineerd worden met een ε_y -waarde van een meetpunt dat t.o.v. de last symmetrisch was gelegen en omgekeerd. Een verschil in plaatdikte in de beide punten kon zo echter een foutenbron bij de berekening van de momenten zijn. Proefnemingen toonden aan, dat het mogelijk was de rekstrookjes kruislings over elkaar te plakken, waarbij betrouwbare uitkomsten werden verkregen. Bij de volgende metingen werd dan ook steeds deze methode gevolgd en werden dus de onderling loodrechte rekken in hetzelfde punt gemeten, waardoor het meetprogramma aanmerkelijk bekort werd.

Het verrichte experimentele onderzoek kan in grote lijnen in twee delen worden gesplitst:

1. Onderzoek naar de invloed van de grootte van het belaste oppervlak (de concentratie van de belasting dus) op de momenten.
2. Onderzoek naar de spanningsverdeling in de plaat als functie van de randvoorwaarden en van de plaats van de belasting.

Notaties.

a	=	l	=	overspanning van de plaat
h	=			dikte van de plaat
E	=			elasticiteitsmodulus van het modelmateriaal
ν	=			dwarscontractiecoëfficiënt van het modelmateriaal
P	=			grootte van de (geconcentreerde) belasting
D	=	$2e$	=	diameter van de belasting
e/a	=			concentratie van de belasting
e'	=			fictieve straal door „belastings-spreiding” volgens Westergaard
β	=			verdeelde belasting per m ²
x	=			coördinaat in overspanningsrichting
y	=			coördinaat loodrecht op de overspanningsrichting
x_i	=			doorsnede van de plaat loodrecht x -as
y_i	=			doorsnede van de plaat loodrecht y -as
ϵ_x	=			rek in x -richting
ϵ_y	=			rek in y -richting
σ_x	=			normaalspanning in x -richting
σ_y	=			normaalspanning in y -richting
M_x	=			moment per eenheid van lengte in een doorsnede loodrecht op de x -richting
M_y	=			moment per eenheid van lengte in een doorsnede loodrecht op de y -richting
W	=			weerstandsmoment van de plaat
K	=	$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	=	buigingsstijfheid van de plaat

Punt 1 houdt in dat de grootte van het belaste oppervlak wordt gevarieerd. De belasting werd bij de metingen aan het vrij opgelegde en het ingeklemde middenveld (a en e) achtereenvolgens dan ook overgebracht via een kogel (dit benadert het fictieve geval van een puntlast) en via cirkelvormige drukstukjes met diameter D van 1,6 cm, 3,6 cm, 5,4 cm en 7,6 cm (de verhouding straal drukstukje/overspanning: e/a bedroeg hierbij respectievelijk 0,0024, 0,0087, 0,0195, 0,0293 en 0,0411). De vormgeving van de drukstukjes was zodanig dat een zoveel mogelijk gelijkmatig verdeelde belasting werd verkregen.

Om hieraan nog meer tegemoet te komen werden bij de metingen aan de middenvelden (a en e) ook nog onderzoeken gedaan met verschillende tussenlagen, t.w. dun carton (3 mm), dun rubber (3 mm), dik rubber (11 mm), geperforeerd dun rubber (3 mm), geperforeerd dik rubber (11 mm) en twee lagen dun rubber (2×3 mm). De invloed van de tussenlaagjes bleek sterk afhankelijk te zijn van de diameter van het gebruikte

drukstukje, maar het is niet mogelijk gebleken aan te tonen bij welke toestand de gelijkmatig verdeelde belasting het meest benaderd werd. Wel bleek duidelijk dat carton steeds een gemiddelde waarde gaf. Steeds zijn dan ook deze waarden in latere grafieken uitgezet. Bij de metingen aan de eindvelden werd daarom dan ook uitsluitend carton als tussenlaag gebruikt. Voorts werd bij de eindvelden uitsluitend een diameter $D = 1,6$ cm voor het drukstukje toegepast, omdat het onderzoek naar de invloed van de concentratie van de belasting bij de metingen aan de middenvelden reeds voldoende was gebleken.

Punt 2 houdt in dat de belasting in de diverse meetvelden in verschillende punten wordt geplaatst.

Voor de interpretatie van de metingen is het voorts nodig van de plaat te kennen: de dikte, de elasticiteitsmodulus en de contractiecoëfficiënt.

De dikte van de platen werd in ieder meetpunt met behulp van een kathetometer bepaald. In ieder meetveld werd met een gemiddelde dikte gerekend, die tot op $1/20$ mm nauwkeurig was gemeten.

Voor de bepaling van de elasticiteitsmodulus en de contractiecoëfficiënt, werden uit het materiaal van beide platen een aantal proefstaven vervaardigd. Deze werden in een trekbank stapsgewijze belast, terwijl de optredende rekken bij elke opvolgende belasting werden gemeten met weerstandsrekstrookjes, Huggenberger-rekmeters en Martins-spiegelrekmeters. De spreiding in de resultaten was vrij groot.

Besloten werd voor beide grootheden de afgeronde gemiddelde waarden aan te houden: $E = 2,15 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ en $\nu = 0.3$.

De meetresultaten

A. *De middenvelden van de langs de lange zijden vrij opgelegde resp. ingeklemde plaat, (gevallen a en e),*

1. *De invloed van de concentratie op de maximale momenten.*

In figuur 5 zijn de quotiënten M_x/P en M_y/P onder de last gegeven als functie van de concentratie (de verhouding e/a) van de last, wanneer deze zich in opvolgende punten van de overspanning bevindt.

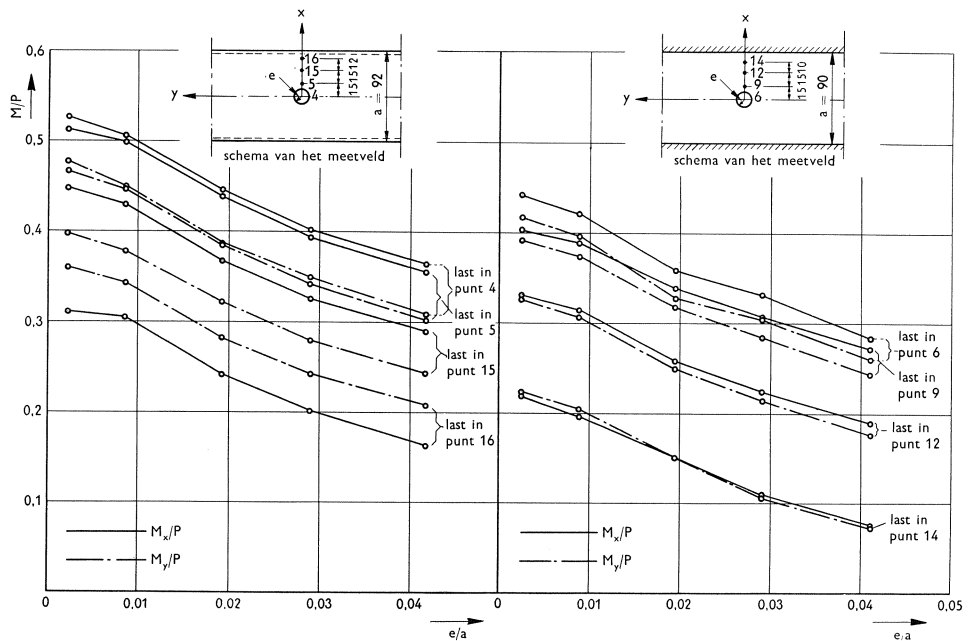


Fig. 5. De momenten onder de last als functie van de concentratie e/a

Last in de punten 4, 5, 15 en 16 van het middenveld van de zeer brede, aan twee zijden vrij opgelegde plaat (meetveld a). Tussenlaag carton.

Last in de punten 6, 9, 12 en 14 van het middenveld van de zeer brede, aan twee zijden ingeklemde plaat (meetveld e). Tussenlaag carton.

De momentenlijnen vertonen allen hetzelfde verloop (nagenoeg recht en onder dezelfde helling), slechts het niveau is verschillend.

Bij de vrij opgelegde plaat blijkt tussen de momenten M_x en M_y in eenzelfde punt een constant verschil te bestaan, dat voor de punten 4, 5 en 15 vrijwel gelijk is en waarbij M_x steeds groter is dan M_y . Een uitzondering hierop vormt het punt 16, vermoedelijk door storingsen van de rand, waar het vlak bij is gelegen. Dit punt is verder echter van weinig belang.

Voor de ingeklemde plaat gelden overeenkomstige conclusies. Het niveau van de lijnen is hier door de inklemming langs de rand gedaald.

2. *De invloedssfeer van de concentratie.*

In figuur 6 zijn voor de vrij opgelegde en voor de ingeklemde plaat uitgezet de momenten onder de last en in de naaste omgeving daarvan voor verschillende concentraties van de last als deze zich in het midden van de overspanning bevindt.

Bij de gebruikte concentraties $e/a = 0,0024$ tot $e/a = 0,0411$ bleek buiten een gebied met een straal van 5 à 10 cm, d.i. $1/20$ à $1/10$ van de overspanning, rond het zwaartepunt van het belaste oppervlak geen merkbare invloed van de grootte van de concentratie op de grootte van de momenten meer op te treden.

3. *De invloed van de tussenlaag.*

Als illustratie zijn in fig. 7 voor de vrij opgelegde en voor de ingeklemde plaat gegeven de momenten onder de last bij verschillende concentratie wanneer geen tussenlaag, dan wel 3 mm carton of 3 mm rubber als tussenlaag werd gebruikt. De last stond in het midden van de overspanning. Carton bleek voortdurend een gemiddelde waarde te geven, wat echter nog niet inhoudt dat de belastingsverdeling daarmee gelijkmatig zou zijn. Bij volgende metingen werd, ook om meettechnische redenen, steeds carton als tussenlaag gebruikt.

4. *De momentenverdeling in de plaat.*

In de figuren 8 en 9 zijn de verkregen momenten uitgezet. Uiteraard kwam steeds in de betrokken doorsnede het grootste moment onder de last voor. De piekwaarden van de momenten behoren bij een lastdiameter $D = 1,6$ cm (zie 2) bij gebruik van een tussenlaag van carton (zie 3). Buiten de naaste omgeving van de last gelden de momentenlijnen dus universeel.

De vorm van de momentenpieken is voor alle gevallen vrijwel gelijk. Opvallend is dat het maximummoment in het middengedeelte van de plaat zo weinig door de randvoorwaarden wordt beïnvloed en dat de maximummomenten bij verplaatsing van de last naar de rand aanvankelijk zo weinig afnemen.

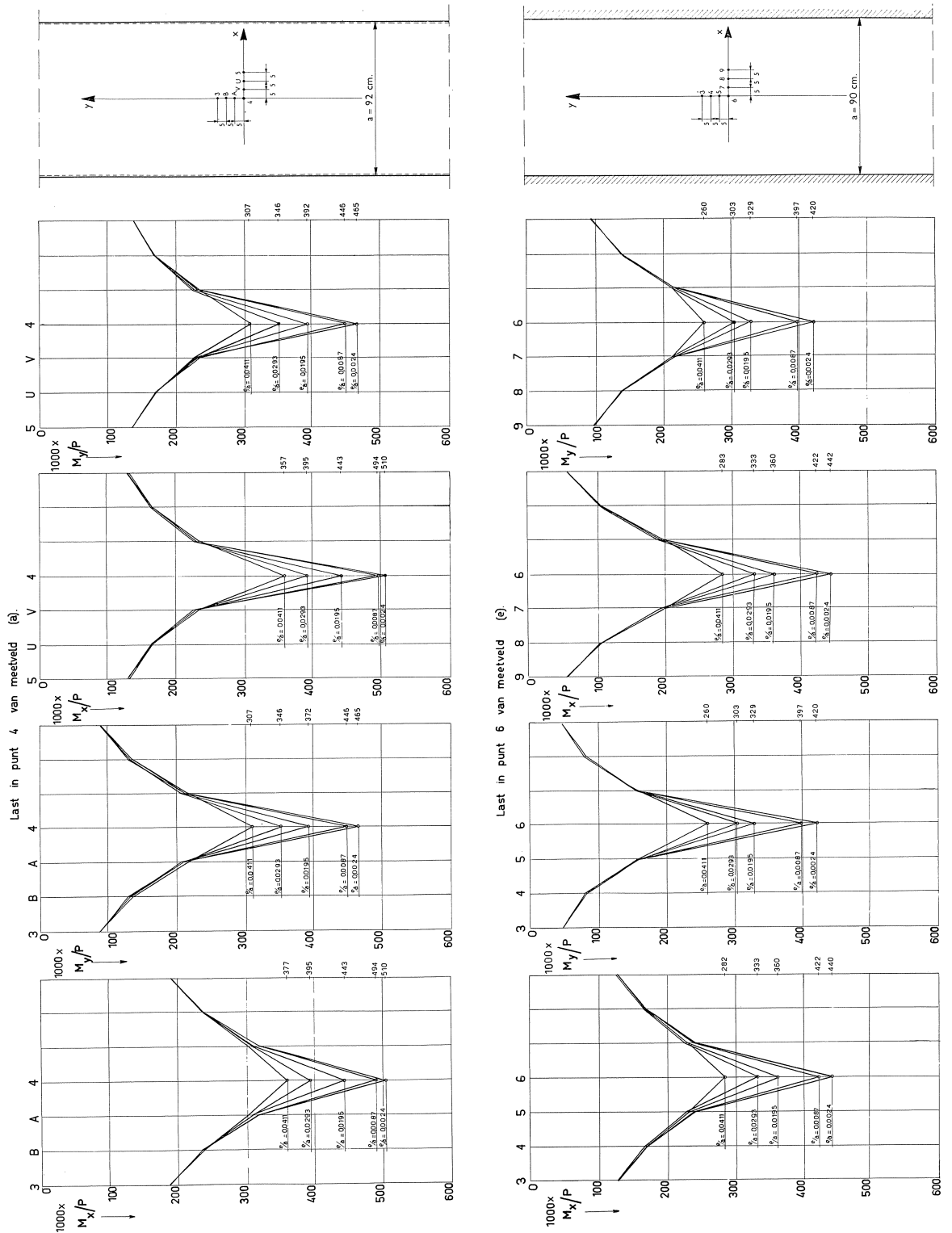


Fig. 6. De invloed van de grootte der concentratie op het verloop van M_x/P en M_y/P in de naaste omgeving van de last. Tussenlaag carton.

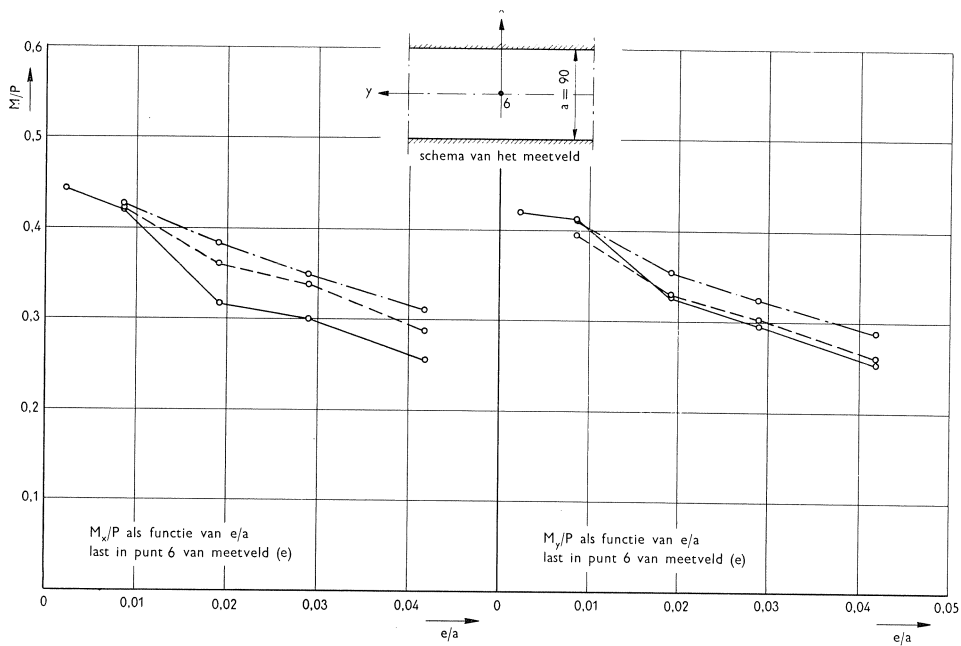
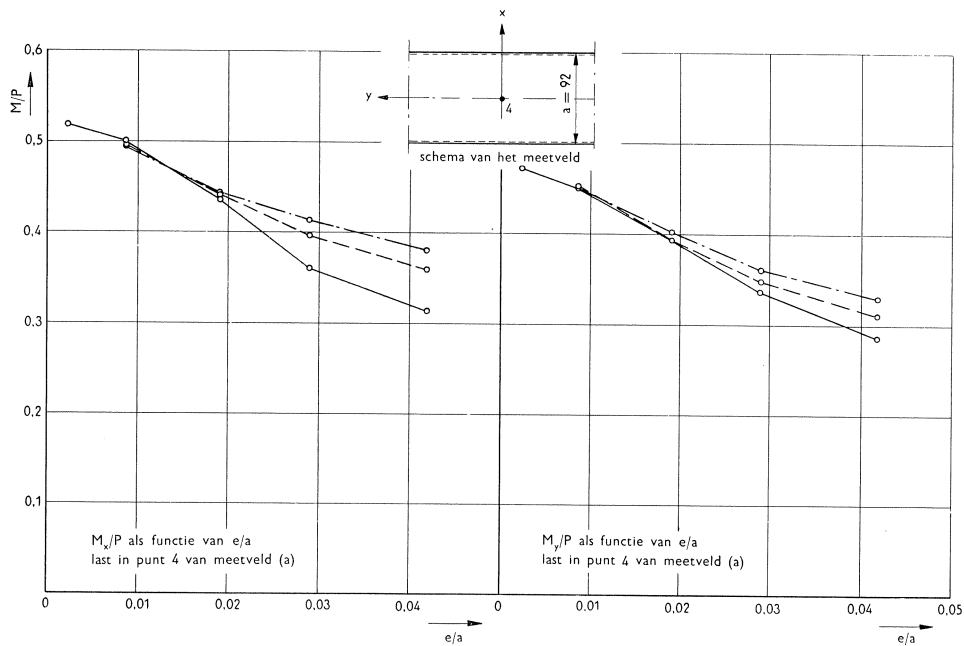
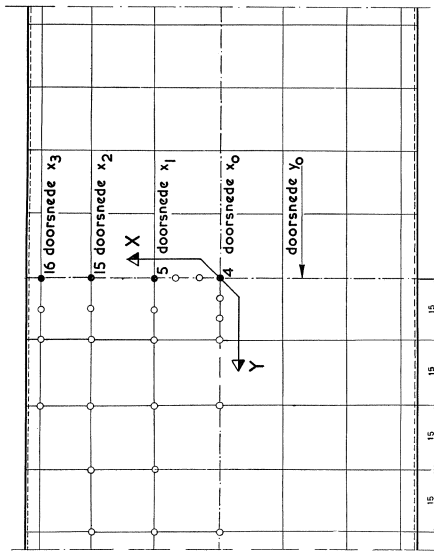


Fig. 7. De invloed van de tussenlaagjes op de momenten M_x/P en M_y/P onder de last bij verschillende concentraties.

Tussenlaag: geen : _____
 3 m.m. carton : - - - - -
 3 m.m. rubber : - . - . - .

MOMENTENLIJNEN VERKREGEN UIT METINGEN AAN HET
MIDDENVELD VAN DE ZEER BREDE AAN TWEE ZIJDEN
VRIJ OPGELEGEDE PLAAT.
(MEETVELD a)

a = 92 cm



Verloop van M_x/P en M_y/P in doorsnede x_0 last in punt 4 (0,0)
in doorsnede x_1 last in punt 5 (5,0)
in doorsnede x_2 last in punt 15 (30,0)
in doorsnede x_3 last in punt 16 (42,0)
in doorsnede y_0 last resp. in punt
4 (0,0) 5 (5,0)
15 (30,0) 16 (42,0)

lastdiameter $D = 16$ cm ($\xi = 0,00087$)
tussenlaag carton

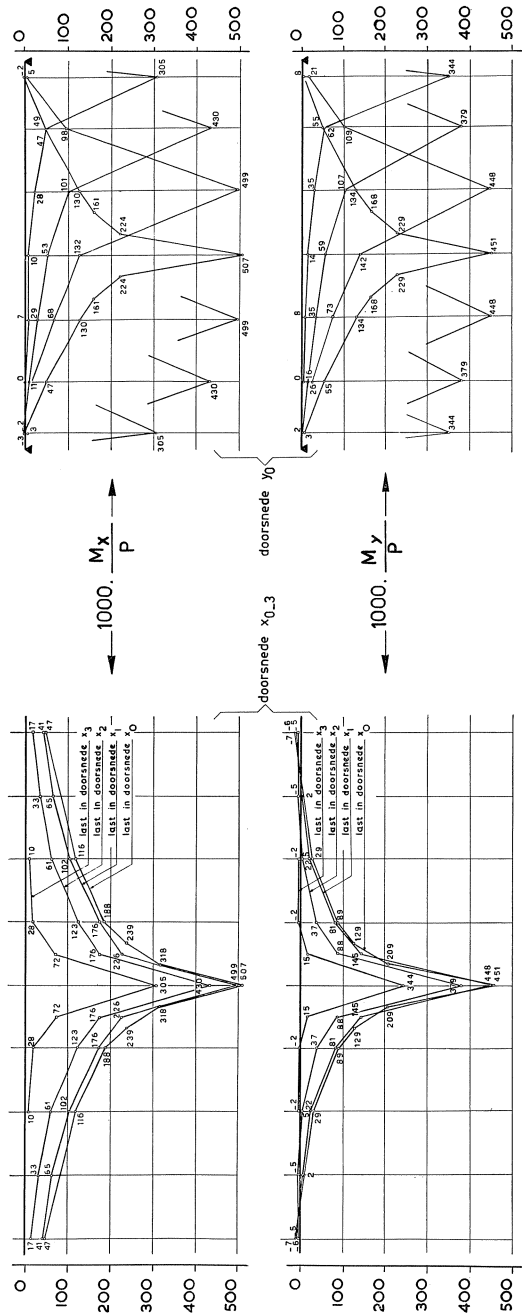
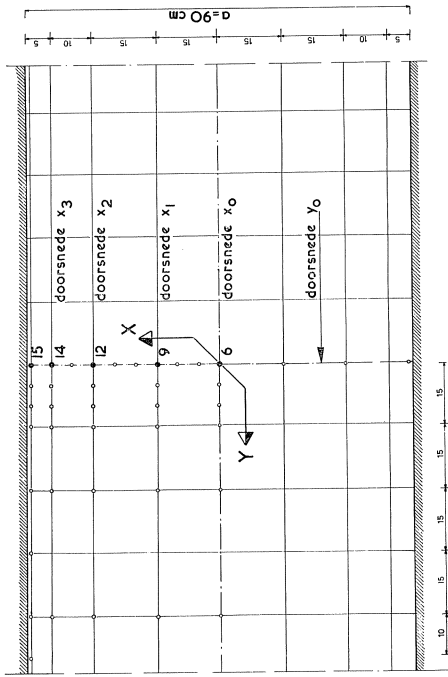


Fig. 8.

MOMENTENLIJNEN VERKREGEN UIT METINGEN AAN HET MIDDENVELD VAN DE ZEER BREDE AAN TWEZ ZUDEN INGEKLEMD E PLAAT.
(MEETVELD θ)



verloop van M_x/P en M_y/P in doorsnede x_0 : last in punt 6 (0.0)
 in doorsnede x_1 : last in punt 9 (15.0)
 in doorsnede x_2 : last in punt 12 (30.0)
 in doorsnede x_3 : last in punt 14 (40.0)
 in doorsnede y_0 last resp. in punt
 6 (0.0) 9 (15.0)
 12 (30.0) 14 (40.0).

lastdiameter $D = 1.6 \text{ cm}$ ($\frac{D}{\lambda} = 0.0087$)
 tussenlaag: carton

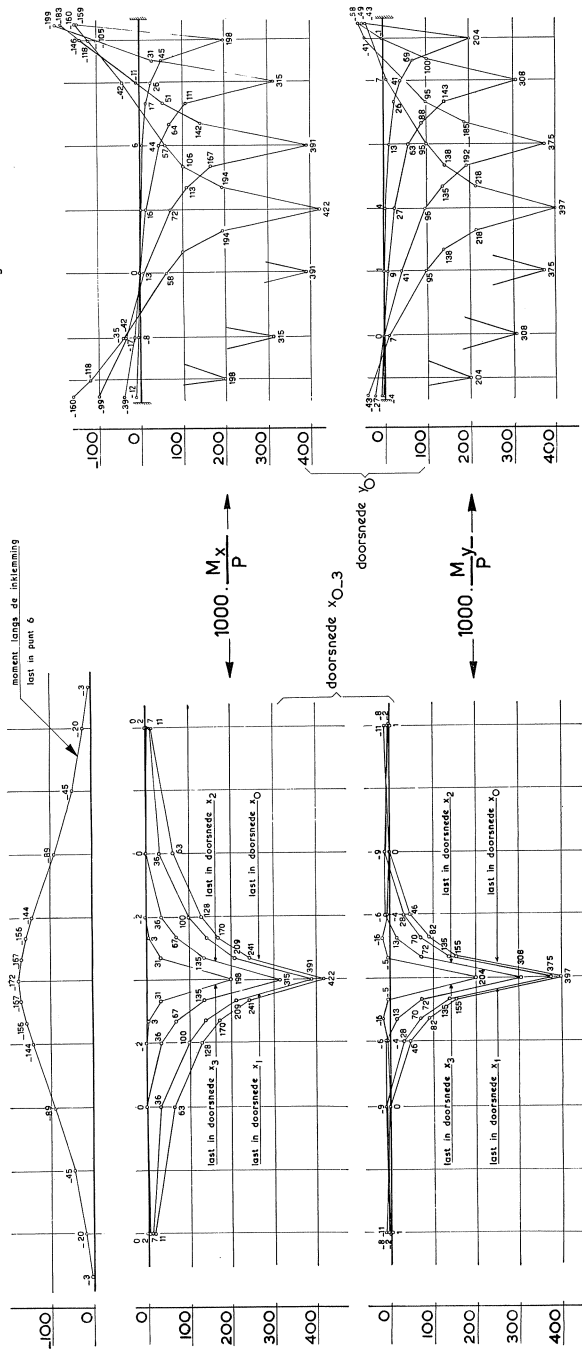


Fig. 9.

5. *De nauwkeurigheid van de metingen.*

De reproduceerbaarheid was vrijwel steeds zeer goed. Door de in de grafieken uitgezette, gemeten waarden kunnen in het algemeen zeer behoorlijke continue krommen worden getrokken. Bij een onderzoek naar de nauwkeurigheid van de metingen bleek de procentuele standaardfout in de waarde M/P onder de geconcentreerde last 5% te bedragen. Buiten de momentenpiek is de absolute standaardafwijking aanzienlijk kleiner, t.w. 0,002 à 0,004.

6. *De interpretatie van de meetresultaten.*

Daar de beschouwde middenvelden zeer breed zijn, kunnen de momentenlijnen in x -doorsneden tevens worden beschouwd als invloedslijnen. Voor de vrij opgelegde platen geldt trouwens algemeen, met betrekking tot de momenten, de wederkerigheidswet van Maxwell, welke in de meetresultaten gemakkelijk is te verifiëren, zodat voor meetveld (a) (het middenveld van de langs de lange zijden vrij opgelegde plaat) ook de momentenlijnen in de y -doorsnede tevens invloedslijnen zijn. Bij de metingen werden uitsluitend cirkelvormige belastingsoppervlakjes toegepast. In de praktijk komen echter ook vaak streeplaten voor. Door een aantal cirkelvormige belastingen naast of achter elkaar geplaatst te denken kan men dus m.b.v. bovenstaande eigenschap ook de momenten t.g.v. een streepvormige belasting berekenen.

De in de grafieken gegeven waarden van de momenten kunnen voor een materiaal met andere dwarscontractie-coëfficiënt $\bar{\nu}$ (b.v. beton $\bar{\nu} = 1/6$), doch dat eveneens homogeen en isotroop is en voldoet aan de wet van Hooke, worden omgerekend m.b.v. de volgende formules

$$M_x^r = \frac{(1 - \nu\bar{\nu}) M_x^r + (\bar{\nu} - \nu) M_y^r}{1 - \nu^2}$$

en

$$M_y^r + \frac{(1 - \nu\bar{\nu}) M_y^r + (\bar{\nu} - \nu) M_x^r}{1 - \nu^2},$$

waarin M_x^r en M_y^r de uit de gemeten rekken berekende waarden zijn en ν de dwarscontractiecoëfficiënt van het modelmateriaal is (i.c. $\nu = 0,3$).

7. *Vergelijking van de meetresultaten met uitkomsten van de theorie.*

Daar de theorie zich het eenvoudigst laat oplossen voor de zogenaamd oneindig brede platen, die dus te vergelijken zijn met de tot nu toe beschouwde beide middenvelden, zijn de meetresultaten van deze velden en de uitkomsten van de theorie vrij uitvoerig met elkaar vergeleken.

a. De vrij opgelegde plaat.

Hierbij werden aan een nadere beschouwing onderworpen:

1. de spanningsverdeling buiten de naaste omgeving van de last,
2. de spanningsverdeling in de naaste omgeving en onder de last,
3. het statisch evenwicht in een doorsnede.

Ad. 1. De berekeningen volgens de elementaire plaattheorie komen steeds neer op het oplossen van de biharmonische differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{K},$$

zodanig dat aan de randvoorwaarden van het probleem is voldaan.

Voor een puntlast luidt de oplossing in het beschouwde geval (zie ook fig. 10) (lit. 4, 6, 7 en 8):

$$\left. \begin{array}{l} M_x/P \\ M_y/P \end{array} \right\} = \frac{1 + \nu}{8\pi} \ln \frac{A}{B} \pm \frac{(1 - \nu)}{8a} y \sinh \frac{\pi y}{a} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right)$$

waarin:

$$A = \cosh \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi(x - \nu)}{a}$$

en

$$B = \cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x + \nu)}{a},$$

een formule, waaruit de reeds eerder genoemde wederkerigheidswet direct blijkt door verwisseling van de punten $(-\nu, 0)$ en (x, y) .

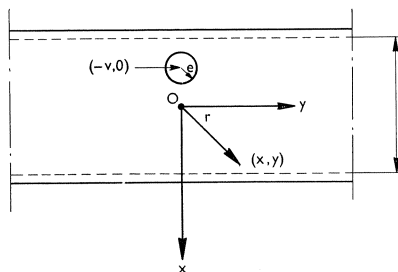


Fig. 10.

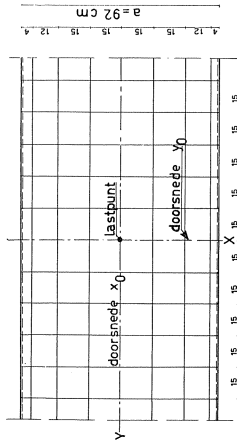
In fig. 11 zijn enkele resultaten van deze vergelijkingsberekeningen weergegeven t.w. de momenten M_x en M_y in de doorsneden x_0 en y_0 wanneer de last in het punt $0,0$ staat. De overeenstemming tussen experiment en theorie blijkt zeer goed te zijn.

Voor het experiment zijn hier de waarden, gemeten met een kogel, uitgezet, omdat deze het meest de puntlast benadert.

Ad. 2. Bij de elementaire theorie wordt de invloed van de normaal- en schuifspanningen loodrecht op het vlak van de plaat verwaarloosd, wat echter bij puntlasten en ook bij zeer sterk geconcentreerde belastingen tot te grote momenten leidt.

Bij een — fictieve — puntlast zouden de momenten en dus de spanningen onder de last zelfs oneindig groot worden. Er treedt echter altijd een zekere belastingsspreiding op. Dit „dikte effect” kan in rekening gebracht worden. Westergaard (lit. 8) heeft de resultaten van deze theorie voor dikke platen overgebracht in de notaties van de elementaire plaattheorie, waardoor op eenvoudige wijze de belastingsspreiding in rekening kan worden gebracht. De totale belasting P , die aangrijpt op een cirkelvormige oppervlakte met straal e , wordt verdeeld gedacht over een oppervlak met straal e' , die zodanig wordt vastgesteld dat de spanningen berekend volgens de elementaire plaattheorie overeenkomen met die volgens de theorie voor dikke platen met het werkelijk belaste oppervlak e . Voor waarden van $D = 2e < 3,45 h$ kan de fictieve straal e' met voldoende nauwkeurig-

MOMENTENLJNEN VERKREGEN UIT METINGEN VERGELEKEN MET
DIE VOLGENS DE ELEMENTAIRE PLAAATTHEORIE.



Puntlast (kogel) in het midden van de zeer brede, aan twee zijden vrij opgelegde plaat
(meetveld a)

--- Volgens elementaire plaattheorie. — Volgens metingen.

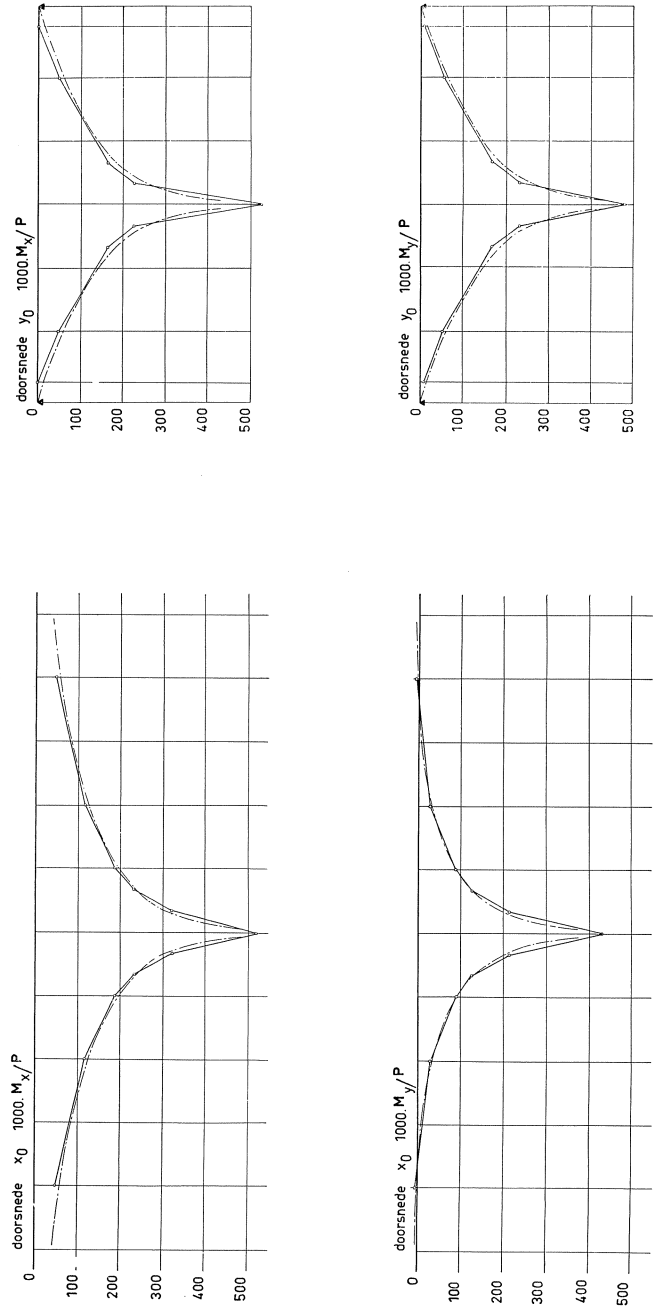


Fig. 11.

heid worden berekend met de formule $e' = \sqrt{1,6 e^2 + h^2} - 0,675 h$. Voor waarden van $D > 3,45 h$ mag $e' = e$ gesteld worden en geeft volgens Westergaard de elementaire plaattheorie voldoende betrouwbare uitkomsten. De momenten worden dan berekend m.b.v. de volgende formules (zie fig. 10):

$$\frac{M_x/P}{M_y/P} = \frac{1 + \nu}{4\pi} \left\{ \ln \left(\frac{2a}{\pi e'} \cos \frac{\pi \nu}{a} \right) + \frac{1}{2} \right\} \pm \frac{(1 - \nu)}{8\pi}$$

Voor de gevallen dat de last in verschillende punten van de overspanning staat, zijn bij verschillende concentraties van de last de uitkomsten volgens Westergaard vergeleken met de meetresultaten (fig. 12). De overeenstemming blijkt zeer goed te zijn. De verschillen worden wat groter naarmate de last dicht bij de oplegging komt. Een betekenende afwijking treedt op in punt 16, maar dit punt ligt te dicht bij de rand, zodat storingen, hetzij door onnauwkeurigheden in het model, hetzij door de invloed van niet te verwaarlozen schuifspanningen hiervan de oorzaak kunnen zijn.

Voor het geval de last in het midden van de overspanning staat zijn ook nog de momenten M_x , berekend volgens de elementaire plaattheorie, uitgezet. De afwijkingen in de uitkomsten hiervan beginnen bij deze *dunne* plaat slechts van belang te worden bij een concentratie $e/a < 0,01$.

Ad. 3. Een goede controle van de meetresultaten verkrijgt men door het totaal statisch moment in een doorsnede te bepalen. Staat een puntlast P in het midden van de overspanning dan moet dit totale statische moment in de middendoorsnede x_0 gelijk zijn aan $1/4 P l$. Is de last verdeeld over een oppervlak met eindige afmetingen i.c. $D = 1,6$ cm, dan wordt dit moment iets minder. Het gemeten momentenvlak voor M_x is uiteraard niet compleet. Het ontbrekende gedeelte werd aangevuld met de uitkomsten der theorie. Een grote fout kan hierdoor niet gemaakt worden omdat de betreffende waarden reeds klein zijn en er in dit gebied een goede overeenstemming tussen theorie en metingen bestaat. De aldus verkregen momentenlijn werd numeriek geïntegreerd m.b.v. de regel van Simpson en de uitkomst bleek minder dan 1% te verschillen van de op bovenvermelde wijze berekende waarde van het statisch moment.

b. De ingeklemde plaat.

Ook hiervoor werden weer geverifieerd:

1. de spanningsverdeling buiten de naaste omgeving van de last,
2. de spanningsverdeling in de naaste omgeving en onder de last,
3. het statisch evenwicht in een doorsnede.

Ad. 1. Door het optreden van inklemmingsmomenten langs de randen worden de veldmomenten, vergeleken met de vrij opgelegde plaat, gereduceerd. Het inklemmingsmoment wordt bij de gebruikte concen-

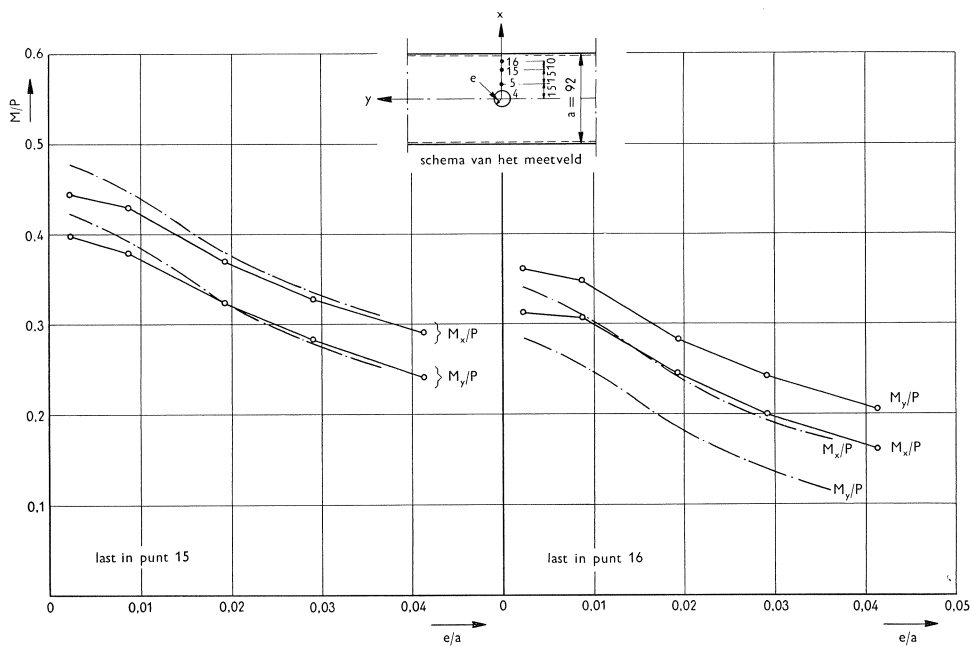
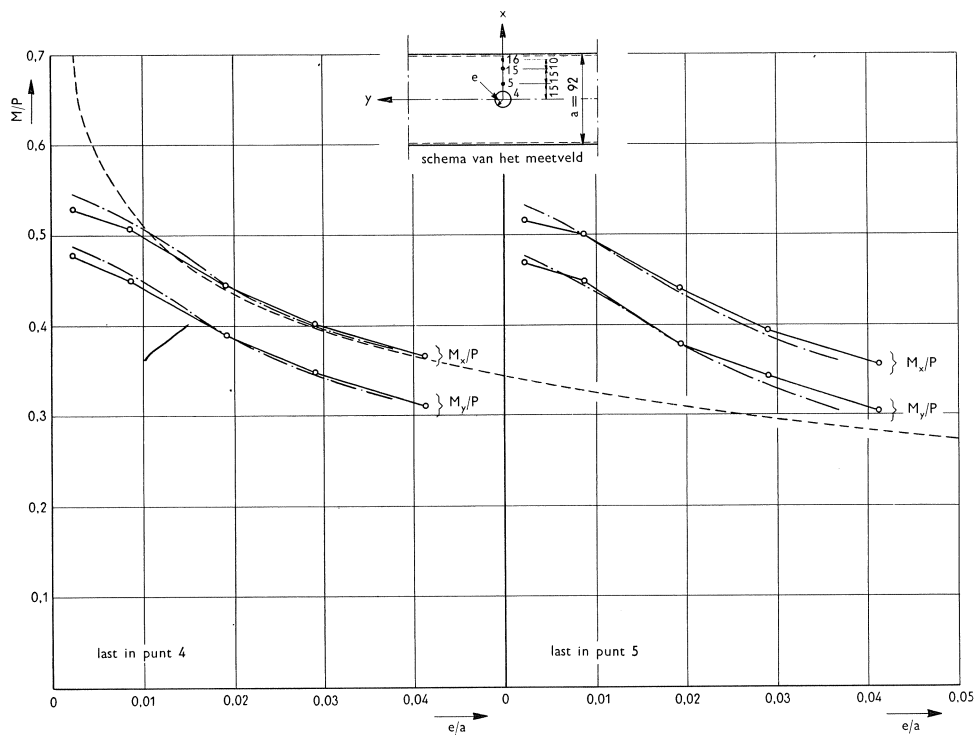
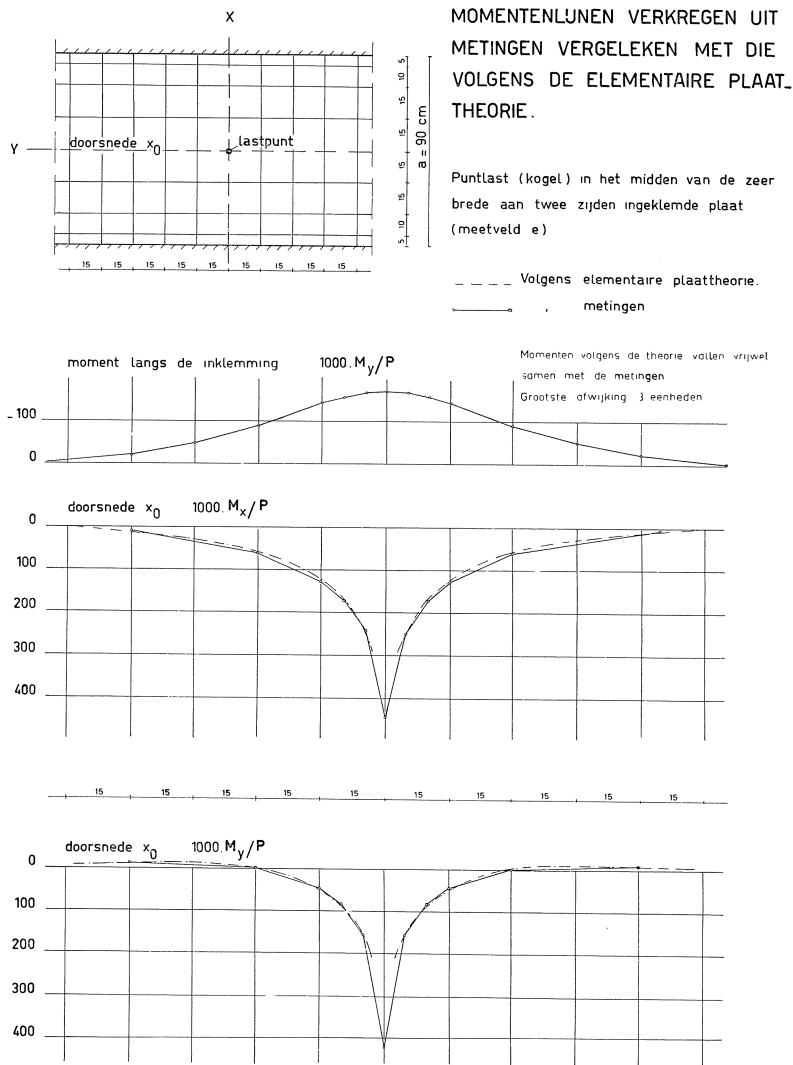


Fig. 12. Vergelijking van meetresultaten met uitkomsten volgens de elementaire plaattheorie en de theorie van Westergaard. Uitgezet is het verloop van de momenten onder de last als functie van de concentratie e/a als de last in enkele punten van de overspanning van de zeer brede, aan twee zijden vrij opgelegde, plaat staat. Tussenlaag carton.

- — — — — Volgens metingen.
- . - . - . Volgens Westergaard ($\nu=0,3$).
- - - - - Volgens elementaire plaattheorie ($\nu=0,3$).

traties nagenoeg niet beïnvloed door de grootte van het belaste oppervlak. De reducties van de veldmomenten zullen hiervan dus ook onafhankelijk zijn. In de literatuur (8) worden hiervoor formules gegeven. De met behulp hiervan berekende veldmomenten kunnen weer met de gemeten waarden worden vergeleken. In fig. 13 zijn enkele resultaten hiervan weergegeven. De overeenstemming blijkt zeer goed te zijn. Bij de controle van het inklemmingsmoment zelf doet zich de moeilijkheid voor, dat niet precies is te zeggen in welk punt (af rondingen in de hoeken!) de plaat als ingeklemd dient te worden beschouwd. Voorts is het laatste rekstrookje op enige afstand van de rand geplakt zodat het

Fig. 13.



moment ter plaatse van het aangenomen inklemmingspunt slechts door een, zij het geringe, extrapolatie kan worden bepaald. De metingen leiden dan tot een waarde $M_x/P = 0,172$ voor het maximum inklemmingsmoment, wat ondanks alles goed overeenstemt met de theoretische waarde $M_x/P = 0,169$. Het verloop van het inklemmingsmoment langs de rand van een oneindig brede plaat is ontleend aan literatuur (5) en blijkt treffend overeen te stemmen met de gemeten waarden (fig. 13).

Ad. 2. Ook de momenten onder de geconcentreerde last kunnen op de bovenbeschreven manier door reductie uit de overeenkomstige momenten bij de vrij opgelegde plaat worden berekend. Voor het geval dat de last in het midden van de overspanning staat zijn voor de gebruikte concentraties deze berekeningen uitgevoerd. De resultaten hiervan stemden zeer goed overeen met de gemeten waarden.

Ad. 3. Ook de controle op het totaal statisch moment in de middendoorsnede leverde een bevredigende overeenstemming tussen theorie en experiment (tot op $\approx 4\%$).

B. *De eindvelden.*

Bij de beide middenvelden werd allereerst een onderzoek ingesteld naar de invloed van de grootte van de concentratie van de belasting op de momenten in de naaste omgeving van de last.

De invloedssfeer bleek zeer beperkt te zijn. Aangenomen kan worden dat het verloop van de lijnen, die het verband geven tussen de momenten onder de last en de concentratie van de last, steeds gelijkvormig zal zijn, terwijl het niveau hiervan afhankelijk zal zijn van de randvoorwaarden en de plaats van de last. Het onderzoek naar deze invloed werd hiermee afgesloten.

Bij de metingen aan deze eindvelden werd dus slechts een onderzoek ingesteld naar de momentenverdeling in de plaat bij verschillende standen van de last. Voor de last werd dus slechts één concentratie toegepast, t.w. $D = 1,6$ cm ($e/a = 0,0087$), terwijl als tussenlaag carton werd gebruikt. Met deze metingen wordt van de bovengenoemde lijnen dus het niveau bepaald, door één punt hiervan te geven.

De resultaten van de metingen zijn gegeven in de figuren 14 t/m 19. De last is steeds in de aangegeven punten gezet (veelal de kruispunten van het stramien), waarbij dan de kromme hoort, die aldaar het grootste moment geeft.

In fig. 20 zijn nog eens voor de verschillende meetvelden, t.w. b, c, f en g , de lijnen der maximale momenten, de omhullenden dus van de vorige grafieken, gegeven.

Naar aanleiding van deze grafieken kunnen over het verloop van de momentenlijnen nog enkele opmerkingen worden gemaakt.

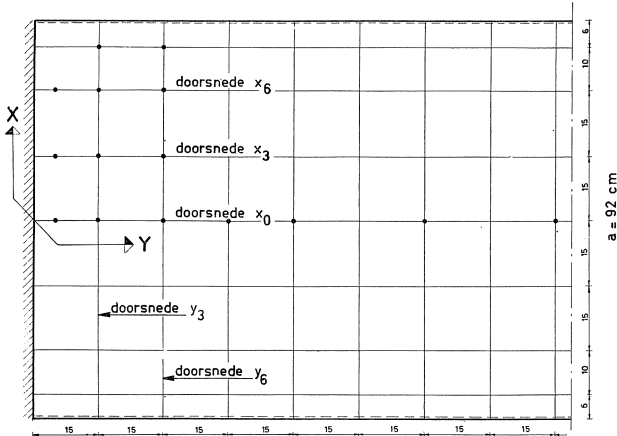
1. De vorm van de momentenpieken is voor vrijwel alle metingen gelijk, dus onafhankelijk van de plaats van de last. Slechts in de onmiddellijke nabijheid van een rand treden afwijkende vormen op. Het niveau van de pieken wordt door de in fig. 20 gegeven lijnen van maximale momenten bepaald.
2. De maximummomenten in het middengedeelte van de plaat worden weinig beïnvloed door de randvoorwaarden.
3. Wanneer de last zich naar een rand verplaatst, nemen de maximale momenten onder de last aanvankelijk slechts weinig af. In sommige gevallen kan dit verloop aanmerkelijk verschillen met b.v. het parabolische verloop van de maximale momentenlijn bij liggers op twee steunpunten.
4. De maximummomenten treden niet steeds op indien de last in het midden van de overspanning staat (vb. meetveld *b*).
5. Voor de vrij opgelegde platen geldt weer de wederkerigheidswet t.a.v. de momenten, zoals ook uit de metingen blijkt. De gemeten momentenlijnen zijn dus tevens invloedslijnen.
6. De momentenlijnen in de doorsnede y_0 van meetveld (*h*) vertonen een zeer steil verloop (fig. 19). Bij vergelijking met meetveld (*d*) blijkt het positieve veldmoment b.v. in het midden van de vrij zwevende rand slechts weinig door de toch enorm grote inklemmingsmomenten te worden gereduceerd, n.l. van $+ 1,042 P$ (lange zijden vrij opgelegd) tot $+ 0,935 P$ (lange zijden ingeklemd).
7. De momenten in het midden van de vrij zwevende rand zijn bij gelijke concentratie zowel bij meetveld (*d*) als bij meetveld (*h*) iets meer dan tweemaal het moment in het midden van de overspanning van het overeenkomende zeer brede middenveld (*a*), resp. (*e*).
 Meetveld *a*: $M_x/P = 0,507$, meetveld *d*: $M_x/P = 1,042$,
 verhouding $M_d/M_a = 2,05$.
 Meetveld *e*: $M_x/P = 0,422$, meetveld *h*: $M_x/P = 0,935$,
 verhouding $M_h/M_e = 2,20$.
8. De invloed van de zwevende rand beperkt zich tot een zeer smalle strook van ongeveer $\frac{1}{3} l$ (meetveld *d* en *h*, fig. 16 en 19).

Wat de *nauwkeurigheid* van deze metingen betreft is er geen aanleiding te verwachten dat de resultaten van deze metingen een sterk afwijkende nauwkeurigheid bezitten vergeleken bij de reeds eerder genoemde (blz. 16).

De interpretatie van deze metingen.

Voor de omrekening van de gegeven waarden van de momenten voor een materiaal met andere dwarscontractiecoëfficiënt ν dan het modelmateriaal kan weer van de op blz. 16 gegeven formules gebruik worden gemaakt, indien de randvoorwaarden homogeen zijn (niet elastische vrije oplegging, volledige inklemming).

Bij niet-homogene randvoorwaarden (vrij zwevende rand, elastisch onder-

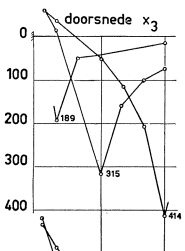
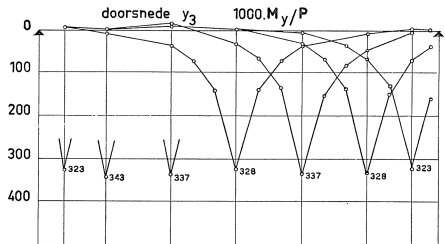
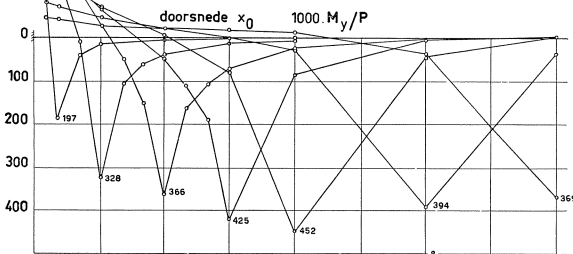
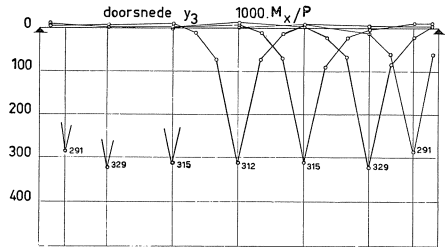
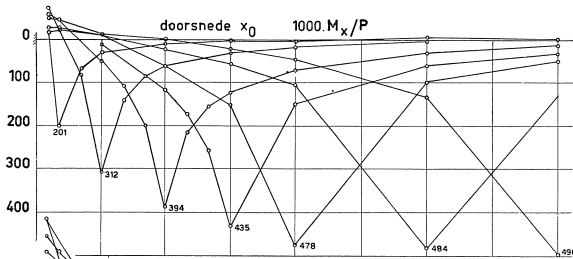


MOMENTENLIJNEN VERKREGEN UIT METINGEN AAN HET INGEKLEMDE EINDVELD VAN DE ZEER BREDE, LANGS DE LANGE ZIJDEN VRIJ OPGELEGDE, PLAAT, (MEETVELD b)

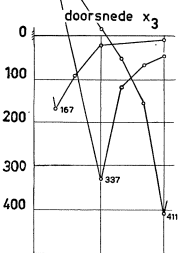
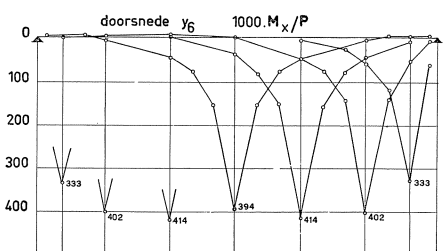
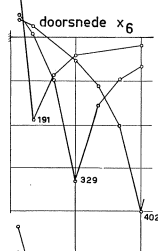
Lastdiameter $D = 1.6 \text{ cm}$. ($\epsilon/\alpha = 0.0087$)

Tussenlaag: carton.

Verloop van M_x/P en M_y/P in de beschouwde doorsnede. Last steeds ter plaatse van het grootste moment.



$1000.M_x/P$



$1000.M_y/P$

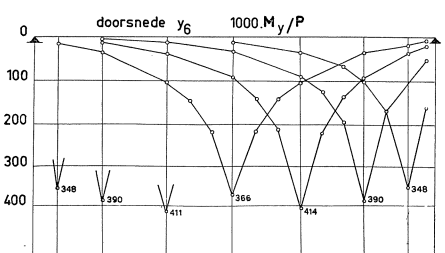
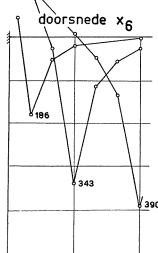
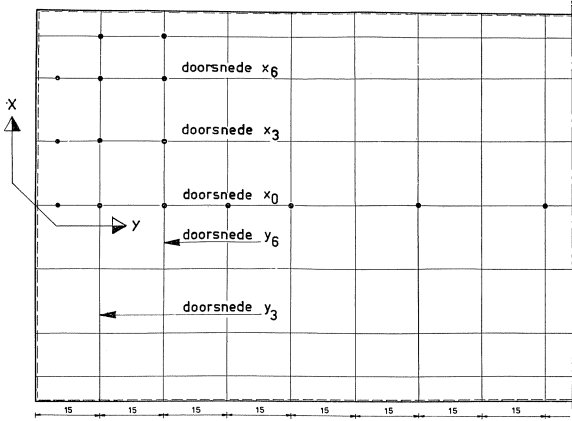


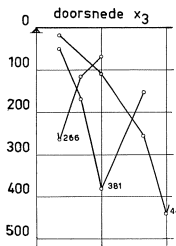
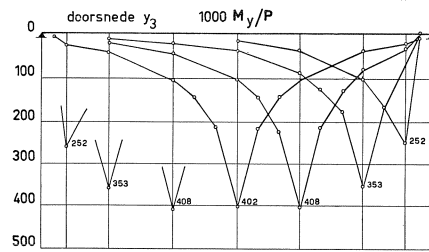
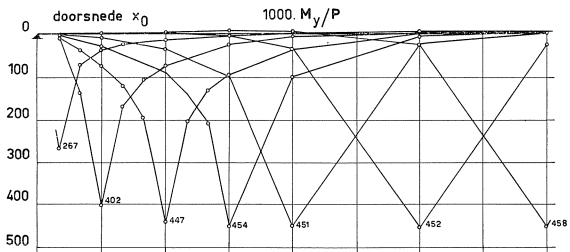
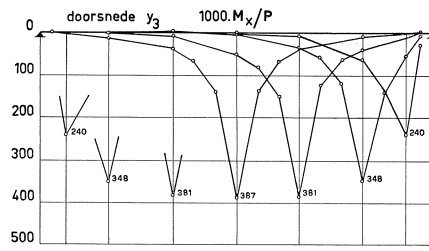
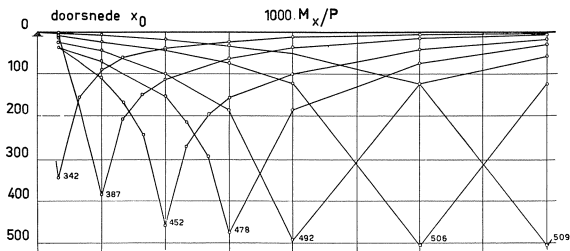
Fig. 14.



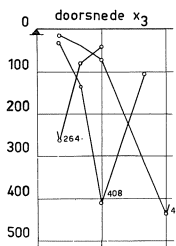
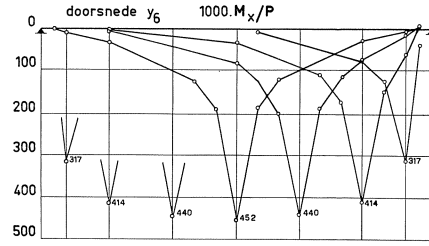
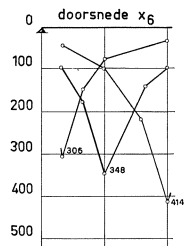
MOMENTENLIJNEN VERKREGEN UIT METINGEN AAN HET VRU OPGELEGDE EINDVELD VAN DE ZEER BREDE, AAN DRIE ZIJDEN VRU OPGELEGDE, PLAAT (MEETVELD C)

Lastdiameter $D = 1.6 \text{ cm}$ ($e/a = 0.0087$).
Tussenlaag: carton.

Verloop van M_x/P en M_y/P in de beschouwde doorsnede
Last steeds in de doorsnede ter plaatse van het grootste moment



$1000 \cdot M_x/P$



$1000 \cdot M_y/P$

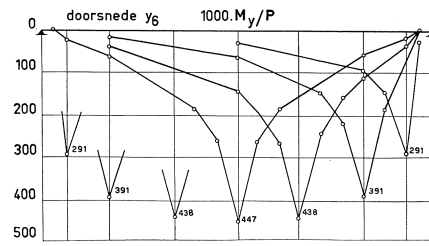
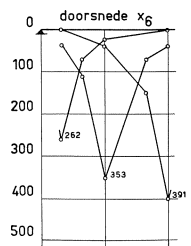
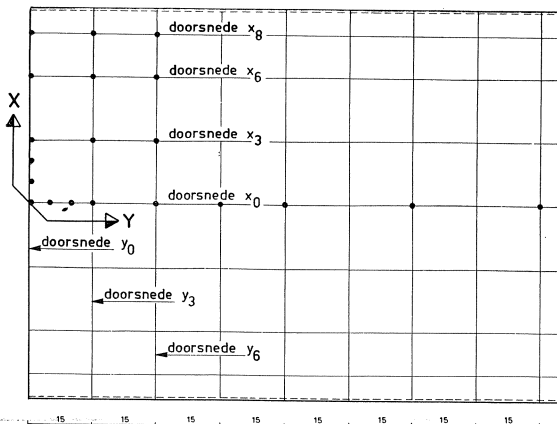


Fig. 15.

steunde oplegging, elastische inklemming) komt in de randvoorwaarden, nodig om de plaatvergelijking tot een oplossing te brengen de grootheid ν voor, zodat deze van invloed is op de oplossing van de differentiaalvergelijking zelf. Een omrekening volgens bovengenoemde formules is dan dus niet geoorloofd.

In dit geval kan men bij gelijkmatig verdeelde belasting en bij geconcentreerde belasting voor het gebied buiten de naaste omgeving van de last,



MOMENTENLIJNEN VERKREGEN UIT METINGEN AAN HET EINDVELD MET ZWEVENDE RAND VAN DE ZEER BREDE, LANGS DE TWEE LANGE ZIJDEN VRIJ OPGEGEGDE, PLAAT (MEETVELD d)

Lastdiameter $D = 1,6$ cm ($e/a = 0,0087$)
Tussenlaag carton

Verloop van M_x/P en M_y/P in de beschouwde doorsnede
Last steeds in de doorsnede ter plaatse van het grootst moment

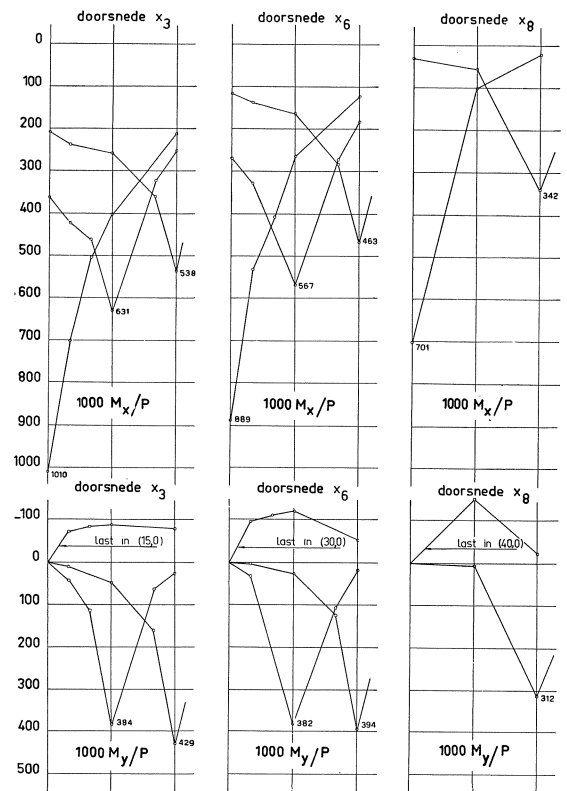
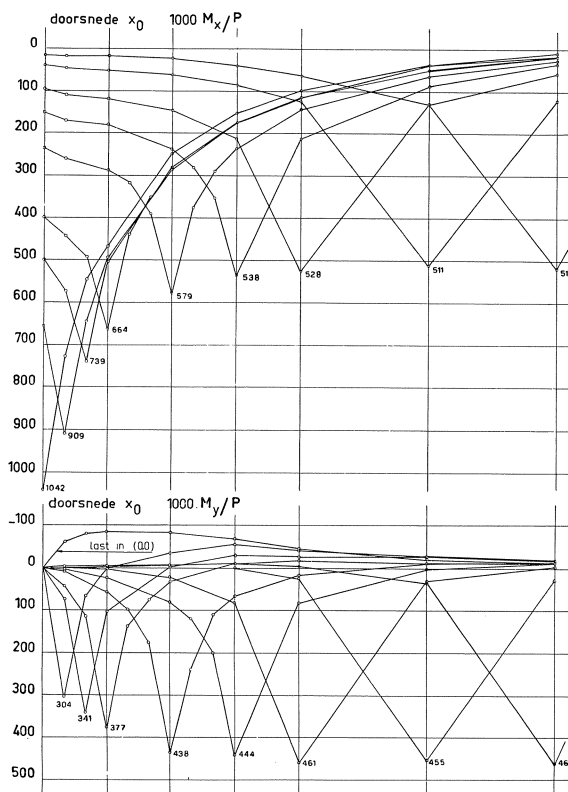


Fig. 16

Momenten langs de zwevende rand, last in doorsnede x_0 op 0, 5, 10, 15 en 30 cm van de rand

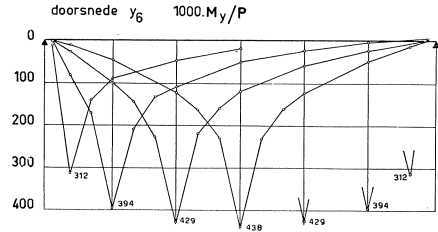
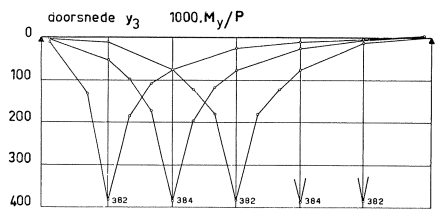
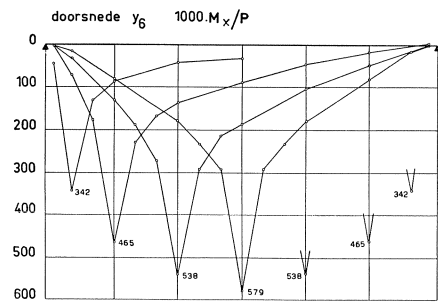
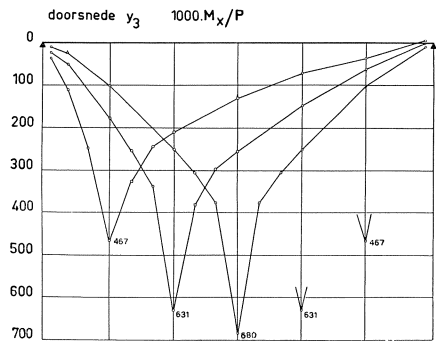
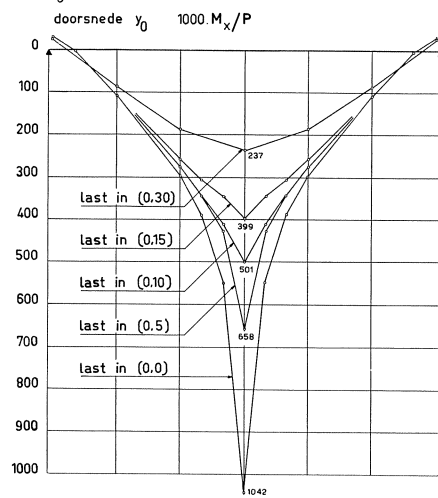
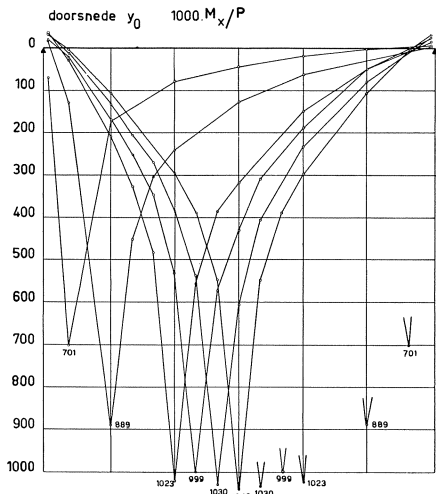
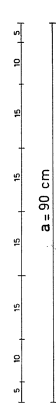
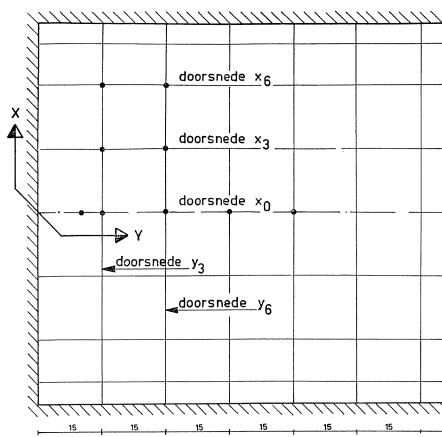


Fig. 16 (vervolg).



MOMENTENLUNEN VERKREGEN UIT METINGEN
 AAN HET INGEKLEMDE EINDVELD VAN DE ZEER
 BREDE, LANGS DE LANGE ZIJDEN INGEKLEMDE,
 PLAAT. (MEETVELD f)

Lastdiameter $D = 1.6$ cm. ($e/a = 0.0087$)

Tussenlaag: carton.

Verloop van M_x/P en M_y/P in de beschouwde doorsnede

Last steeds in de doorsnede ter plaatse van het grootste moment.

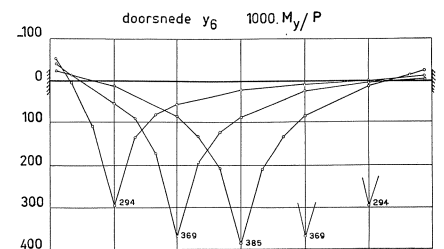
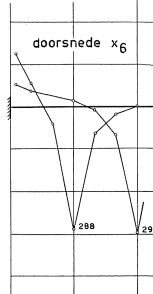
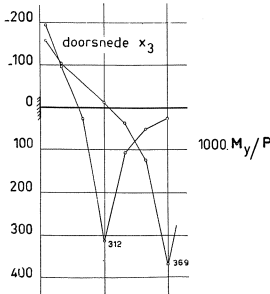
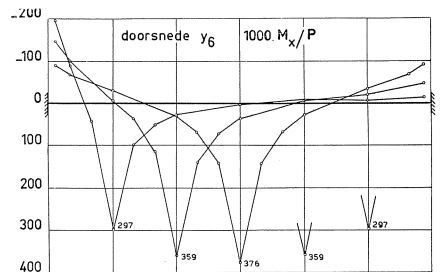
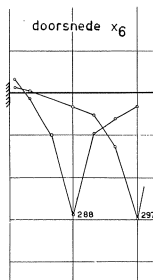
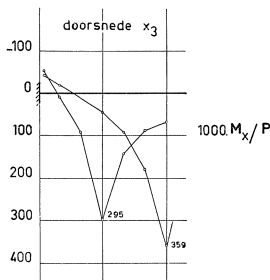
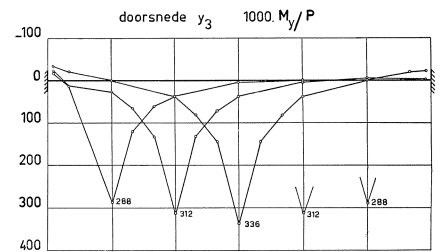
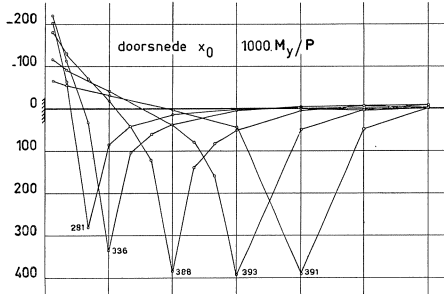
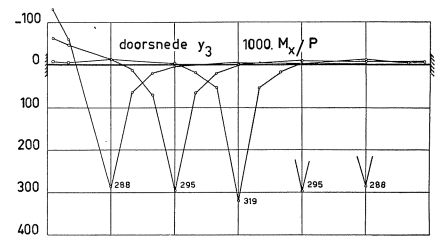
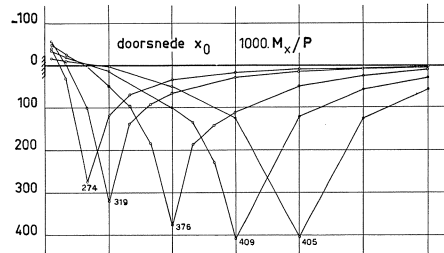
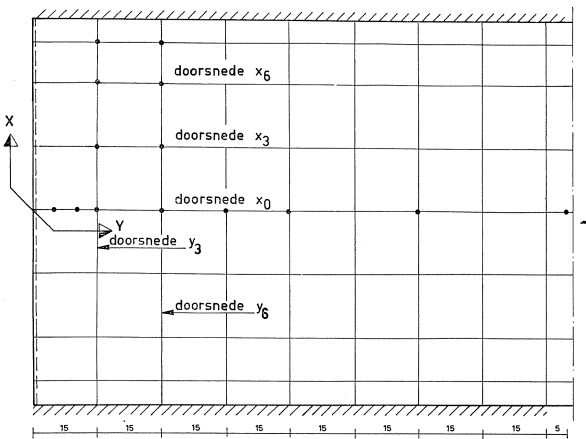


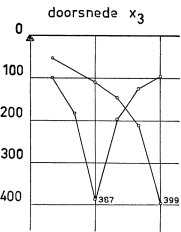
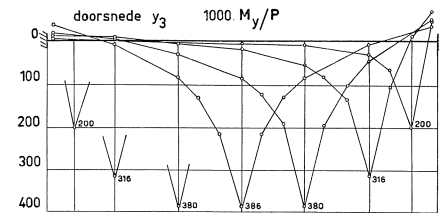
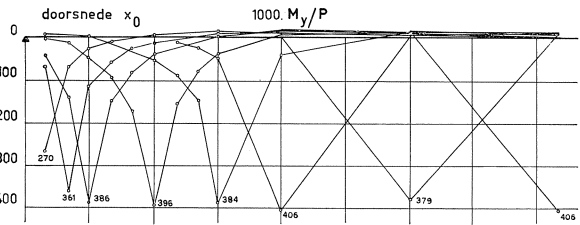
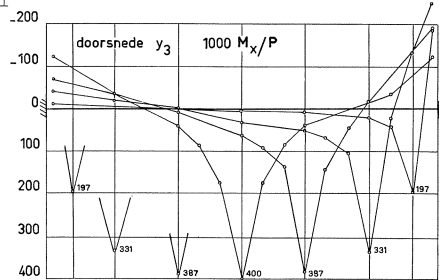
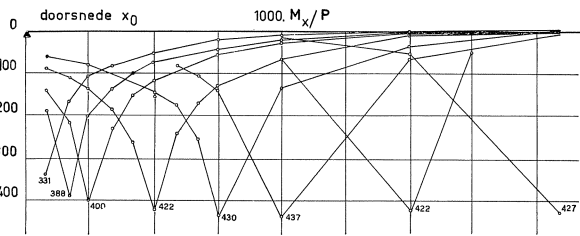
Fig. 17.



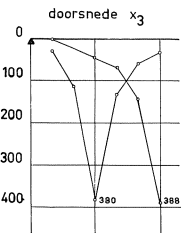
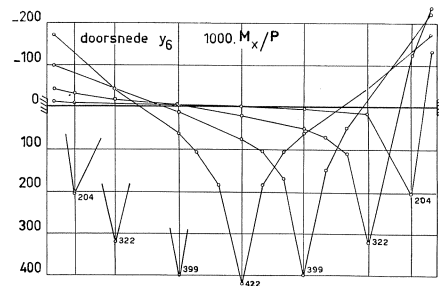
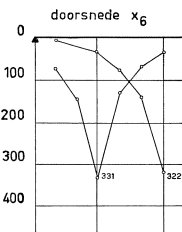
MOMENTENLIJNEN VERKREGEN UIT METINGEN AAN HET VRU OPGELEGDE EINDVELD VAN DE ZEER BREDE, LANGS DE LANGE ZIJDEN INGEKLEMDE, PLAAT. (MEETVELD g)

Lastdiameter $D = 1,6 \text{ cm}$ ($e/a = 0.0087$)
Tussenlaag: carton.

Verloop van M_x/P en M_y/P in de beschouwde doorsnede.
Last steeds in de doorsnede ter plaatse van het grootste moment.



1000. M_x/P



1000. M_y/P

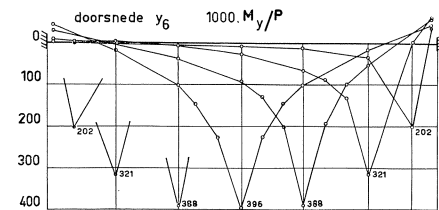
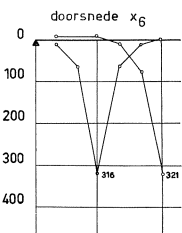


Fig 18.

voor de momenten in de naaste omgeving van de rand met niet-homogene voorwaarden de waarden, gevonden bij het model, wel aanhouden. De afwijkingen t.o.v. de werkelijke momenten zullen veelal kleiner dan ongeveer 5% blijken te zijn. Voor de momenten onder de geconcentreerde last zou men aldus doende, een grotere fout verkrijgen. De gemeten momenten zijn echter aan de veilige kant. Eventuele omrekeningsmethoden dragen toch ook een benaderend karakter. Bovendien is de invloedssfeer van b.v. de zwevende rand zeer beperkt.

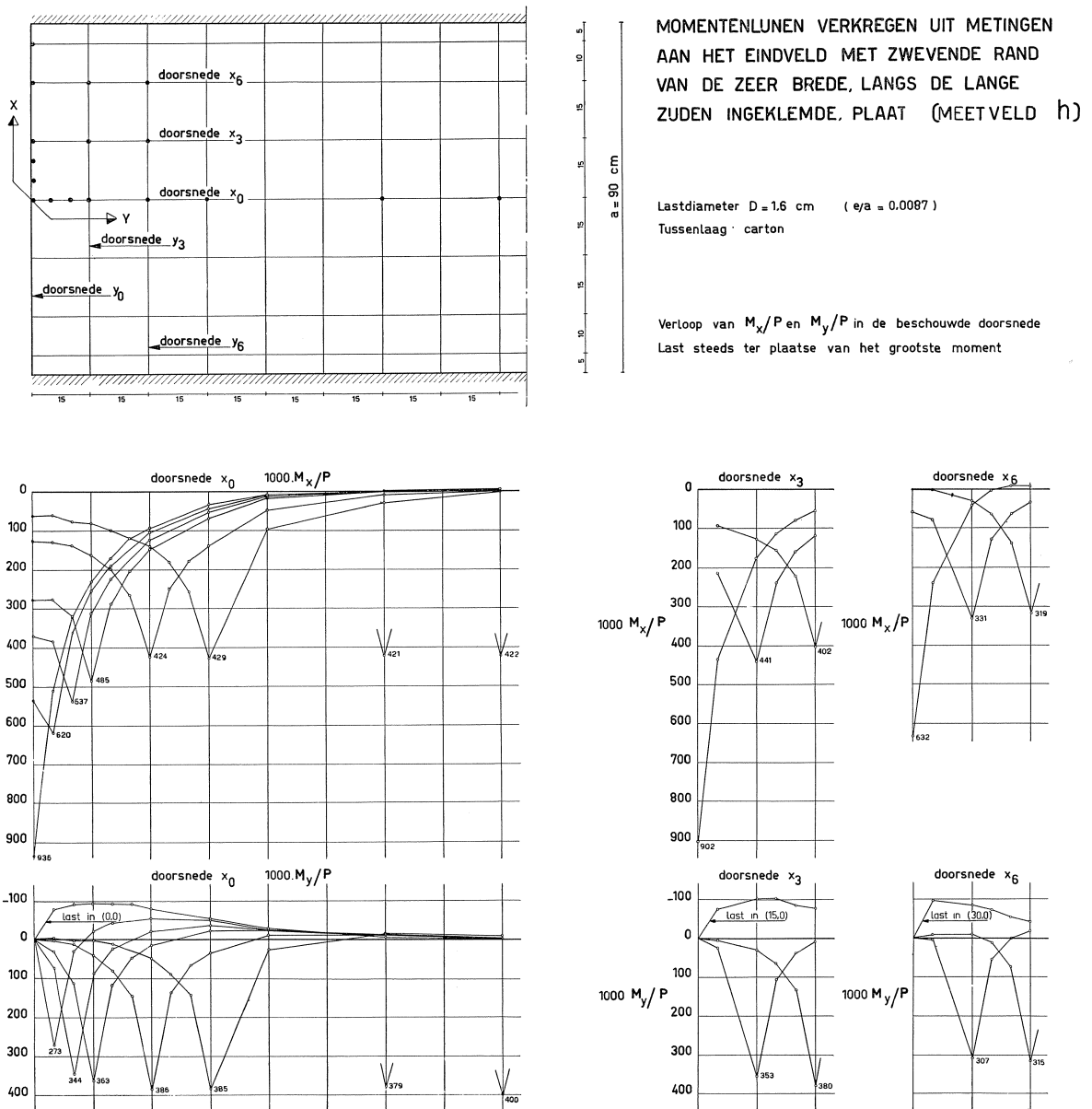
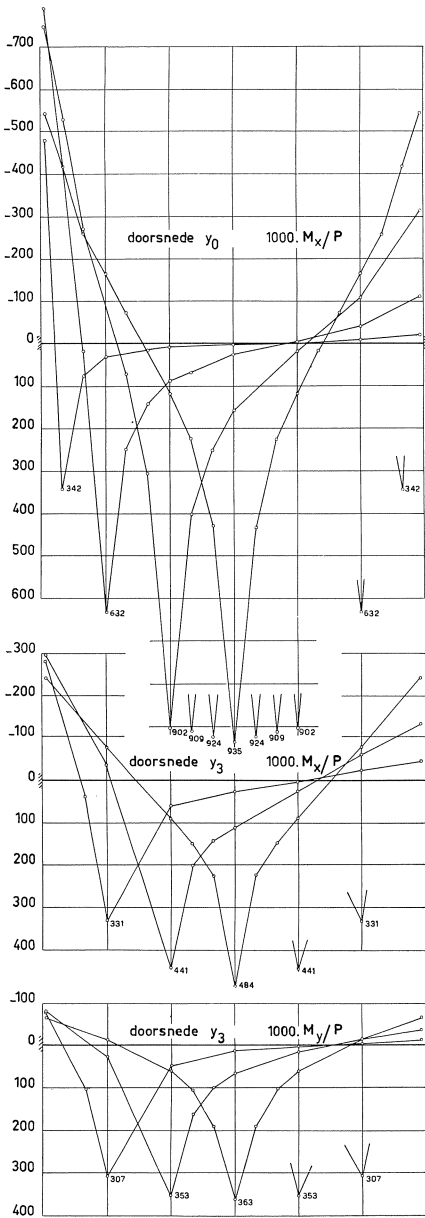


Fig. 19.



Momenten langs de zwevende rand, last in x_0 resp. op 0. 5. 10. en 15 cm van de rand

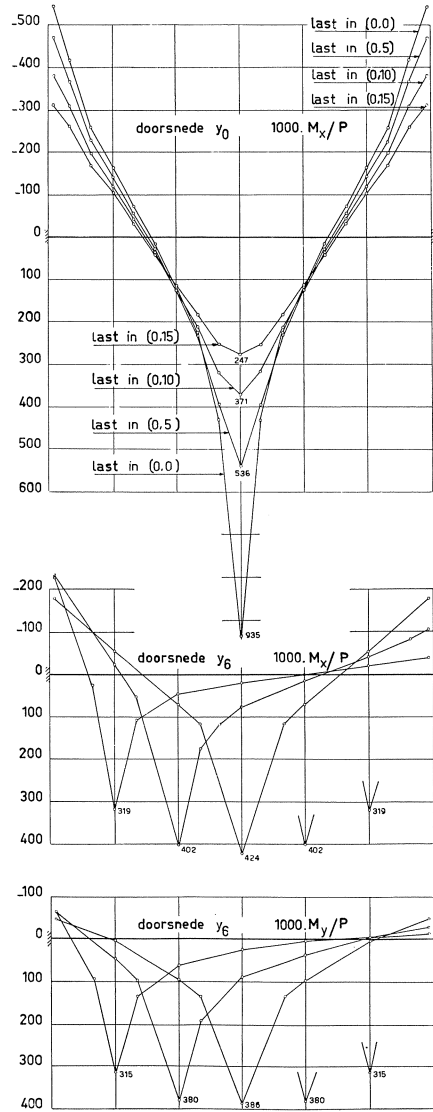
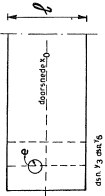


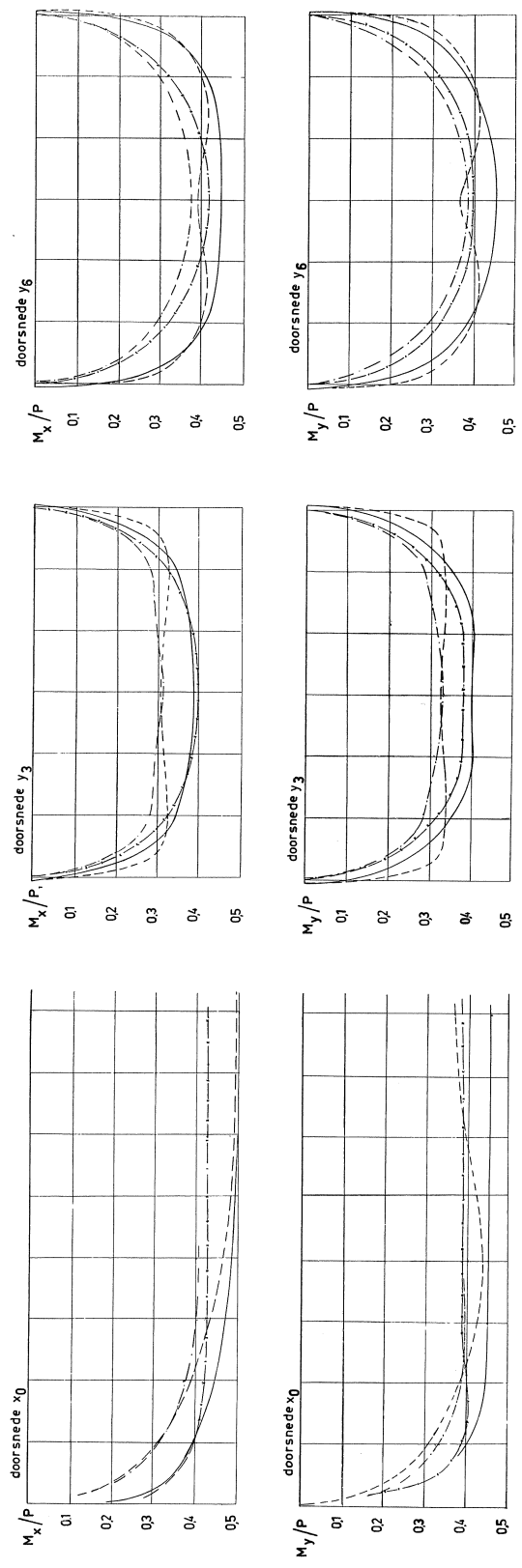
Fig. 19 (vervolg)

LINIEN DER MAXIMALE MOMENTEN M_x/P EN M_y/P AFHANKELIJK VAN DE RANDVOORWAARDEN VAN DE PLAAT.

De metingen gelden voor een plaat met afmetingen $b \times 6 \ell$
 en een last met afmetingen $e/\ell = 0,0087$



Volgens metingen



—	korte zijde	opgelegd	lange zijden opgelegd	(meetveld c)
- - -	"	ingeklemd	"	opgelegd (b)
- · - · -	"	ingeklemd	"	ingeklemd (f)
- X - X -	"	opgelegd	"	ingeklemd (g)

Fig. 20.

Vergelijking van de meetresultaten met uitkomsten van de theorie

Ook hier bleek in de enkele gevallen, dat de meetresultaten getoetst konden worden, een goede overeenstemming te bestaan.

Conclusies en slotopmerkingen

1. De uitkomsten van de elementaire plaattheorie en het experiment stemmen bij alle onderzochte randvoorwaarden voor het gebied buiten de onmiddellijke omgeving van de geconcentreerde last goed overeen. De gemeten momenten buiten het gebied van de last zijn dus te beschouwen als experimentele oplossingen van de plaatvergelijking.
2. De momenten onder sterk geconcentreerde lasten zijn kleiner dan volgt uit de elementaire plaattheorie. De correctie op deze theorie volgens Westergaard voor de berekening van deze momenten blijkt goede resultaten te geven.

Bij benadering zijn de krommen, die het verband aangeven tussen de momenten onder de last en de concentratie hiervan, rechten. Het niveau hiervan, dat afhankelijk is van randvoorwaarden en plaats van de last kan door één meting bij één concentratie worden bepaald.

3. De invloed van de randvoorwaarden op de momenten onder de last, indien deze in het middengedeelte van de plaat staat, is niet groot.
4. Het moment onder de geconcentreerde last, in het geval dat deze op een vrij zwevende rand staat, is iets meer dan twee maal het moment dat optreedt onder de last indien deze op overeenkomstige plaats in de overspanning in het midden van de zeer brede plaat staat.
5. Alle gemeten momenten zijn dus te beschouwen als experimentele oplossingen, ook in die gevallen, waarin de theorie zich niet of slecht laat oplossen.

De verrichte onderzoeken hebben ook in deze gevallen een grote hoeveelheid gegevens verstrekt voor de berekening van platen onder geconcentreerde belastingen. De figuren 8 en 9 en 14 t/m 19, waarin de momentenlijnen in de verschillende velden zijn gegeven bij verschillende plaats van de last, kunnen hiertoe hun diensten bewijzen.

LITERATUUR:

1. E. Bittner: Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten. Wien 1938.
2. K. Olsen—F. Reinitzhuber: Die zweiseitig gelagerte Platte, Berlin 1944.
3. V. P. Jensen, R. W. Kluge, C. B. Williams: Highway slab-bridges with curbs: Laboratory tests and proposed design method, Bulletin 346, University of Illinois.
4. V. P. Jensen: Moments in simple span bridges with stiffened edges, Bulletin 315, University of Illinois 1939.
5. A. Pucher: Einflussfelder elastischer Platten, Wien 1951.
6. A. Nadai: Die elastische Platten, Berlin 1925.
7. S. P. Timoshenko: Theory of plates and shells.
8. H. M. Westergaard: Computations of stresses in bridge slabs due to wheel loads, Public Roads, vol. 11 no. 1 Maart '30.