INLEIDING OVER STATISCH ONBEPAALDE BALKCONSTRUCTIES IN VOORGESPANNEN BETON.

Het doel van het voorspannen is te voorkomen, dat in het beton scheuren optreden. Tengevolge van het voorspannen ondergaat een ligger vervormingen. Bij een statisch onbepaalde ligger zullen hierdoor statisch onbepaalde reacties ontstaan. De werking van de voorspanning wordt daardoor weinig overzichtelijk, waardoor het ontwerpen minder eenvoudig is. De werking van de kabel kan geformuleerd worden als het introduceren van een druklijn in een ligger, maar ook als een uitwendige belasting. Beide formuleringen zijn gelijkwaardig, maar in bepaalde gevallen verdient de formulering als uitwendige belasting de voorkeur. Toepassing van statisch onbepaalde constructies in voorgespannen beton blijkt niet steeds economisch te zijn t.o.v. statisch bepaalde. Tengevolge van het grote aantal factoren, dat hierbij een rol speelt, zijn hiervoor moeilijk algemene regels te geven.

Inleiding

Voorgespannen beton is, wat materiaalverbruik betreft, economisch ten opzichte van gewapend beton. De trekzône is namelijk bij gewapend beton veelal gescheurd en heeft dus slechts een secundaire functie. Bij voorgespannen beton worden zowel in de druk- als in de trekzône de toelaatbare spanningen niet overschreden. Toepassing van hoogwaardig beton komt dus bij voorgespannen beton, waar druk- en trekzône gelijkwaardig zijn, beter tot zijn recht dan bij gewapend beton. Ook de toepassing van hoogwaardig staal, hoewel relatief goedkoop, is bij gewapend beton beperkt, daar ten gevolge van de grote rek de scheuren in het beton te groot worden.

Door het voorspannen wordt in het algemeen een excentrische normaalkracht in een doorsnede geïntroduceerd. Deze kan ontbonden worden in een centrische normaalkracht en een moment. Met dit moment kan het moment ten gevolge van het eigen gewicht geheel of gedeeltelijk worden opgeheven. Deze voordelen zullen zich vaak eveneens voordoen bij statisch onbepaalde constructies.

Bij het ontwerpen van statisch onbepaalde constructies doet zich een typische moeilijkheid voor. De voorspanning moet zo aangebracht worden, dat in geen enkel belastingsgeval de toelaatbare spanningen overschreden worden. Door het voorspannen van een ligger zullen vervormingen optreden, bij een statisch onbepaalde balk zullen hieruit extra reacties ontstaan. Het effect van de voorspanning wordt daardoor zeer weinig overzichtelijk.

Daar bij voorgespannen beton veel hogere spanningen in de materialen worden toegelaten dan in gewapend beton, zullen verschillende factoren meer betekenis krijgen, zoals kruip, krimp en nauwkeurigheid van de berekening.

Bij voorgespannen beton blijven de spanningen binnen bepaalde grenzen, hierdoor stemmen de praemissen van de elasticiteitsleer beter met de werkelijkheid overeen.

Algemene beschouwing

Het belangrijkste probleem van de statisch onbepaalde balkconstructies in voorgespannen beton kan als volgt geformuleerd worden:

Hoe moeten de kabels worden geplaatst, opdat, onder de werking van voorspanning, het eigen gewicht en de nuttige belasting tezamen, de toelaatbare spanningen nergens overschreden worden.

Er zijn dus twee factoren:

1. de werking van de kabel,
2. het effect van de nuttige belasting en het eigen gewicht.

1. De werking van de kabel

De kabel oefent in de verankering een geconcentreerde kracht uit op het beton. De kracht is gericht volgens de raaklijn ter plaatse. Wanneer de wrijving buiten beschouwing wordt gelaten, dan is de kracht in de kabel overal even groot. De druk langs de kabel, loodrecht op de kabelas, kan berekend worden uit de evenwichtsbeschouwing van een elementje van de kabel (zie fig. 1). Wanneer grootheden, welke oneindig klein van de tweede orde zijn, verwaarloosd worden, luidt de evenwichtsvoorwaarde in de richting loodrecht op de kabelas:

$u\,ds = V\,d\varphi$; daar $d\varphi = \dfrac{ds}{R}$ wordt dit $u = \dfrac{V}{R}$.

Deze druk kan ontbonden worden in een component loodrecht op de balkas en een component evenwijdig aan de balkas. Daar de krommingen van de kabel en van de balkas in het algemeen klein zijn, kan de druk evenwijdig aan de balkas meestal verwaarloosd worden. De component loodrecht op de balkas is $\dfrac{V}{R} \,.\, ds \cos \varphi$. Per eenheid van lengte dx van de balkas wordt dit $\dfrac{V}{R}$, daar $dx = ds \cos \varphi$. Dit kan verder vereenvoudigd worden tot $V\dfrac{d^2y}{dx^2}$, omdat de kromming $\dfrac{1}{R}$ bij benadering gelijk gesteld kan worden aan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. De werking van de kabel kan dus bij benadering voorgesteld worden door een geconcentreerde kracht in de verankering gelijk aan de voorspankracht en een verdeelde druk loodrecht op de balkas gelijk aan $V\dfrac{d^2y}{dx^2}$ per eenheid van lengte.

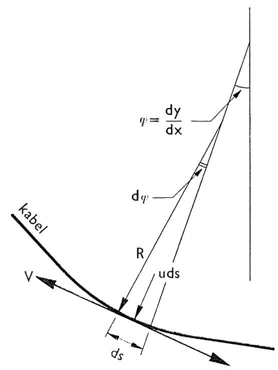


Fig. 1. Evenwicht van een elementje van een voorspankabel

De werking van de kabel kan ook geheel anders geformuleerd worden. De krachten, welke de kabel op het beton uitoefent, zijn gelijk, maar tegengesteld gericht aan de krachten welke het beton op de kabel uitoefent. De resultante van deze krachten op het beton valt, als er geen andere krachten, zoals eigengewicht, oplegreacties e.d. werken, samen met de kabel. Tengevolge van alléén het voorspannen wordt dus in het beton een druklijn geïntroduceerd, welke samenvalt met de kabel. Het moment in een doorsnede is dus $M = Vy \, . \cos \varphi$. (Zie fig. 2 en 3). Wordt ook hier een benadering ingevoerd in verband met de flauwe hellingen in de kabel en de balkas dan wordt dit $M = Vy$. Indien er andere krachten, zoals eigengewicht en oplegreacties op het beton worden uitgeoefend, valt de druklijn niet meer met de kabel samen.

In wezen zijn beide formuleringen voor de werking van de kabel gelijk, daar het moment $M = Vy$ ook kan ontstaan door een belasting $q = \frac{d^2M}{dx^2} = V \, . \frac{d^2y}{dx^2}$ loodrecht op de balkas. De werking van de geconcentreerde last in de verankering komt, door het differentiëren, (waardoor de randvoorwaarden vervallen) echter niet goed tot uiting, hetgeen o.a. van betekenis is als de kabel niet in de balkkop, maar ergens tussen de steunpunten in verankerd is.

Uit de eerste formulering kunnen direct de volgende conclusies getrokken worden:

I. Indien de vorm van de kabel, dus de druk loodrecht op de balkas ongewijzigd blijft, maar de kabel wordt in zijn geheel verticaal verplaatst, dan zal de enige invloed, welke de balk hiervan ondervindt, de verplaatsing van de geconcentreerde krachten in de verankering zijn. Dit geldt alleen indien de ontbondene in de richting van de balkas van de druk loodrecht op de kabelas verwaarloosbaar klein is.

II. Indien de kromming van de kabel plaatselijk gewijzigd wordt, zal de invloed hiervan in rekening gebracht kunnen worden door superpositie van deze verandering van belasting op de oorspronkelijke toestand.

De consequenties van beide conclusies voor statisch onbepaalde constructies worden aan de hand van enkele voorbeelden toegelicht.

Voorbeeld 1.

In fig. 2 is een doorgaande ligger op vier steunpunten weergegeven. De kabel heeft het verloop volgens 1 en is verankerd bij A en B. De statisch onbepaalde reacties, welke tengevolge van alléén het voorspannen optreden kunnen bijvoorbeeld als volgt berekend worden. Boven de steunpunten worden de balken losgesneden gedacht. Het moment in elke doorsnede is dan Vy. De hoekverdraaiïngen welke ten gevolge van deze momenten boven de steunpunten optreden, kunnen volgens de regels van de toegepaste mechanica berekend worden. De ontstane gapingen worden door overgangsmomenten opgeheven. Op de (in het statisch bepaalde hoofdsysteem werkende) druklijn langs de kabel, moeten dus nog de momenten tengevolge van de continuïteit

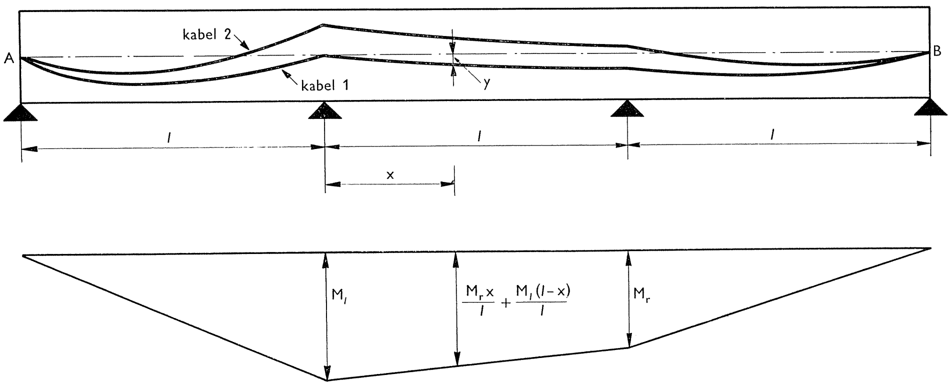


Fig. 2. Voorgespannen balk. De momenten ten gevolge van kabel 1 en kabel 2 zijn gelijk

van de ligger boven de steunpunten gesuperponeerd worden. In een doorsnede x van b.v. de middelste overspanning wordt het moment tengevolge van het voorspannen dus:

$$M = Vy + \frac{M_r\, x}{l} + \frac{M_l\,(l - x)}{l}$$

Het moment tengevolge van de statisch onbepaalde reacties verloopt lineair. De excentrische normaalkracht, welke in het statisch bepaalde hoofdsysteem werkt, kan met dit moment worden samengesteld tot een nieuwe normaalkracht. De druklijn ondergaat dus een lineaire verplaatsing en een draaiïng ten opzichte van de druklijn in het statisch bepaalde hoofdsysteem, maar heeft dezelfde vorm als de kabel. Bij een ander verloop van de kabel (2), dat slechts in zoverre van kabel 1 verschilt, dat de excentriciteit boven de tussensteunpunten gewijzigd is, maar de kromming in de velden hetzelfde is, zijn de volgende wijzigingen in de belasting van de balk door de kabel opgetreden:

a. De kromming boven de tussensteunpunten, theoretisch een knik, is veranderd. De geconcentreerde kracht, die optreedt is dus eveneens veranderd. Daar deze krachten echter direct door de steunpunten opgenomen worden, hebben ze geen invloed op de momenten.

b. De geconcentreerde krachten bij A en B hebben een draaiïng ondergaan. Deze draaiïng is in het algemeen klein, zodat de invloed ervan verwaarloosd kan worden.

De druk, $V\frac{d^2y}{dx^2}$ tengevolge van de kromming, welke de kabel loodrecht op de balkas uitoefent, is ongewijzigd gebleven. Er is dus geen wijziging in de momenten in de ligger gekomen. De druklijn is dus bij kabel 1 en kabel 2 hetzelfde. Dit wordt de eigenschap van de invariantie van de druklijn bij lineaire transformatie genoemd.

Voorbeeld 2.

In fig. 3 is een ligger op drie steunpunten gegeven. Kabel 1 is in A en B verankerd. Het verloop van de druklijn kan weer met bijvoorbeeld de in voorbeeld 1 aangegeven methode worden berekend. Bij een ander verloop van de kabel (2), waarbij de kromming in de velden dezelfde is, maar waarbij de verankering in A' is aangebracht, treden de volgende wijzigingen in de belasting ten opzichte van kabel 1 op:

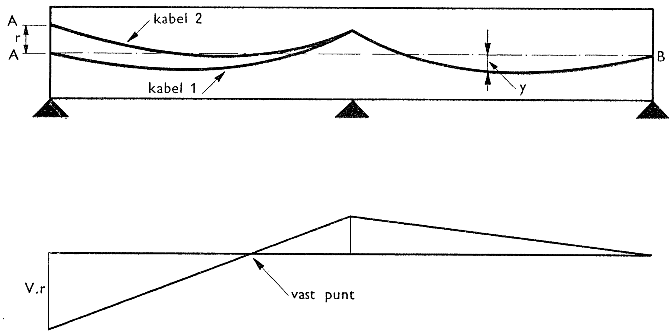


Fig. 3. Voorgespannen balk. Het verschil in momenten in de ligger t.g.v. kabel 1 en kabel 2 is in de onderste figuur weergegeven.

a. Een verandering van de kromming van de kabel boven het steunpunt. Deze kracht wordt direct door het steunpunt opgenomen en er ontstaan hierdoor dus geen momenten in de ligger.

b. Een verandering van ligging en richting van de geconcentreerde kracht in A. De verandering in richting kan meestal verwaarloosd worden. De verplaatsing van de kracht over een afstand r komt op hetzelfde neer als het superponeren van een moment $V.r$ op de oorspronkelijke toestand.

De druk $V\dfrac{d^2y}{dx^2}$ is in de velden ongewijzigd gebleven. De enige verandering in de belasting is dus de invoering van een moment $V.r$ in A.

Een moment aan een uiteinde van een overigens onbelaste balk geeft een momentenverloop door de zogenaamde vaste punten. Indien dit momentenverloop wordt gesuperponeerd op de druklijn, welke bij kabel 1 behoort ontstaat de druklijn voor kabel 2. In de „vaste punten" is het extra moment nul zodat de excentriciteit van de druklijn daar de oorspronkelijke waarde behoudt. De druklijn wentelt dus om deze punten bij verticale verplaatsing van de verankering bij gelijkblijvende vorm van de kabel. Indien de ligger symmetrisch is ten opzichte van het midden, en de beide verankeringen worden symmetrisch verplaatst, dan ontstaat een dergelijk verloop met momentennulpunten. Deze punten worden wel knooppunten (points nodales) genoemd.

Indien een steunpunt een zetting ondergaat, dan verandert de ligging van de kabel ten opzichte van de zwaartelijn niet. De krachten, welke de kabel op het beton uitoefent, blijven dus dezelfde. Het al of niet voorgespannen zijn heeft dus geen invloed op de grootte van de momenten welke door zettingen ontstaan.

De kabel kan als een uitwendige belasting op de ligger worden opgevat. Daarom kunnen nooit andere momenten in een ligger worden geintroduceerd dan die welke voldoen aan de randvoorwaarden (zoals de continuïteit van de ligger boven de steunpunten etc.). Omgekeerd kan bij een willekeurige momentenlijn steeds een vorm van de kabel gevonden worden, waardoor deze momenten zouden kunnen ontstaan.

Uit de formulering van de werking van de kabel als het introduceren van een druklijn in het beton volgt:

I. Bij zwakke krommingen maakt het geen verschil voor het moment of de zwaartelijn van de balk dan wel de kabel gebogen is. Het moment in het statisch bepaalde hoofdsysteem blijft $V.y$, terwijl de overgangsmomenten eveneens hetzelfde blijven.

II. Indien in een balk meer dan één kabel is gelegen dan kan de gezamenlijke werking hiervan worden voorgesteld door één fictieve kabel welke het verloop van het zwaartepunt van de voorspanning heeft en een voorspankracht gelijk aan de som van de afzonderlijke voorspankrachten. Werken b.v. in een doorsnede de voorspankrachten V_1, V_2 en V_3 met de excentriciteiten resp. y_1, y_2 en y_3 dan is het totale moment $V_1 . y_1 + V_2 . y_2 + V_3 . y_3$. Men kan dit vervangen door de kracht $V_1 + V_2 + V_3$ met een excentriciteit

$$y = \frac{V_1 . y_1 + V_2 . y_2 + V_3 . y_3}{V_1 + V_2 + V_3}$$

Wanneer de kabel met de druklijn samenvalt spreekt men van een „cable concordant" (Guyon). De werking van de kabel in zijn geheel, dit wil zeggen de druklijn, is echter van meer belang dan de ligging van de kabel zelf. Dit begrip is daarom wellicht meer van betekenis wat betreft de grootte van de steunpuntsreacties, dan voor het ontwerpen van de ligging van de kabel.

Bij portalen zullen behalve statisch onbepaalde momenten ook nog statisch onbepaalde normaalkrachten door het voorspannen optreden; wel wordt het ontwerpen hierdoor nog iets gecompliceerder, maar het principe blijft hetzelfde.

2. Nuttige belasting en eigen gewicht

In het algemeen zullen ten gevolge van de nuttige belasting en het eigen gewicht normaalkrachten en buigende momenten in een ligger ontstaan. Tengevolge van deze belastingen zal de druklijn, welke door het voorspannen is ontstaan, een verandering ondergaan. De momenten en normaalkrachten kunnen met de gebruikelijke methoden berekend worden.

3. De werking van eigen gewicht, nuttige belasting en voorspanning tezamen

In de werkelijkheid kunnen steeds voorspanning, eigen gewicht en nuttige belasting tegelijk werken. In geen enkel belastingsgeval mogen de toelaatbare spanningen overschreden worden. Veelal verloopt het ontwerpen het eenvoudigst door het voorspannen als het introduceren van een druklijn op te vatten. In een doorsnede werkt dus ten gevolge van de voorspanning en de daaruit voortvloeiende statisch onbepaalde reacties een drukkracht V met een excentriciteit z, een moment M_{eg} en een centrische normaalkracht N_{eg} tengevolge van het eigen gewicht, en een moment M_b en een centrische normaalkracht N_b tengevolge van de nuttige belasting. De nuttige belasting zal in het algemeen variabel zijn. Het maximum moment in een doorsnede zij dan $M_{b\,max}$, het minimummoment $M_{b\,min}$. Evenzo zijn $N_{b\,max}$ en $N_{b\,min}$ de maximum respectievelijk de mimimum normaalkracht.

In het volgende zullen alle grootheden als algebraische grootheden worden verwerkt. Hierbij wordt drukspanning positief gerekend (zie fig. 4). Deze

---

Notaties

M	moment
M_l	overgangsmoment t.g.v. alléén voorspannen boven het steunpunt links van het beschouwde veld
M_r	overgangsmoment t.g.v. alléén voorspannen boven het steunpunt rechts van het beschouwde veld
M_{eg}	moment t.g.v. eigen gewicht
M_b	moment t.g.v. nuttige belasting
$M_{b\,max}$	maximum moment t.g.v. nuttige belasting
$M_{b\,min}$	minimum moment t.g.v. nuttige belasting
M_{max}	maximum moment t.g.v. nuttige belasting en eigen gewicht
M_{min}	minimum moment t.g.v. nuttige belasting en eigen gewicht
N_{eg}	normaalkracht t.g.v. eigen gewicht
N_b	normaalkracht t.g.v. nuttige belasting
$N_{b\,max}$	maximum normaalkracht t.g.v. nuttige belasting
$N_{b\,min}$	minimum normaalkracht t.g.v. nuttige belasting
e	excentriciteit van de normaalkracht
e_o	onderlimietkernstraal
e_b	bovenlimietkernstraal
F	oppervlak van een doorsnede
l	overspanning
q	verdeelde belasting
R	kromtestraal van de kabel
r	verplaatsing van de verankering
ds	elementje van de kabel
u	verdeelde druk per eenheid van lengte loodrecht op de kabelas
V	voorspankracht
W_o	onderweerstandsmoment
W_b	bovenweerstandsmoment
x	abcis langs de zwaartelijn van de balk
y	excentriciteit van de kabel t.o.v. de zwaartelijn
z	excentriciteit van de druklijn t.o.v. de zwaartelijn t.g.v. alléén voorspannen
$\varphi = \frac{dy}{dx}$	helling van de raaklijn aan de kabel t.o.v. de zwaartelijn
σ_o	spanning in onderste vezel
σ_b	spanning in bovenste vezel
σ_k	kleinste toelaatbare betonspanning
σ_g	grootste toelaatbare betonspanning

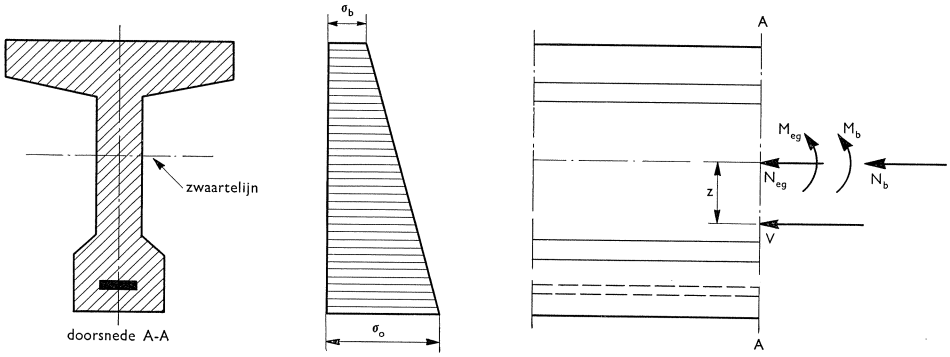


Fig. 4. Belasting van een doorsnede van een voorgespannen balk

krachten en momenten kunnen samengesteld worden tot één centrische kracht $(V + N_{eg} + N_b)$ en één moment $(- V.z + M_{eg} + M_b)$. De grootste spanningen treden op in de uiterste vezels. Deze zijn:

$$\sigma_o = \frac{V + N_{eg} + N_b}{F} - \frac{-V.z + M_{eg} + M_b}{W_o}$$

$$\sigma_b = \frac{V + N_{eg} + N_b}{F} + \frac{-V.z + M_{eg} + M_b}{W_b}.$$

De spanningen σ_o en σ_b mogen de toelaatbare spanningen niet overschrijden. Als $\bar{\sigma}_k$ de (algebraisch) kleinste en $\bar{\sigma}_g$ de (algebraisch) grootste toelaatbare betonspanningen zijn dan heeft men dus:

$$\bar{\sigma}_k \leqslant \frac{V + N_{eg} + N_b}{F} - \frac{-V.z + M_{eg} + M_b}{W_o} \leqslant \bar{\sigma}_g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\bar{\sigma}_k \leqslant \frac{V + N_{eg} + N_b}{F} + \frac{- V.z + M_{eg} + M_b}{W_b} \leqslant \bar{\sigma}_g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Uit 1 volgt:

$$\frac{W_o}{V}\left\{\frac{V + N_{eg} + N_b}{F} - \bar{\sigma}_g\right\} - \frac{M_{eg} + M_b}{V} \leqslant z$$

$$\leqslant \frac{W_o}{V}\left\{\frac{V + N_{eg} + N_b}{F} - \bar{\sigma}_k\right\} - \frac{M_{eg} + M_b}{V} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Uit 2 volgt:

$$\frac{W_b}{V}\left\{\frac{V + N_{eg} + N_b}{F} - \bar{\sigma}_g\right\} + \frac{M_{eg} + M_b}{V} \leqslant z$$

$$\leqslant \frac{W_b}{V}\left\{\frac{V + N_{eg} + N_b}{F} - \bar{\sigma}_k\right\} + \frac{M_{eg} + M_b}{V} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Er zijn dus twee intervallen. Indien z in beide intervallen gelegen is, zal de toelaatbare spanning nergens worden overschreden. Het moment en de normaalkracht ten gevolge van de nuttige belasting hebben een maximum en minimum waarde, waarbij de uiterste waarden niet tegelijk behoeven op te treden. Hierdoor ontstaan vele grenzen. In het algemeen is het gebruikelijk de betrekkingen (3) en (4) grafisch in de balk uit te zetten. In fig. 5 is een voorbeeld gegeven van het verloop van de grenzen waarbinnen z moet zijn gelegen. Voor liggers over twee of meer even hoge steunpunten worden de betrekkingen (3) en (4) veel eenvoudiger daar dan N_{eg} en N_b nul zijn.

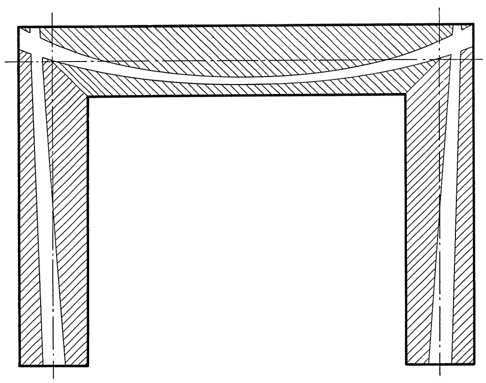


Fig. 5. Grenzen waarbinnen de druklijn t.g.v. alléén voorspannen moet zijn gelegen

Uit een en ander blijkt, dat de grenzen, waarbinnen de druklijn moet zijn gelegen, op geheel analoge wijze worden bepaald als de grenzen waarbinnen de kabel moet zijn gelegen bij statisch bepaalde constructies.

Vorm en ligging van de kabels.

Er zijn geen algemene regels te geven hoe de kabel geplaatst moet worden, opdat de druklijn tengevolge van alleen voorspannen binnen de begrenzing, welke men hiervoor stelt, blijft. Door beide formuleringen voor de werking van de kabel naast elkaar te gebruiken, al naar dit uitkomt, kan veel overbodig rekenwerk vermeden worden.

Bij liggers over meerdere steunpunten met vele gelijke velden zullen de velden in het midden ongeveer dezelfde maximum en minimum momentenlijn hebben. De kabel zal in deze velden dezelfde vorm en ligging krijgen. Het rekenwerk wordt dan beperkt door van één veld uit te gaan, dat zich dan ten opzichte van de voorspanning als volledig ingeklemd gedraagt.

De vorm van de begrenzing voor de druklijn tengevolge van alléén voorspannen is afhankelijk van de vorm van de zwaartelijn van de ligger. Teneinde de wrijving te beperken maakt men de balk wel zodanig dat de kabel geheel recht wordt. Het effect van de voorspanning ligt dan uitsluitend in de geconcentreerde krachten in de verankering.

Enkele practische aspecten van statisch onbepaalde balkconstructies in voorgespannen beton

Er zijn vrij veel statisch onbepaalde bruggen gebouwd, welke door tijdelijke scharnieren e.d. in een statisch bepaalde toestand worden voorgespannen.

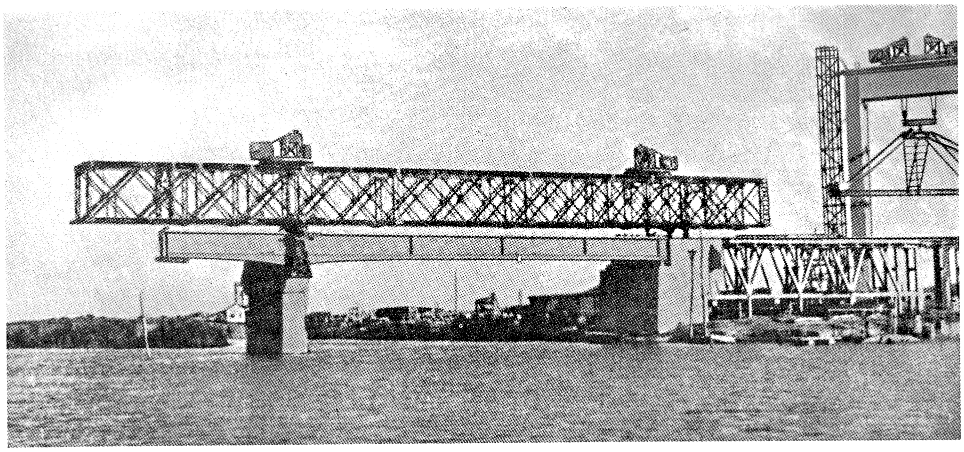


Fig. 6. De Juazeirobrug in Brazilië

Indien nu na het voorspannen het geheel statisch onbepaald gemaakt wordt (b.v. door de tijdelijke scharnieren vol te storten met beton) zonder daarbij extra momenten in te voeren, dan blijft de druklijn op dezelfde plaats. De momenten voor het eigen gewicht blijven echter dezelfde als in de tijdelijke statisch bepaalde toestand. De brug gedraagt zich dan alleen statisch onbepaald voor de mobiele belasting en het eventueel later aangebrachte deel van het eigen gewicht. Voorbeelden van deze werkwijze zijn o.a. de brug op het Festival of Britain en de Juazeiro brug in Brazilië (fig. 6).

Een andere methode, om de ligging van de druklijn direct te weten, is de steunpuntsreacties met behulp van vijzels bepaalde waarden te geven. Bij de (boog)bruggen over de Marne (o.a. te Ussy) heeft men in de scharnieren vijzels geplaatst. De krachten welke hiermee werden aangebracht, veroorzaakten een moment in de ligger, dat tegengesteld was aan het moment tengevolge van het eigen gewicht. Hierdoor is een zeer slanke constructie ontstaan. [1]).

De kabels kunnen ook zo geplaatst worden dat à priori de ligging van de druklijn bekend is. Dit geval doet zich voor bij de zogenaamde hoedkabel (fig. 7). De hoedkabel wordt in de utiliteitsbouw veel toegepast voor het verbinden van losse balken. Denkt men zich de kabel als druklijn, dan is het moment evenredig met de excentriciteit. Het moment is gedeeltelijk positief en gedeeltelijk negatief. Beschouwt men het momentenvlak als tweede belastingvlak, dan zijn de oplegreacties hiervan vrijwel nul. Er treedt dus vrijwel geen hoekverdraaiing en dus geen extra moment op. Door de hoedkabel wordt alleen het moment in de omgeving van het steunpunt beïnvloed.

---

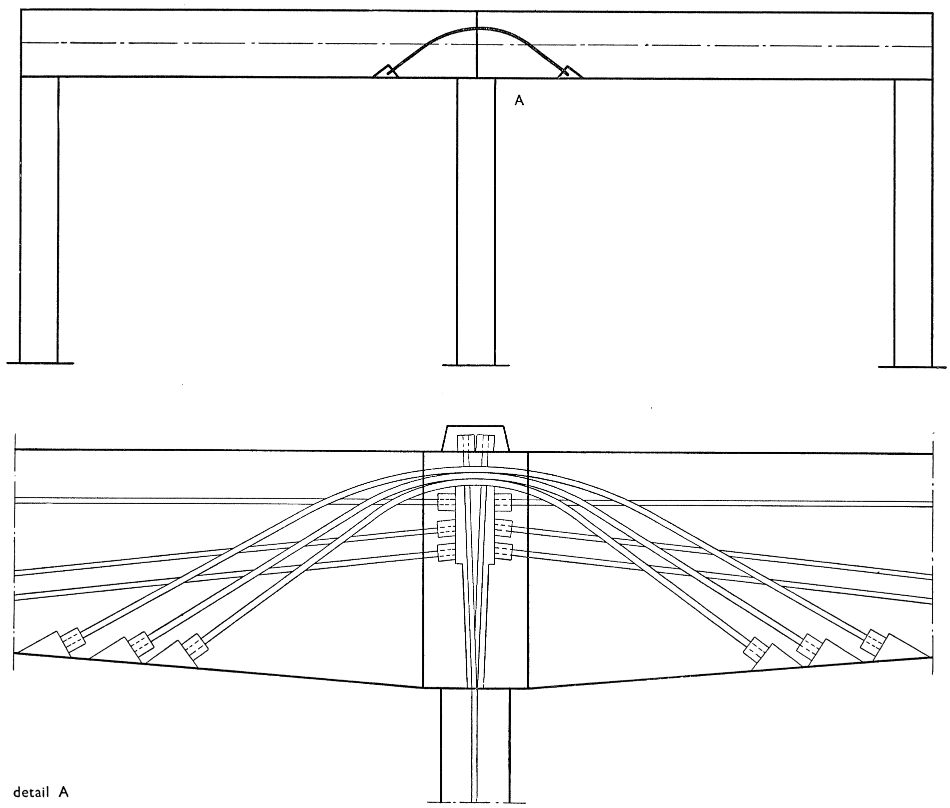
[1]) Illustraties hiervan o.a. in: A. S. G. Bruggeling: Voorgespannen beton. p 223. (Delft 1950, Waltman) en Cement 1950, p 376-382

De voordelen van de toepassing van hoedkabels zijn:
1. Men heeft grote vrijheid in het aanbrengen van de gewenste voorspanning in elke doorsnede van de balk.
2. De ,,schuine trekspanning'' wordt verminderd.
3. De elastische verkorting van de balk is klein omdat de kabels zo kort zijn (grootte-orde 3—5 m). Men heeft dan geen complicaties indien de balken op kolommen zijn opgelegd.

De nadelen zijn:
1. Bij korte kabels is het moeilijk de gewenste spanning aan te brengen, daar tijdens het verankeren altijd slip van de draden in de verankering optreedt.
2. Doordat de kabels vrij sterk gebogen zijn wordt de wrijving tussen de kabel en de omhulling zeer groot. Bovendien kan de druk V/R zo hoog oplopen, dat plaatselijk verbrijzeling van het beton optreedt.
3. Bij de uitvoering treden vaak moeilijkheden op ten gevolge van de grote opeenhoping van kabels en verankeringsorganen.

Niet alle systemen van voorgespannen beton lenen zich voor deze constructiewijze.

Fig. 7. Hoedkabels



Vergelijking tussen statisch bepaalde en statisch onbepaalde balkconstructies in voorgespannen beton

De keuze tussen een statisch bepaalde en een statisch onbepaalde constructie wordt door vele factoren beinvloed. Deze factoren zijn o.a. de te verwachten zettingen van de fundering en de wijze van montage. Een bijzonder belangrijk punt is ook of er materiaalbesparing optreedt bij een statisch onbepaalde constructie ten opzichte van een statisch bepaalde. Dit kan nagegaan worden door de werking van de verschillende factoren, die de vorm en afmetingen van een profiel bepalen, te vergelijken. Als voorbeeld volgt hier de gang van zaken bij het ontwerpen van een profiel, dat door nuttige belasting en eigen gewicht alleen op buiging (en dwarskracht), maar niet op normaalkracht wordt belast.

In een doorsnede (fig. 8) werkt een constante normaalkracht V. Tengevolge van een moment M ondergaat deze normaalkracht een verplaatsing M/V.

Met de formules $\sigma_o = \frac{V}{F} + \frac{V.e}{W_o}$ en $\sigma_b = \frac{V}{F} - \frac{V.e}{W_b}$ kunnen bij een bepaalde excentriciteit e de spanningen in de onderste resp. bovenste vezel berekend worden. Wordt de kracht V, uitgaande van het zwaartepunt, door een moment naar boven verplaatst, dan zal in een bepaald punt e_b óf in de bovenste, óf in de onderste vezel de toelaatbare spanning bereikt worden. Dit punt is het bovenlimietkernpunt. Het onderlimietkernpunt kan analoog gedefinieerd worden. Indien een profiel symmetrisch is worden in de boven- en ondervezel tegelijk de toelaatbare spanningen bereikt, zowel wanneer V in het onderals wanneer V in het bovenlimietkernpunt staat. Bij een asymmetrisch profiel is dit niet mogelijk. Door een goede keuze van de voorspankracht worden de toelaatbare spanningen in beide uiterste vezels slechts bij plaatsing van V in één limietkernpunt bereikt. Een symmetrisch profiel is daarom voordeliger dan een a-symmetrisch bij een alleen op buiging belaste ligger. Door een negatief moment gaat de druklijn naar beneden, door een positief moment naar boven. Indien de toelaatbare spanningen niet overschreden mogen worden mag de excentriciteit van V niet groter zijn dan de limietkern. De maximale verplaatsing naar boven is $\frac{M_{max}}{V}$, de maximale verplaatsing naar beneden is $\frac{M_{min}}{V}$. De totale kernhoogte moet dus, als alle grootheden algebraisch worden opgevat, gelijk zijn aan:

$$e_o - e_b = \frac{M_{max}}{V} - \frac{M_{min}}{V} .$$

Daar het moment ten gevolge van het eigen gewicht zowel in M_{max} als in M_{min} voorkomt kan hiervoor ook geschreven worden:

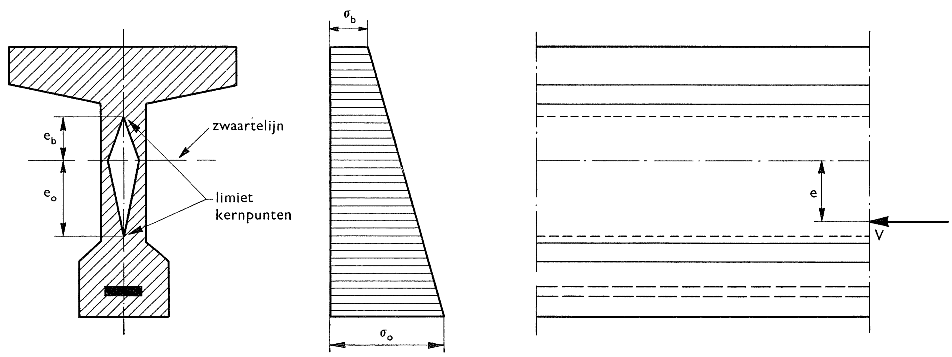
$$e_o - e_b = \frac{M_{b\ max}}{V} - \frac{M_{b\ min}}{V}$$

De verplaatsing van de druklijn ten gevolge van het moment door het eigen gewicht is $-\frac{M_{eg}}{V}$ ten opzichte van de druklijn ten gevolge van alleen voorspannen (zie fig. 8). Bij het ontwerpen wordt een dusdanig profiel gekozen dat de vereiste limietkernhoogte aanwezig is, en dat de kabel niet buiten het profiel valt, maar op een redelijke afstand van de rand van het profiel. Uit fig. 8 blijkt ,dat wanneer bij gelijkblijvende limietkernhoogte, het maximum- en minimum moment ten gevolge van de mobiele belasting een verschillend teken hebben, een veel groter moment ten gevolge van eigen gewicht kan worden opgenomen dan wanneer het minimum moment nul is. Indien een doorsnede behalve buigende momenten ook normaalkrachten ten gevolge van de mobiele belasting moet overbrengen dan volgt uit soortgelijke beschouwingen dat een asymmetrisch profiel de voorkeur verdient.

Daar bij het materiaalverbruik, zoals uit vorenstaande blijkt, zeer veel factoren een rol spelen, is het niet mogelijk in het algemeen vast te stellen of een statisch onbepaalde constructie economisch is ten opzichte van een statisch bepaalde. Ter toelichting strekke het volgende voorbeeld.

Voor een ligger op vier steunpunten is in fig. 9 de lijn voor $M_{bmax} - M_{bmin}$ weergegeven. De linkerhelft van deze figuur geldt voor gelijkmatig verdeelde belasting, de rechterhelft voor één puntlast. Met gestippelde lijnen is aangegeven wat de momentenlijn is voor balken welke niet doorlopen over de steunpunten. Bij de gelijkmatig verdeelde belasting is $M_{bmax} - M_{bmin}$ voor

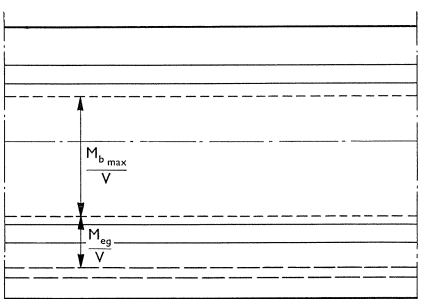
Fig. 8. Verplaatsingen van de druklijn bij belasting van de constructie



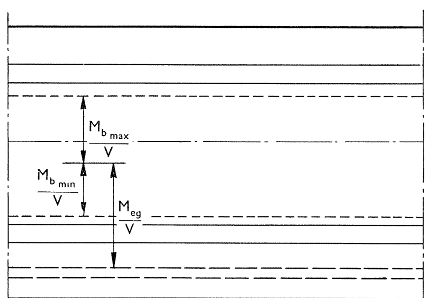
de continue ligger evengroot als voor de afzonderlijke balken, behoudens in de omgeving van de tussensteunpunten. Bij de puntlast is $M_{bmax} - M_{bmin}$ in de continue ligger iets kleiner (behalve bij de tussensteunpunten) dan in de afzonderlijke balken, hetgeen voor een deel veroorzaakt wordt doordat maar één puntlast op de gehele ligger is geplaatst. Boven de steunpunten is $M_{bmax} - M_{bmin}$ nog iets groter dan in de veldmiddens bij de afzonderlijke balken. De kernhoogte zal in beide gevallen dus ongeveer even groot worden.

Indien het eigen gewicht groot is in verhouding tot de mobiele belasting zal bij de afzonderlijke balken de ruimte onder het onderkernpunt te klein worden voor een symmetrisch profiel, zodat men tot een asymmetrisch profiel moet overgaan, hetgeen minder gunstig is. Bij de statisch onbepaalde constructie kan een veel groter moment ten gevolge van eigen gewicht opgenomen worden, wat dus van belang wordt bij grote overspanningen. Bovendien zijn de momenten ten gevolge van eigen gewicht in de velden kleiner. Boven de steunpunten is het moment ten gevolge van eigen gewicht groot, en het positief moment te verwaarlozen. Hier zou zich dezelfde situatie voordoen als bij de statisch bepaalde ligger, maar daar het zowel in verband met de wrijving als aesthetisch meer bevredigend is de ligger boven de steunpunten te verhogen, is dit minder bezwaarlijk. De conclusie is dus dat bij een relatief groot eigen gewicht de statisch onbepaalde constructie economisch kan zijn.

Uit bovenstaande blijkt dat toepassing van statisch onbepaalde liggers in vele gevallen economisch verantwoord zal zijn, temeer daar het aantal verankeringen veelal geringer is en de opleggingen eenvoudiger zijn dan bij statisch bepaalde constructies het geval is. Elk geval zal echter afzonderlijk onderzocht moeten worden mede in verband met fundering, montage, constructiehoogte enz. In een statisch onbepaalde constructie is in het algemeen



statisch bepaalde ligger



statisch onbepaalde ligger

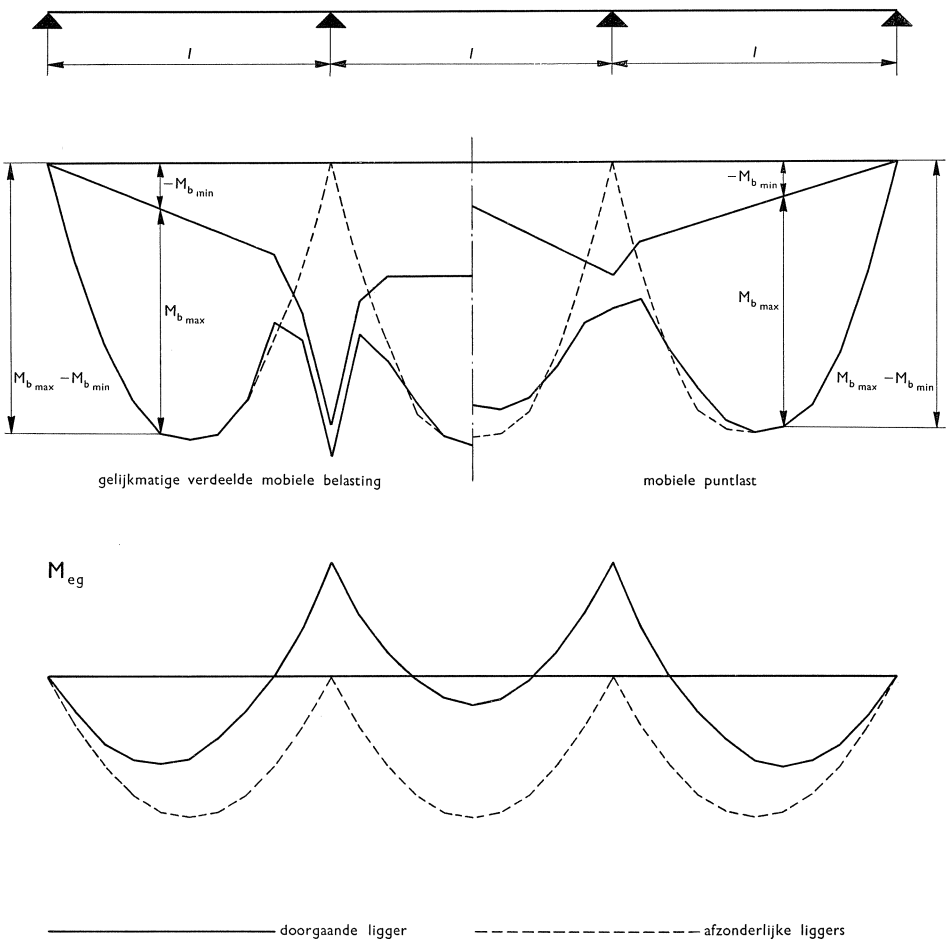


Fig. 9. $M_{max} - M_{min}$ voor een continue ligger op vier steunpunten en voor afzonderlijke balken

een extra veiligheid aanwezig ten opzichte van statisch bepaalde. Indien dit in rekening zou worden gebracht door b.v. toepassing van de plasticiteitsleer zou een statisch onbepaalde ligger als bovenstaande ook bij een kleinere invloed van het eigen gewicht meer economisch kunnen worden. Er kan met de huidige stand van de wetenschap op het gebied van voorgespannen beton echter nog niet tot een verantwoorde plasticiteitsberekening worden overgegaan.