

DE AFLEIDING VAN EEN STELSEL  
NIET-LINEAIRE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN  
VOOR CIRKELCYLINDRISCHE SCHALEN  
BIJ GROTE DOORBUIGINGEN

*Na een beschouwing over het knikken van schalen onder axiale en radiale belasting, waarbij in het bijzonder op het doorslagverschijnsel wordt gewezen, wordt voor cirkelcyndrische schalen een afleiding gegeven van een stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen, welk stelsel geldt bij grote doorbuigingen. Deze afleiding loopt volkomen parallel met die van de lineaire vergelijkingen voor schalen (D.K.J.) en met de niet-lineaire vergelijkingen voor vlakke platen. Tenslotte wordt het stelsel vergeleken met dat van von Karman c.s., waarbij geconstateerd wordt, dat bij hen een term ontbreekt, op welk feit door Chien reeds is gewezen.*

Bij de voortdurend toenemende overspanningen van cirkelcyndrische schaaldaken — tonschalen zowel als shedschalen — komt het knik- of plooi-probleem steeds meer op de voorgrond. Deze problemen vormen een moeilijk en weinig ontgonnen gebied, waarin men voor onaangename verrassingen kan komen te staan.

In zijn boek „Cylindrical Shells” geeft Lundgren op pag. 352 een praktijk-formule voor de toelaatbare axiale spanning in een lange cylindrische schaal, t.w.  $\sigma_x = 0,6 E \frac{t}{R}$ . Deze formule is gebaseerd op de plooivoorwaarde voor een axiaal gelijkmatig gedrukte cylinder, afgeleid o.m. door Timoshenko (lit. 2, 3), t.w.  $\sigma_x = \frac{Et}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$ . Lundgren zelf vermeldt reeds dat bij het experimentele onderzoek van cylinders voor de kniklast waarden gevonden zijn, die slechts 15—60% bedroegen van de theoretisch bepaalde en hij voegt daarom een reductiefactor, groot 1/3, aan de formule toe. Maar ook dan kan men werkelijke waarden voor de knikkracht verwachten, die slechts de helft zijn van de berekende. Het is duidelijk dat het berekenen van een schaal op deze wijze tot niet verantwoorde conclusies, en dus constructies, aanleiding kan geven.

Naar een verklaring voor de discrepanties tussen de uitkomsten van theorie en experiment is naarstig gezocht. Men heeft getracht het te vinden in de randvoorwaarden, die tijdens het experiment niet aan de praemissen, gesteld in de theorie, zouden voldoen (het verhinderen van het tot ontwikkeling komen van radiale verplaatsingen b.v. geeft aanleiding tot secundaire buigende momenten). (Flügge, lit. 4.) Men heeft ook getracht eventuele initiale uitbuigingen, dus afwijkingen in de cylindrische vorm, in rekening te brengen. (Flügge,

lit. 4 en Donnell, lit. 5.) Beide genoemde factoren bleken wel enige invloed te hebben, doch bij lange na niet genoeg om de discrepanties voldoende te verklaren. Bovendien leidden deze verklaringen tot conclusies die niet in overeenstemming waren met de experimenteel gevonden resultaten. Beide invloeden zouden n.l. aanleiding moeten geven tot een plastisch knikken. Bij dunwandige cylinders bleek echter het knikverschijnsel vaak volkomen elastisch te zijn. De cylinder herkreeg dan volledig zijn oorspronkelijke vorm bij het wegnemen van de belasting.

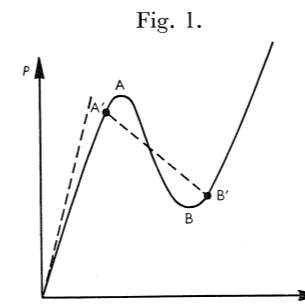
Bij schaaldaken, die dus niet een gesloten doorsnede hebben, is het probleem nog veel gecompliceerder dan bij cylinders. De randvoorwaarden langs de langsranden moeten immers in rekening worden gebracht. Het plooiën is hier bovendien niet alleen een gevolg van de axiale spanningen in het vlak van de schaal, doch bovendien van de tangentiale spanningen (vgl. het knikken van een boog). Wanneer men van de belasting (vnl. dus het eigen gewicht) de radiale component neemt, de schaal beschouwt als een deel van een cylinder en de formules voor de knikvoorwaarde voor cylinders bij radiale belasting toepast, vindt men veelal reeds een aanmerkelijk lagere waarde voor de toelaatbare belasting dan uit de formules voor de axiale spanningen volgt.

Men kan tenslotte ook beide knikvoorwaarden (voor axiale en radiale belasting dus) combineren op de wijze zoals door Flügge (lit. 4) reeds is vermeld en ook door Girkmann (lit. 3) is weergegeven. Ook de aldus gevonden waarden zal men echter met de nodige reserve dienen te hanteren. Bij een onderzoek van de Werkgroep aan een messing model bleek de knikbelasting toch nog slechts de helft te zijn van de op bovenvermelde wijze berekende waarde en ook het onderzoek aan cartonnen modellen, dat thans plaats vindt, leidt tot overeenkomstige conclusies.

De genoemde formules gaan ook steeds er van uit dat er vóórdit het plooiën optreedt in de schaal een membraanspanningstoestand heerst. Bij een schaaldak nu is dit nooit het geval, daar er door de randvoorwaarden langs de langsranden steeds buigingsinvloeden aanwezig zijn, waardoor het gehele membraanspanningsbeeld totaal wordt gewijzigd, (vgl. W.G.S.-mededelingen 1954 no. 2) en er bovendien in de gehele schaal buigende en wringende momenten zullen voorkomen.

Von Karman c. s. zijn de eersten die een geheel andere visie op het probleem

geven. In een zeer instructieve reeks artikelen (lit. 6, 7 en 8) maken zij duidelijk dat naar hun mening het plooiverschijnsel bij schalen in vele gevallen slechts kan worden verklaard door een niet-lineaire theorie voor grote doorbuigingen, in plaats van door de tot dan toe gebruikte lineaire theorie, die infinitesimale uitbuigingen veronderstelt. De lineaire theorie zal een maximale waarde (punt A in fig. 1) geven voor de kniklast. Deze maximale waarde kan echter



slechts onder ideale omstandigheden (geometrisch zuivere vorm e.d.) worden bereikt. Als de schaal uitknikt zal de last die nodig is om de schaal in een uitgebogen stand te houden afnemen. De elastische energie die dus vrij komt zal het knikproces versnellen tot dat een minimum waarde ( $B'$ ) van de kniklast is bereikt. De toename in de doorbuigingen is derhalve zo snel dat een schaal a.h.w. over springt uit b.v.  $A'$  naar een stand met grote doorbuigingen ( $B'$ ). Er heeft een soort doorslagverschijnsel plaats. Dit verschijnsel dat steeds door de Werkgroep is waargenomen bij het onderzoek van het messingmodel en de kartonnen modellen, kan ieder constateren bij een enigszins bolle deksel van een bus b.v. De kinetische energie die bij dit doorslagverschijnsel optreedt is oorzaak dat de schaal even om zijn definitieve evenwichtsstand heen slingert. Door de inwendige wrijving zal hij echter spoedig deze stand vinden. Von Karman c.s. hebben het boven beschreven verschijnsel ook geïllustreerd aan en nagegaan bij de beproeving van slanke kolommen, die ter halver hoogte gesteund waren door een niet-lineair elastische ondersteuning (i.c. een halfcirkelvormige ring). Het betrof hier dus zuiver elastische knik. Het analogon bij cylinderschalen vindt men door de schaal opgebouwd te denken uit langsstaafjes evenwijdig aan de beschrijvende, die gesteund worden door de cirkelboogjes in de dwarsdoorsneden.

Er zijn dus op een gegeven moment bij toenemende belasting bepaalde uitbuigingsvormen met eindige verplaatsingen mogelijk, waarbij de totale potentiële energie van het systeem geringer is dan die bij de uiterste kniklast. Het is duidelijk dat de klassieke theorie, waarin slechts infinitesimale uitbuigingen worden betrokken, deze standen niet kan beschrijven. De door haar beschreven standen kunnen op een gegeven moment labiel worden en het hangt dan slechts van toevalligheden als onregelmatigheden in vorm, randvoorwaarden, belasting e.d. af, wanneer de schaal in de stabiele stand zal overspringen (via  $A'$   $B'$  in fig. 1 b.v.).

Dat ook bij gewapend betonnen schaaldaken deze verschijnselen kunnen voorkomen wordt o.a. bewezen door een beschrijving van het uitknikken van een model op schaal 1:10 bestaande uit cementmortel en „wapening”, van een zeer vlakke bolvormige schaal te Zürich (lit. 9).

### De afleiding van de differentiaalvergelijkingen

We baseren de afleiding op de gebruikelijke aannamen: homogeen, elastisch, isotroop materiaal, dat voldoet aan de Wet van Hooke, dikte van de schaal klein t.o.v. de overige afmetingen. De afmetingen van de schaal, de coördinaten, verplaatsingscomponenten, belastingscomponenten, spanningskrachten en momenten per cm' zijn in de figuren 2 t/m 6 gegeven.

De afleiding verloopt voor het overige geheel analoog aan die van de lineaire D.K.J.-vergelijking, gegeven in W.G.S.-mededelingen 1953 no. 3, pag. 45 e.v., waarheen in dit verband zij verwezen. Allereerst drukken we weer de vormveranderingsgrootheden  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  en  $\gamma_{xy}$  uit in de verplaatsingsgrootheden.

### CIRKELCYLINDRISCHE SCHAAL

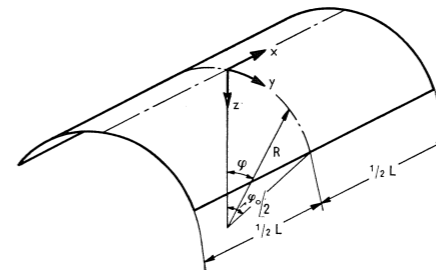


Fig. 2. Coördinaten

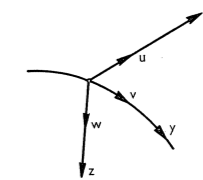


Fig. 3. Verplaatsingen u, v en w

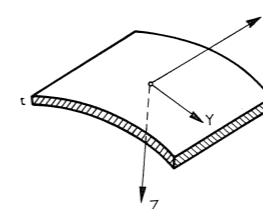


Fig. 4. Belastingscomponenten

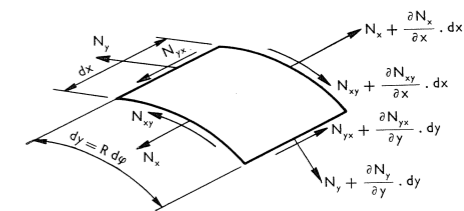


Fig. 5. „Vlakke” spanningskrachten  
De spanningen t.g.v. hiervan bedragen:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} \quad \sigma_y = \frac{N_y}{t} \quad \tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{t}$$

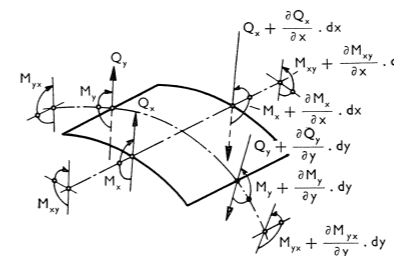


Fig. 6. Momenten en dwarskrachten

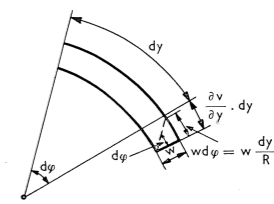


Fig. 7. Bepaling van  $\varepsilon_y$

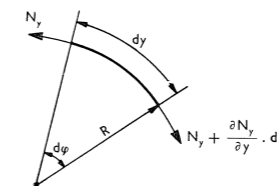


Fig. 8. Radiale component van  $N_y$

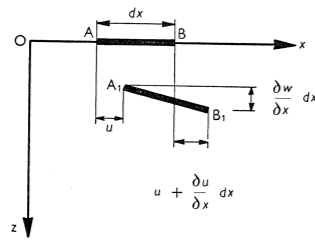


Fig. 9.

Beschouwen we een lijnelementje AB in het vlak van de schaal in de richting van de  $x$ -as (fig. 9), dan zien we dat de verlenging van het elementje tengevolge van de verplaatsing  $u$  gelijk is aan  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ . Wanneer de doorbuigingen  $w$  niet meer klein zijn t.o.v. de plaatdikte en dus niet zijn te verwaarlozen, komt er echter nog iets bij. De verlenging van het elementje tengevolge van deze

verplaatsing  $w$  is  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$  zoals volgt uit de vergelijking van de lengte van het elementje  $A_1B_1$  met de lengte van zijn projectie op de  $x$ -as, wanneer termen hoger dan de tweede graad worden verwaarloosd (zie ook lit. 10, p. 304 e.v.). We vinden dus:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \dots \dots \dots (1a)$$

en op overeenkomstige wijze

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R} \dots \dots \dots (1b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \dots \dots \dots (1c)$$

De toevoeging  $\frac{w}{R}$  in vgl. (1b) is een gevolg van de kromming waardoor een verplaatsing  $w$  naar binnen de vezel in  $y$ -richting een bedrag  $w \, dq = w \frac{dy}{R}$  korter doet worden (fig. 7).

Met behulp van de Wet van Hooke drukken we de spanningskrachten als volgt uit in de vormveranderingsgrootheden:

$$N_x = D (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$N_y = D (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$N_{xy} = \frac{D}{2} (1 - \nu) \gamma_{xy}$$

waarin  $D$  de rekstijfheid voorstelt:  $D = \frac{Et}{1 - \nu^2}$  ( $E$  = elasticiteitsmodulus,  $t$  = dikte van de schaal). Evenzo definiëren we de buigingsstijfheid  $K = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$ .

We vinden dus:

$$N_x = D \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R} \right\} \right] \dots \dots \dots (2a)$$

$$N_y = D \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R} + \nu \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] \dots \dots \dots (2b)$$

$$N_{xy} = \frac{D}{2} (1 - \nu) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \dots \dots \dots (2c)$$

De buigende momenten en dwarskrachten blijven dezelfde als in de elementaire plaattheorie dus:

$$M_x = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots \dots \dots (3a)$$

$$M_y = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots \dots \dots (3b)$$

$$M_{xy} = -K (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots \dots \dots (3c)$$

$$Q_x = -K \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \dots \dots \dots (3d)$$

$$Q_y = -K \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) \dots \dots \dots (3e)$$

waarin ter afkorting de operator  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  is ingevoerd.

We stellen nu de vergelijkingen, die het probleem beheersen, op.

In de eerste plaats de evenwichtsvergelijkingen in  $x$ - en  $y$ -richting:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X = 0 \dots \dots \dots (4a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y = 0 \dots \dots \dots (4b)$$

Deze vergelijkingen zijn dezelfde als bij een vlakke spanningstoestand in platen of in de membraantheorie van schalen.

In het hierna volgende laten we de massakrachten  $X$  en  $Y$  echter buiten beschouwing.

Voeren we een spanningsfunctie  $F$  in, waarvoor geldt:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

dan wordt aan de vergelijkingen (4a) en (4b) dus identiek voldaan.

Voor de derde vergelijking nemen we hier eerst de compatibiliteitsvoorwaarde in het vlak van de schaal. De afleiding hiervan loopt weer volkomen analoog met die van de vergelijking van Airy. We elimineren dus uit de vergelijkingen (2a), (2b), (2c) de verplaatsingscomponenten  $u$  en  $v$ . Omdat de contractiecoëfficiënt  $\nu$  hier is meegenomen is het eliminatieproces iets gecompliceerder.

**Notaties:**

- $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  specifieke rekken van het middenvlak in respectievelijk de  $x$ - en de  $y$ -richting
  - $\gamma_{xy}$  specifieke hoekverdraaiing in het middenvlak
  - $E$  de elasticiteitsmodulus van de schaal
  - $\nu$  de contractiecoëfficiënt van de schaal
  - $t$  de dikte van de schaal
  - $D = \frac{Et}{1 - \nu^2}$  : de rekstijfheid
  - $K = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$  : de buigingsstijfheid
  - $\Delta$  de operator  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$
  - $q$  kromtestraal in  $y$ - $z$  vlak in een bepaald punt in uitgebogen stand
- Voor de overige notaties zij verwezen naar de figuren 2 t/m 6 op blz. 11.

ceerder dan in de reeds eerder genoemde afleiding, vermeld in de W.G.S.-mededelingen 1953 no. 3, en als niet essentieel hier weggelaten. Men gaat het eenvoudigst aldus te werk:

Bepaal uit vergelijking (2a):  $\frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2}$ ; uit (2b):  $\frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2}$ ; uit (2c):  $-2 \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y}$ ,

vervolgens uit vergelijking (2a):  $-\nu \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2}$ ; uit (2b):  $-\nu \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2}$ ; uit (2c):  $-2\nu \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y}$ .

Sommatie van deze zes vergelijkingen levert het resultaat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} \right) = \\ = D (1 - \nu^2) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]. \end{aligned}$$

En wanneer men de spanningsfunctie  $F$  invoert verkrijgt men de vergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \\ = D (1 - \nu^2) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \dots \dots (5a) \end{aligned}$$

of ook:

$$\Delta \Delta F = E.t. \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \dots \dots (5b)$$

De vierde vergelijking behelst de voorwaarde voor evenwicht in de radiale ( $z$ ) richting.

Uit de theorie van de loodrecht op hun vlak belaste platen weten we dat met behulp van de momentenvoorwaarden om  $y$ -as en  $x$ -as genoemde evenwichtsvoorwaarde resulteert in de vergelijking:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{K} \cdot q$$

of wel:  $K \Delta \Delta w = q \dots \dots \dots (6)$

waarin  $q$  de belasting loodrecht op de plaat voorstelt.

In de afleiding in W.G.S.-mededelingen 1953 no. 3 is reeds uiteengezet dat deze belasting niet alleen bestaat uit de radiale belastingscomponent  $Z$ , doch dat hieraan de radiale component  $\frac{N_y}{R}$  dient te worden toegevoegd (zie ook fig. 8)

Uit de theorie van de vlakke platen met grote doorbuigingen weten we echter dat aan de belasting dient te worden toegevoegd de volgende groep termen:

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{zie lit. 10 p. 300 e.v. en p. 343 e.v.})$$

De eerste term stelt voor de verticale component van de kracht  $N_x$ . Men vergelijk deze met de verticale belasting bij een stangenkromme met gegeven poolfiguur en horizontale kracht (lit. 11). Zo is de tweede term de verticale component van de beide schuifkrachten  $N_{xy}$  en  $N_{yx}$  en de laatste term de verticale component van de kracht  $N_y$ .

Alles tezamen wordt dus vergelijking (6) aldus:

$$K \Delta \Delta w = Z + N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_y \cdot \frac{1}{R} \dots \dots \dots (7)$$

De beide laatste termen tezamen duiden de radiale component van  $N_y$  aan t.w.  $\frac{N_y}{\rho}$  als  $\rho$  de kromtestraal in uitgebogen stand in een bepaald punt voorstelt.

Uit de theorie van de gebogen staven weten we echter ook dat

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{zie b.v. lit. 12 p. 89})$$

Invoering van de spanningsfunctie  $F$  leidt tot de vergelijking:

$$K \Delta \Delta w = Z + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \dots \dots \dots (8)$$

De beide vergelijkingen (5a) c.q. (5b) en (8) beheersen dus het probleem van de grote verplaatsingen bij cirkelcylindrische schalen. Zij dienen tezamen te worden opgelost onder aanname van de juiste randvoorwaarden voor de onbekenden  $F$  en  $w$ . Dit laatste vormt echter bij schaaldaken, die dus geen gesloten profiel hebben en waar aan het schaalgedeelte randleden zijn bevestigd wel moeilijkheden.

We willen nu nog eens naast elkaar stellen de overeenkomstige vergelijkingen uit de niet-lineaire theorie van de vlakke platen bij grote doorbuigingen en uit de lineaire theorie van de schaaldaken (kleine doorbuigingen dus).

We hebben dan:

<i>De niet-lineaire plaatvergelijking.</i>	<i>De lineaire schaalvergelijking.</i>
(Zie Timoshenko: Theory of Plates and Shells, blz. 343.)	(Zie W.G.S.-mededelingen 1953—no. 3.)

Als compatibiliteitsvergelijkingen in het vlak van plaat en schaal:

$$\Delta \Delta F = Et \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \dots (9a) \quad \left| \quad \Delta \Delta F = -Et \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots (9b)$$

Combinatie van (9a) en (9b) levert dus op:

$$\Delta \Delta F = Et \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \dots \dots \dots (9c)$$

De niet-lineaire plaatvergelijking.

De lineaire schaalvergelijking.

Als evenwichtsvergelijking loodrecht op het vlak van plaat en schaal.

$$K\Delta\Delta w = Z + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots \quad (10a)$$

$$K\Delta\Delta w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \dots \dots \dots \quad (10b)$$

Combinatie van (10a) en (10b) levert dus op:

$$K\Delta\Delta w = Z + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \dots \dots \dots \quad (10c)$$

Door von Karman c.s. (lit. 8) wordt ook vergelijking (9c) = (5b) gegeven, afgeleid op vrijwel dezelfde wijze.

In de plaats van vergelijking (10c) = (8) komt bij hen echter een andere vergelijking voor t.w.:

$$K\Delta\Delta\Delta\Delta w - \Delta\Delta \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{Et}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \dots \quad (11)$$

die reeds door Donnell (lit. 13) is afgeleid.

Laten wij in vergelijking (10c) de belasting  $Z$  weg en passen wij tweemaal de operator  $\Delta$  toe, dan vinden we:

$$K\Delta\Delta\Delta\Delta w - \Delta\Delta \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{R} \Delta\Delta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \dots \quad (12)$$

De vergelijkingen (11) en (12) blijken dus in de laatste term te verschillen.

Door tweemaal differentiëren naar  $x$  van vergelijking (9c) volgt voor de laatste term in vergelijking (12) de uitdrukking:

$$-\frac{1}{R} \Delta\Delta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{R^2} \cdot Et \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{R} \cdot Et \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \dots \dots \quad (13)$$

Vergelijking van de laatste term uit vergelijking (11) met het rechterlid van vergelijking (13) doet zien dat bij von Karman de term

$$-\frac{1}{R} \cdot Et \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

ontbreekt. De schrijvers geven zelf aan dat hun vergelijkingen tot stand gekomen zijn op grond van intuïtieve overwegingen, en niet door systematisch redeneren. Door Chien, die het schalenprobleem geheel algemeen aanvat met behulp van tensorrekening en in een enkel geval de uitkomsten „vertaalt” wordt ook op deze ontbrekende termen gewezen (lit. 14, p. 129).

Het komt ons echter voor dat een rechtstreekse eenvoudige afleiding zoals hier is gegeven, van belang kan zijn.

Tenslotte kan nog opgemerkt worden dat het probleem beheerst wordt door twee differentiaalvergelijkingen van de 4de orde en niet door één van de 4e en één van de 8ste orde zoals door von Karman c.s. is gesteld.

LITERATUUR:

1. H. Lundgren: Cylindrical Shells, Kopenhagen, 1951.
2. S. Timoshenko: Theory of elastic Stability, New York, 1936.
3. K. Girkmann: Flächentragwerke, Wenen, 1954.
4. W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen, Berlin, 1934.
5. L. H. Donnell: A. New Theory for the Buckling of thin Cylinders under Axial Compression and Bending, Transactions A.S.M.E., vol. 56, 1934.
6. Th. von Karman en Hsue-Shen Tsien: The Buckling of Spherical Shells by External Pressure, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 7 (Dec. '39) nr. 2.
7. Th. von Karman, L. G. Dunn en Hsue-Shen Tsien: The Influence of Curvature on the Buckling Characteristics of Structures, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 7 (May 1940) nr. 6.
8. Th. von Karman en Hsue-Shen Tsien: The Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 8 (June '41) no. 8.
9. E. Schubiger: Die Schalenkuppel in vorgespanntem Beton der Kirche Felix und Regula in Zürich. Schweizerische Bauzeitung 68 (1950) nr. 16.
10. S. Timoshenko: Theory of Plates and Shells, New York 1940
11. J. Klopper: Leerboek der Toegepaste Mechanica I.
12. J. Klopper: Leerboek der Toegepaste Mechanica II.
13. L. H. Donnell: Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion, N.A.C.A. Technical Report 479 no. 1934.
14. Wei-Zang Chien: The Intrinsic Theory of Thin Shells and Plates, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 1 (April '43) nr. 1 bl. 297 e.v., vol. 2 (April '44) nr. 1 bl. 43 e.v. en bl. 120 e.v.
15. W.G.S.-mededelingen 1953 no. 3.

SUMMARY

After a review of the buckling of shell constructions under axial and radial loads, in which special attention is drawn to the phenomenon of „oil canning”, a derivation is given of a set of differential equations for circular cylindrical shells, which set is applicable in the case of large deflections.

This derivation is completely parallel to that of the linear equations for shells (D.K.J.) and to that of the non-linear equations for flat plates. Lastly, the equations are compared with those of von Karman and others, with the result that a term is found which does not occur in von Karman's equations and to which Chien has already drawn attention.