

SCHAALDAKMODEL

EXPERIMENTELE TOETSING

VAN ENKELE ANALYTISCHE BEREKENINGSMETHODEN ¹⁾

Teneinde de nauwkeurigheid van enkele methoden voor het berekenen van schaaldaken te bepalen werden metingen verricht aan een stalen model van een tonschaal met variërende randlidhoogte. In dit artikel worden na een beschrijving van de proeven verscheidene van de gemeten spanningsverlopen weergegeven. Uit de vergelijking met de theorie blijkt, dat zowel de methode op basis van de D.K.J.-vergelijking, als die op basis van de differentiaalvergelijking volgens het iteratieprincipe van Aas Jakobsen, tot betrouwbare resultaten leiden. De derde harmonische van de belastingreeks is voor de meeste spanningsfuncties van zeer ondergeschikte betekenis.

I. Inleiding

Het theoretisch onderzoek naar de spanningsverdeling in cirkelcylindrische schaaldaken heeft gedurende de laatste tientallen jaren geleid tot een groot aantal analytische berekeningsmethoden, die elk een eigen theoretische nauwkeurigheid bezitten. Deze nauwkeurigheid hangt af van de juistheid der ingevoerde aannamen en van de toegepaste verwaarlozingen. De laatste jaren is het inzicht in de betekenis van de verschillende factoren en in de invloeden, die deze afzonderlijk bezitten, in belangrijke mate vergroot. Een totale indruk van de nauwkeurigheid viel evenwel moeilijk te verwerven.

Opvallend is dat tijdens deze ontwikkelingsgang zo weinig experimentele toetsing van theoretische resultaten heeft plaatsgevonden, en dit verbaast des te meer daar het rekenwerk voor één schaal aanvankelijk geen dagen, doch weken tijd kostte wegens de gecompliceerdheid van de methoden. Bij de weinige proefnemingen, die in de aanvang zijn geschied volstond men met het meten van de doorbuigingen. De resultaten daarvan dragen evenwel weinig bij tot de mogelijkheid de optredende spanningen te leren kennen.

De Werkgroep Gewapend Beton- en Staalconstructies heeft getracht in de leemte te voorzien door een experimenteel onderzoek te entameren: aan een stalen model van een schaaldak (zie fig. 1) werden de optredende spanningen gemeten.

In de loop van de onderzoeksperiode werd de C.U.R. van het „Febo” bereid gevonden financieel bij te dragen, daar de resultaten ook van belang waren voor de Onderzoekingscommissie A₁ (Schaaldaken).

Voor het onderzoek werd een model van het meest voorkomende type, de lange cirkelcylindrische schaal gekozen. De theorie is afgeleid voor homogeen, isotroop materiaal, dat voldoet aan de wet van Hooke; beton wijkt hier in mindere of meerdere mate van af. Voorts spelen bij beton verschijnselen als

¹⁾ Dit artikel is een samentrekking van de rapporten BE-101-2121-IVa, VIb, VIc en VID, van de Werkgroep Gewapend Beton en Staalconstructies - T.N.O.

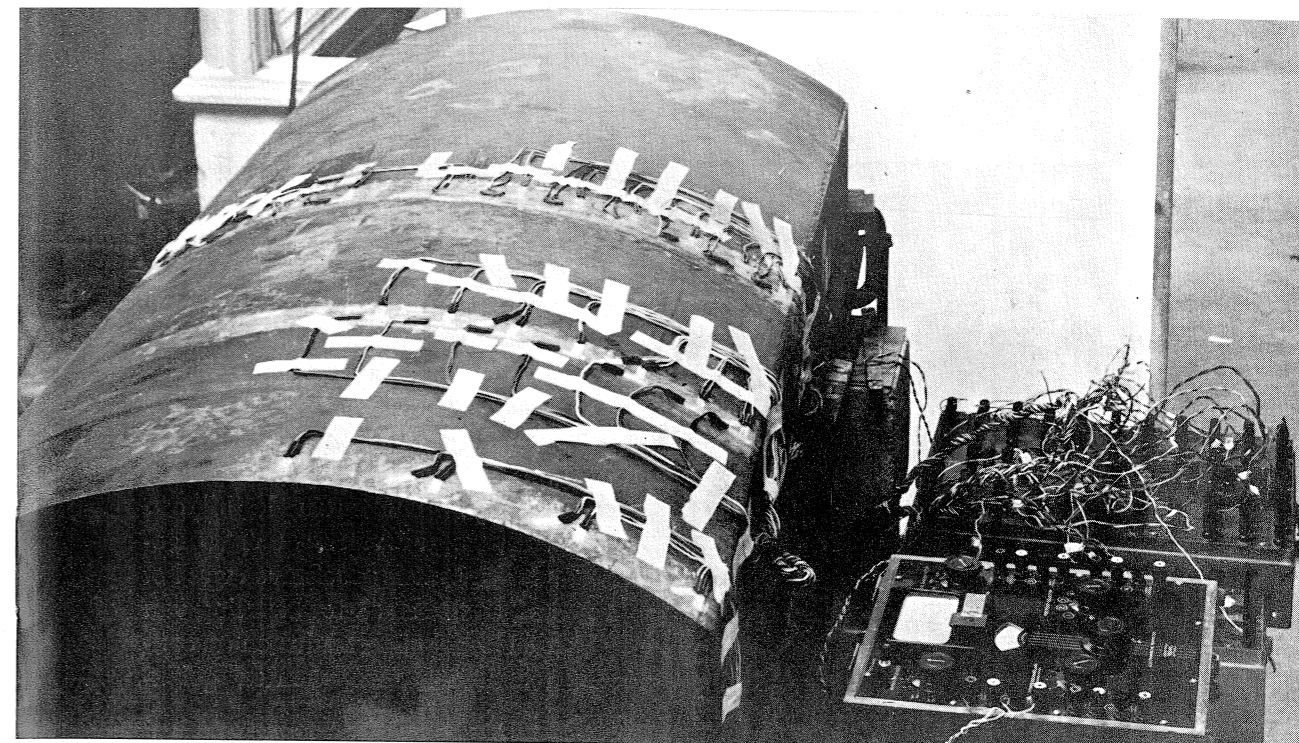


Fig. 1. Het stalen model met de rekstrookjes aan de bovenzijde zichtbaar. Bij de travers ontbreken nog de rekstrookjes in dwarsrichting, evenals de strookjes op $\frac{1}{12}$ deel van de overspanning van de travers af. De randbalkhoogte is hier nog 140 mm.

krimp en kruip een rol. Ook deze zijn niet in de theorie betrokken. Om de theorie te kunnen toetsen werd het model van een homogene en isotrope staalplaat vervaardigd. Staal leent zich bovendien goed voor het gebruik van rekstrookjes, waarmee de spanningen goed gelocaliseerd bepaald kunnen worden. De afmetingen van het model werden bepaald op: lengte $l = 150$ cm, breedte $B = 75$ cm, straal $a = 63,5$ cm, schaaldikte $\delta = 0,5$ cm, randbalkdikte 1 cm (zie fig. 2). De invloed van de hoogte van de randbalk kon worden bepaald door de aanvankelijke hoogte van 14 cm af te schaven tot 10 cm, en later tot 6 cm.

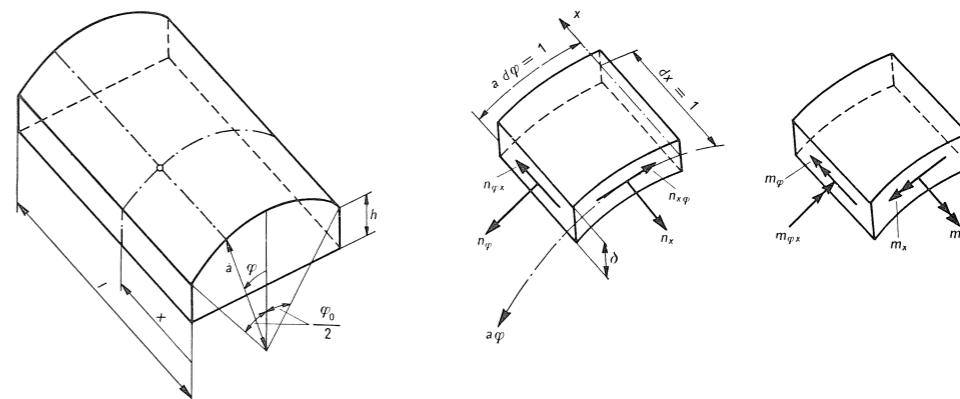


Fig. 2a. Schema van een tonschaal met coördinatenstelsel en aanduiding van de afmetingen.

Fig. 2b. De inwendige krachten n_x , n_ϕ , $n_{x\phi}$ en $n_{\phi x}$ en momenten m_x , m_ϕ , $m_{x\phi}$ en $m_{\phi x}$, zoals deze in positieve zin op een schaalement werken.

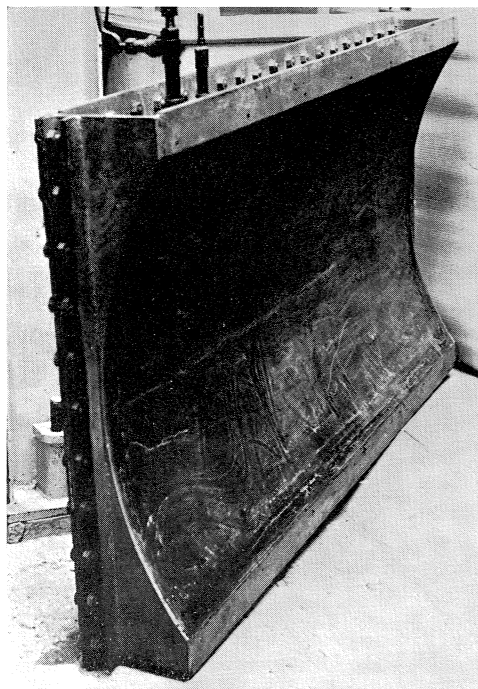


Fig. 3. Het stalen belastingsreservoir met de, op het schaaldak passende, rubberafsluiting.

q de belasting per eenheid van oppervlakte is. Laten we nu de verhoudingen ongewijzigd, en q eveneens (ook bij de randbalk) dan treden dus bij verkleining van de schaal dezelfde spanningen op. Een verticale belasting, op dezelfde wijze verdeeld als het eigen gewicht in werkelijkheid, is moeilijk aan te brengen. Om met voldoende nauwkeurigheid te kunnen meten moest q vrij groot zijn. Dit werd bereikt door het uitoefenen van een radiale belasting. Het reservoir (zie fig. 3) kan met perslucht gevuld worden en op de schaal geklemd worden. De gekromde reservoirwand, die met het model in aanraking komt, is geheel van rubber en brengt dus de druk als radiale belasting over op het schaaloppervlak.

Fig. 4 toont de complete opstelling. Met een open kwikmanometer wordt de druk in de luchtkist gecontroleerd. Een schuimrubber-vlies tussen schaaloppervlak en rubberwand vangt de oneffenheden t.g.v. de stroomdraden der rekstrookjes op. De eindschotten (=traversen) steunen elk op twee rolpleggingen. Uit een inleidende meting bleek, dat de symmetrie van het model weinig afwijkingen vertoonde. De reproduceerbaarheid van de metingen was heel goed; de lineariteit was eveneens goed. Er werd belast tot 0,6 at; de experimenteel gevonden waarden zijn voor de figuren in het algemeen omgerekend voor een radiale belasting van 1 kg/cm^2 .

Vanwege de symmetrie kon volstaan worden met een meetpuntenschema op één vierde van het schaaloppervlak (zie fig. 1). In de middendoorsnede werd

Door het walsen van de plaat en door het lassen van de eindschotten en de randbalken aan de schaal ontstonden initiaalspanningen, waardoor het niet uitgesloten mocht worden, dat bij hogere belastingen zich plaatselijk vloeïngsverschijnselen zouden voordoen. Om dit te voorkomen werd het model, geplaatst in een speciale, zware inspanconstructie, bij een temperatuur van $\pm 600 \text{ }^\circ\text{C}$ gegloeid. Enkele proefstaven van het toegepaste staal, ter bepaling van de elasticiteitsmodulus en de contractiecoëfficiënt, werden gelijktijdig gegloeid.

Uit de formules voor de spanningen blijkt: $\sigma = Hq$, waarin H een dimensieloze grootte is, afhankelijk van de verhoudingen tussen de schaalafmetingen en van de plaats der spanning, en waarin

de halve boog door de meetpunten in zessen verdeeld, op één kwart van de overspanning was eveneens een indeling in zessen. Aan de rand, bij de traversen, werden ook enige meetpunten gekozen, evenals op de randbalk.

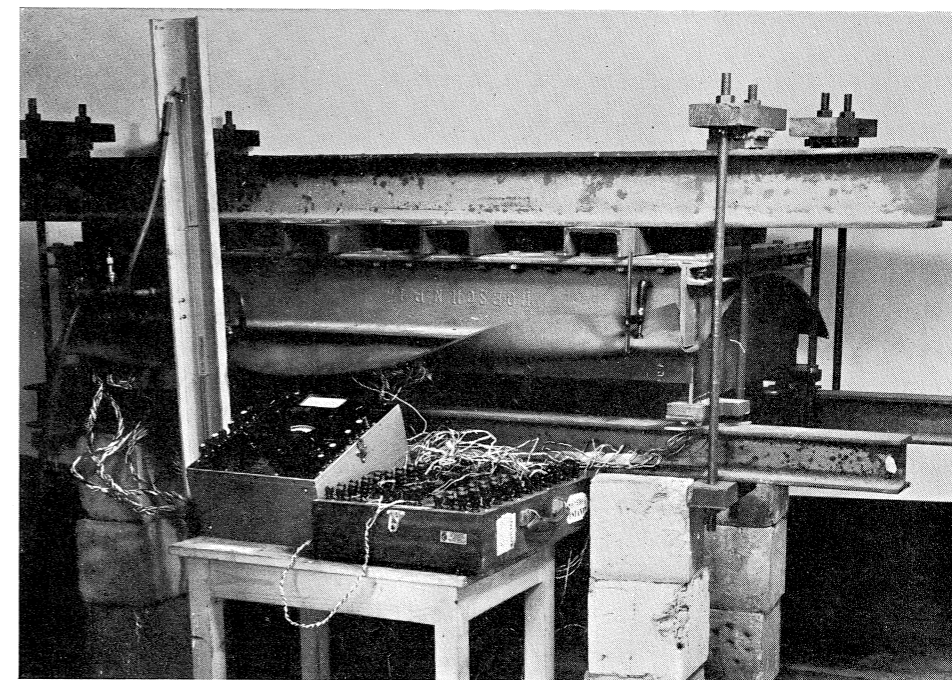
Later is het schema (op $1/12$ van de overspanning) uitgebreid, zodat het spanningsverloop in langsrichting beter bepaald kon worden. De rekken werden gemeten in langsrichting, in dwarsrichting, en onder 45° met deze richtingen. Daardoor konden ook de schuifspanningen berekend worden. De strookjes werden niet over elkaar heen geplakt, het bovenste strookje zou immers niet de rek aan de oppervlakte van het materiaal meten, maar de rek op een afstand van dit oppervlak, die niet verwaarloosd zou mogen worden t.o.v. de vrij kleine plaatdikte. Vooral bij het bepalen van de momenten zou dit tot onnodige onnauwkeurigheid leiden. Door interpolatie kon echter de rek in een bepaald punt in een andere richting dan waarin in dat punt gemeten was, gevonden worden. In totaal werden ongeveer 150 rekstrookjes toegepast.

II. Berekening

De berekening van de spanningen in het model werd gebaseerd op de differentiaal-vergelijking, afgeleid volgens de iteratie-methode van Aas Jakobsen.

Bij deze methode zijn weinig verwaarlozingen ingevoerd, m.a.w. de theore-

Fig. 4. Het model wordt belast, de open kwikmanometer wijst de druk aan van de perslucht in het reservoir, dat door de trekstangen verhinderd wordt zich omhoog te bewegen. De rekstrookjes zijn aan de meetapparatuur aangesloten. De randbalk is afgeschaafd tot 60 mm.



tische nauwkeurigheid is zeer groot. Wel is door Aas Jakobsen in de afleiding de dwarscontractie-coëfficiënt $\nu = 0$ gesteld (zie b.v. K. Girkmann, Flächen-tragwerke, Wenen 1948, pag. 405-412).

Bij het gebruikte stalen model was $\nu = 0,283$; de invloed hiervan mocht niet meer verwaarloosd worden. De formules moesten dus onder invoering van de dwarscontractie-coëfficiënt opnieuw worden afgeleid. De karakteristieke vergelijking werd daardoor:

$$m^8 + m^6 (2 - 4\lambda^2) + m^4 \{1 - (8 - 2\nu)\lambda^2 + 6\lambda^4\} + m^2 \{ - (8 - 4\nu)\lambda^2 + (14 - 4\nu)\lambda^4 - 4\lambda^6 \} + \lambda^4 \frac{1 - \nu^2}{k} - \nu\lambda^6 + \lambda^8 = 0$$

Hierin is $\lambda = \frac{n\pi a}{l}$ (a is de straal, l de overspanning, $n = 1, 3, 5, \dots$).

Bij deze berekening is de stijfheid van de randbalk tegen wringing in rekening gebracht, evenals de stijfheid van de randbalk tegen horizontale verplaatsing.

Ter vergelijking is de berekening ook uitgevoerd op basis van de D.K.J.-vergelijking, (zie W.G.S.-mededelingen 1953-No. 3) en wel één keer met de genoemde stijfheden in rekening gebracht (D.K.J.-A) en één keer onder verwaarlozing daarvan (D.K.J.-B). In figuur 5a worden de resultaten vergeleken voor n_x . De verschillen tussen de waarden volgens D.K.J.-A en volgens Aas Jakobsen bedragen hiervoor slechts 1 à 2%, tussen de D.K.J.-B-lijn en de andere twee lijnen is het verschil hier en daar wel 20%. Het randlid is dan ook vrij hoog, t.w. 14 cm, terwijl de pijl van de schaalboog maar ± 12 cm is. In fig. 5b worden de resultaten voor m_φ vergeleken. Ook hier treedt geen ver-

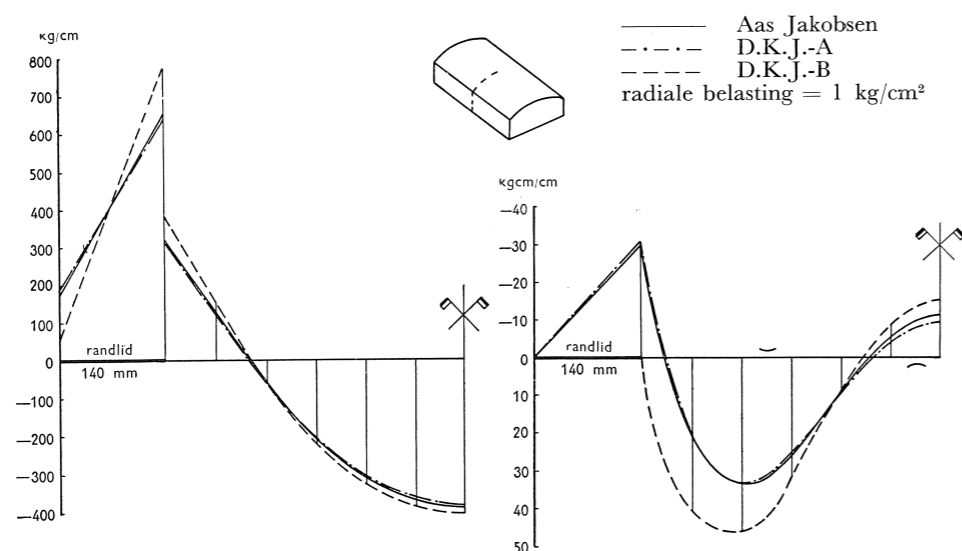


Fig. 5a. De langskracht n_x in de middendwarsdoorsnede.

Fig. 5b. Het dwarsmoment m_φ in de middendwarsdoorsnede.

schil van betekenis op tussen de uitkomsten van de twee methoden indien dezelfde randvoorwaarden worden ingevoerd. Wordt de stijfheid van de randbalk tegen wringing en tegen horizontale verplaatsing verwaarloosd, dan blijkt het resultaat aanzienlijk af te wijken.

De D.K.J.-vergelijking volgt ook uit die van Aas Jakobsen door 1 t.o.v. λ^2 te verwaarlozen. (λ wordt groter bij kleinere l , d.w.z. kortere schaal, of bij grotere n , d.w.z. hogere harmonischen). In de karakteristieke vergelijking blijven dan de onderstreepte coëfficiënten van de machten van m over, en we kunnen schrijven:

$$(m^2 - \lambda^2)^4 + \lambda^4 \frac{1 - \nu^2}{k} = 0$$

(van dezelfde gedaante als vgl. 14 op pag. 51 in W.G.S.-mededelingen 1953-No. 3, waarin slechts de notaties anders zijn). Uit deze onderlinge toetsing blijkt dus, dat de nauwkeurigheid veel meer afhangt van de ingevoerde aannamen, dan van de mate van gecompliceerdheid der toegepaste differentiaalvergelijking.

In het hierna volgende zullen de resultaten van de proef echter alleen vergeleken worden met spanningen, verkregen met de uitgebreide differentiaalvergelijking.

III. Meetresultaten

Drie series meetresultaten werden verkregen, respectievelijk behorende bij randbalkhoogten van 14 cm, 10 cm en 6 cm. Bij de eerste serie was een vrij redelijke overeenstemming tussen theorie en experiment, bij de tweede serie wat minder, en bij de derde serie was het resultaat beslist onbevredigend, vooral als in aanmerking genomen werd, welke voorzorgsmaatregelen er getroffen waren bij de vervaardiging, de opstelling en het meten, en welke nauwkeurigheid betracht was bij de berekening. Uit fig. 6, die de langsspanning in de middendoorsnede weergeeft voor een randbalkhoogte van 6 cm, blijkt de discrepantie duidelijk.

Een onderzoek naar de oorzaak hiervan was zeker op zijn plaats. Een gevolg van de ontwikkeling van de belasting in een Fourier-reeks kon het niet zijn. De getrokken lijn stelt n.l. de som van de 1^e en 3^e harmonische voor, de gestippelde lijn alleen de 1^e. De bijdrage van de 3^e harmonische is reeds klein;

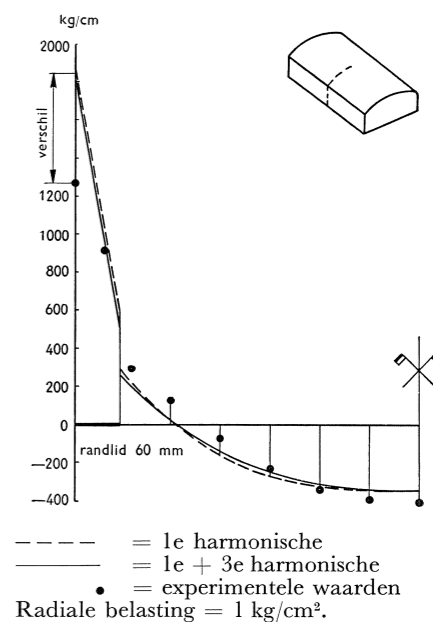


Fig. 6. n_x in de middendwarsdoorsnede.

daarom zal de afwijking zeker niet door superpositie van volgende harmonischen verdwijnen.

Verondersteld werd, dat de druk op de schaal bij de randbalk niet even groot was als elders. Er was reden om dit te veronderstellen: wegens het vulcaniseren van het rubbervlies aan de luchtkist was er waarschijnlijk een verdikking aanwezig langs de randen van het vlies, waardoor de luchtdruk op het rubber nabij deze randen niet geheel op de schaal, maar gedeeltelijk ook op de zijkanten van de luchtkist overgebracht zou worden.

Hoe breed deze zône van drukvermindering was, kon langs directe weg niet vastgesteld worden zonder de luchtkist te beschadigen.

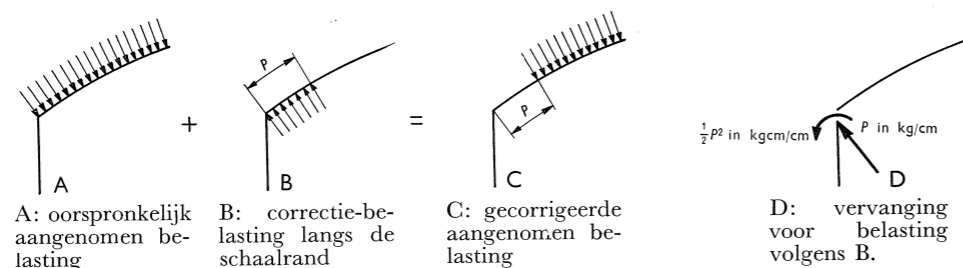


Fig. 7. Schema van de aangenomen belasting. (Radiale belasting: 1 kg/cm².)

Om deze belastingvermindering in rekening te brengen werd aangenomen, dat op de schaal bij de randleden, over de breedte P , een belasting naar buiten werkte (zie fig. 7B). De invloed hiervan zou op de reeds berekende gesuperponeerd moeten worden. Deze randbelasting werd geconcentreerd gedacht en verschoven naar de bovenkant van de randbalk, onder invoering van een buigend moment van $\frac{1}{2} P^2$ kgcm/cm (zie fig. 7D) en werd vervolgens in een Fourier-reeks ontwikkeld, waardoor met behulp van de gebruikte theorie de spanningen, die ten gevolge hiervan in schaal en randligger zouden optreden, gevonden konden worden, uitgedrukt in P en P^2 . Door nu de uitdrukking voor de langskracht n_r aan de onderkant van de randbalk (in de middendwarsdoorsnede) gelijk te stellen aan het verschil tussen de experimentele waarde en de oorspronkelijk berekende (zie fig. 6), werd een vierkantsvergelijking verkregen, waarvan de ene wortel P een strookbreedte van 2,83 cm opleverde. (Bij de andere waarde van P behoorde een fysisch onmogelijke strookbreedte.) We hadden ook in een ander punt de spanningen gelijk kunnen stellen. Maar omdat aan de onderkant van de randbalk het verschil het grootst was, kon dit verschil met de kleinste procentuele fout bepaald worden.

Door de gevonden P -waarde te substitueren werden alle spanningen, behorend bij de correctie-belasting, gevonden. Na superpositie op de oorspronkelijk berekende waarden bleek de overeenstemming in alle punten van de doorsnede zeer goed te zijn (zie fig. 11 a, blz. 28, de streep-stip-lijn benadert het experimenteel verloop vrij nauwkeurig).

Deze belastingcorrecties zijn voor alle drie randbalkhoogten uitgevoerd.

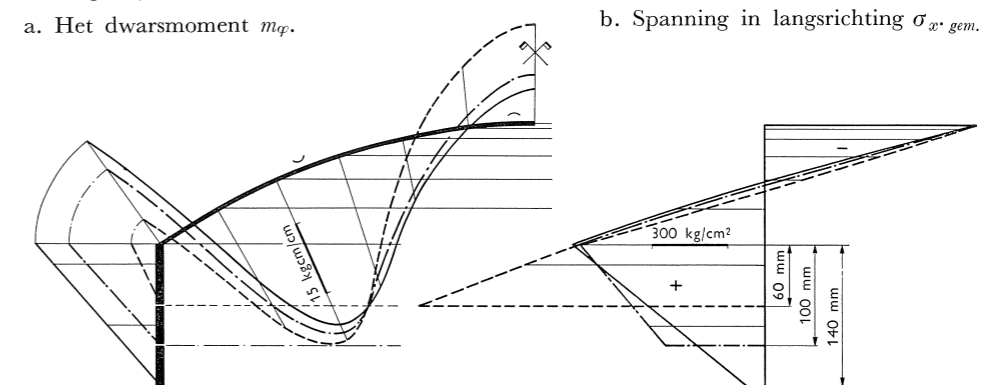
Door het ontbreken van de belasting langs de schaalranden was de totale verticale belasting verminderd, de oplegreacties moesten dus kleiner zijn. Een meting van de oplegreacties met drukdynamometers bevestigde dit bij een randbalkhoogte van 6 cm.

Een tweede controle was het vergelijken in de middendoorsnede van het uitwendige moment met het inwendig moment. De experimenteel bepaalde langsspanningen leverden door numeriek integreren een kleiner inwendig moment dan bij volledige belasting moest optreden. Het verschil was een maat voor de breedte P van de onbelaste strook.

De hieruit gevonden P -waarden stemden overeen met de eerder gevonden waarden. De tendenz in deze waarden voor de strookbreedten was: hoe hoger het randlid, hoe kleiner P . Dit ligt voor de hand: bij het hoogste randlid ging de schaalrand omhoog en werd dus tegen de luchtkist aangedrukt, wat een betere drukoverbrenging tot gevolg moest hebben. Het vergelijken van het verloop van de langsspanning $\sigma_{x\text{ gem}}$ voor de 3 hoogten verduidelijkt dit (fig. 8 b). Bij $h = 14$ cm loopt de spanning in de balk erg terug, dus is er een groot opbuigend moment t.g.v. de schuifkrachten op de bovenkant van de balk; bij $h = 10$ cm loopt de spanning minder terug en bij $h = 6$ cm loopt de spanning op, de randbalk zakt dus door. Het valt op, dat de spanningen in de schaal niet veel variëren. De figuur duidt er op, dat er één randbalkhoogte is, waarbij over de gehele hoogte de spanning in de randbalk dezelfde is. Bij een betonconstructie in de praktijk zal dit in het algemeen niet het geval zijn, omdat daar het eigen gewicht van de randbalk een grote rol speelt en een neerbuigend moment veroorzaakt.

Het vergelijken van de momentenlijnen in de middendoorsnede (fig. 8 a) leert, dat de maximale positieve m_q ongeveer gelijk blijft bij variërende h . De negatieve m_q 's bij de rand en in het midden veranderen sterk. Het is in principe mogelijk een vergelijking op te stellen met de randbalkhoogte h als on-

Fig. 8. Verloop in de middendwarsdoorsnede volgens het experiment bij variërende randlidhoogte (radiale belasting = 1 kg/cm²).



bekende, door voor het punt, waar een extreme m_φ verwacht wordt, deze m_φ in h uit te drukken en gelijk te stellen aan een bepaalde toe te laten m_φ .

De nauwkeurigheid. Voordat de theoretische en experimentele waarden vergeleken worden, volgen hier nog enkele opmerkingen over de nauwkeurigheid van de meetresultaten.

In samenwerking met de Afdeling Bewerking Waarnemingsuitkomsten van T.N.O. is hiernaar een onderzoek ingesteld. Gezocht is naar de standaardafwijkingen van de uit de meetwaarden berekende spanningsfuncties.

Figuur 9 verduidelijkt de praktische betekenis van de standaardafwijking s . De symmetrische kromme geeft weer de frequentie van het voorkomen van waarnemingsuitkomsten. De praktijkregel is nu, dat 95% van het totaal aantal waarnemingen minder dan twee maal de standaardafwijking van het gemiddelde af ligt. (Minder dan 1% ligt meer dan $3s$ van het gemiddelde af, 68% ligt minder dan s van de gemiddelde waarde af.)

De formule voor n_x is, om ons daartoe te bepalen:

$$n_x = \frac{E\delta}{2(1-\nu^2)} \frac{1-\nu\beta}{1-\beta^2} \left[\{ (b_{x_o} + b_{x_b}) (1-\nu\beta) + (b_{\varphi_o} + b_{\varphi_b}) (\nu-\beta) \} - \{ (b_{x_o} - b_{x_b}) (1-\nu\beta) + (b_{\varphi_o} - b_{\varphi_b}) (\nu-\beta) \} \frac{\delta}{6a} \right].$$

Hier is dus n_x uitgedrukt in de elasticiteitsmodulus (E), de schaaldikte (δ), de contractiecoëfficiënt (ν), en de gemeten waarden voor de rekstrookjes (b), in langs (x) en dwars (φ) richting, zowel aan de onderkant (o) als aan de bovenkant (b) van de schaal. β is de coëfficiënt voor de dwarsgevoeligheid van het rekstrookje (0,021 voor het gebruikte type). β werd foutloos verondersteld. Uit de afzonderlijke standaardafwijkingen van deze gemeten grootheden vinden we voor de standaardafwijking van n_x , als we aannemen dat de fouten onafhankelijk van elkaar zijn:

$$S_{n_x} = \left\{ A^2 S_r^2 + B^2 S_{b_{x_o}}^2 + C^2 S_{b_{\varphi_o}}^2 + F^2 S_{b_{x_b}}^2 + G^2 S_{b_{\varphi_b}}^2 + S_E^2 + \left(1 - \frac{Q\delta}{6aN} \right)^2 S_\delta^2 \right\}^{1/2}.$$

Hierin zijn A, B , enz. hulpgrootheden, functies van de gemeten waarden. De S -uitdrukkingen zijn procentuele standaardafwijkingen van de afzonderlijke componenten. Het bleek, dat in het algemeen de elasticiteitsmodulus met een S_E van 2,3% de grootste bijdrage leverde. Die 2,3% was een gevolg van de spreiding in de E -waarden over de verschillende delen van de schaalplaat.

De proefstaven, die langs de randen van het gebruikte plaatgedeelte uitgesneden waren, hadden een gemiddelde E van $2,112 \times 10^6$ kg/cm². De variatie in de contractiecoëfficiënt ν (gemiddelde waarde 0,283) had praktisch geen invloed. De procentuele standaardafwijkingen S_b voor de rekstrookjeswaarden waren gering. De metingen waren steeds enkele malen herhaald. Alleen voor kleine rekstrookjeswaarden was S_b groot.

Door nu voor elk meetpunt twee maal de bijbehorende standaardafwijking bij de gemiddelde n_x van dat punt op te tellen en ervan af te trekken, werden de grenzen van het betrouwbaarheidsinterval gevonden. De kans dat een n_x -waarde door toeval daarbuiten zou liggen was dus 5%. Het bleek, dat voor de middendoorsnede bij $h = 14$ cm op één uitzondering na, de

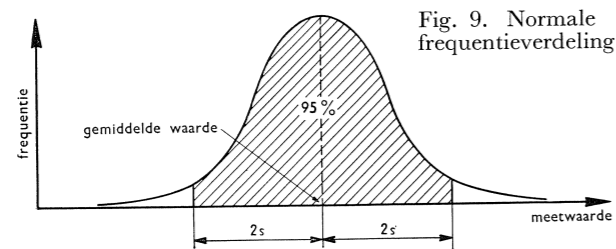
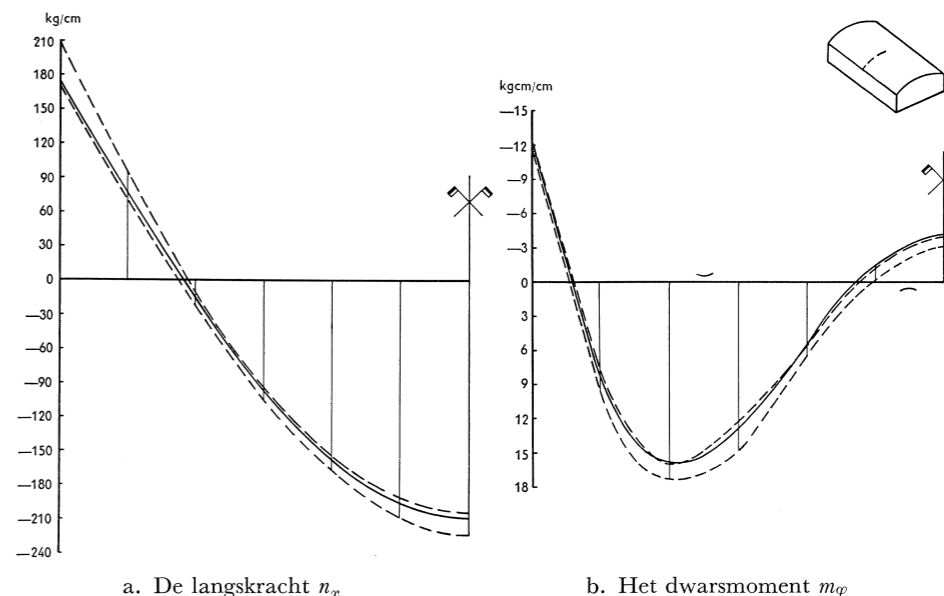


Fig. 9. Normale frequentieverdeling.

gemiddelde n_x -waarden in twee symmetrische punten, binnen elkaars betrouwbaarheidsinterval vielen, m.a.w. de verschillen waren niet significant. Het was daarom geoorloofd, voor de n_x -waarden van twee symmetrische punten een gemiddelde te nemen met één betrouwbaarheidsinterval.



a. De langskracht n_x

b. Het dwarsmoment m_φ

----- = grenzen van het betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid 0,05.
 ————— = 1^e + 3^e harmonische met correctie. Radiale belasting is 0,5 at.

Fig. 10. De nauwkeurigheid van de meetresultaten in de middendoorsnede.

Voor de beschouwde doorsnede is het resultaat voor n_x weergegeven in fig. 10 a. De grenzen van de betrouwbaarheidsintervallen (waarin dus verdisconteerd is de symmetrieafwijking) bij de afzonderlijke meetpunten zijn door stippellijnen verbonden. De theorie-lijn (1^e + 3^e harmonische) met belastingcorrectie ligt hier geheel binnen. We zouden kunnen zeggen dat de verschillen aan de invloed van toevallige factoren geweten moeten worden. Het belangrijkste is echter, dat hiermee een indruk van de nauwkeurigheid der meetresultaten is verkregen. En deze kan redelijk genoemd worden.

Van m_φ (fig. 10 b) kan hetzelfde gezegd worden. De grootste standaardafwijking bedraagt 5,3%. De theoretische waarde van m_φ valt in het topgedeelte van de schaal niet geheel binnen het betrouwbaarheidsinterval. m_φ is daar evenwel betrekkelijk klein.

De indruk van de nauwkeurigheid van n_x en m_φ mag representatief geacht worden voor de overige spanningsfuncties, omdat de waarnemingen er op dezelfde manier in verwerkt zijn. *Het heeft dus zin aan de hand van de meetresultaten na te gaan in hoeverre de theorie leidt tot de werkelijk optredende spanningen.*

IV. Vergelijking tussen de meetresultaten en de uitkomsten van de berekeningen

Aan de hand van enkele figuren zullen achtereenvolgens de spanningsgrootheden beschouwd worden. De theorie-lijnen behoren, voorzover niet anders is aangegeven, bij het gewijzigde belastingschema.

De *langs*kracht n_x . In fig. 11 a is weergegeven het resultaat van de oorspronkelijke berekening voor de 1^e harmonische. Daarop zijn afzonderlijk gesuperponeerd de invloed van de belastingcorrectie (randzône) en de invloed van de 3^e harmonische van de belastingreeks. Het blijkt, dat het van meer belang is de belasting goed in rekening te brengen, dan de 3^e harmonische in te voeren.

Door het invoeren van een betrekkelijke geringe belastingwijziging ($\pm 6\%$ van het totaal) wordt de overeenstemming aanzienlijk verbeterd. Ook in langsrichting is de 3^e harmonische in het algemeen van niet zo veel betekenis voor n_x . In figuur 11 b is het verloop weergegeven voor de aansluitingslijn tussen randbalk en schaal. Daar heeft de 3^e harmonische nog de meeste invloed. Toch benadert ook hier de 1^e harmonische het experimenteel verloop reeds vrij goed.

Fig. 11. Vergelijking van de theoretische n_x -waarden die berekend zijn bij verschillende belastingaannamen, met de experimentele waarden.

a. n_x in middendwarsdoorsnede

----- = 1^e harmonische zonder correctie
 ————— = 1^e + 3^e harmonische zonder correctie
 - . - . - = 1^e harmonische met correctie
 • • • = experiment
 belasting = 1 kg/cm².

b. n_x in de aansluitingslijn van schaal en randlid

----- = 1^e harmonische
 ————— = 1^e + 3^e harmonische
 • • • = experiment
 belasting = 1 kg/cm².

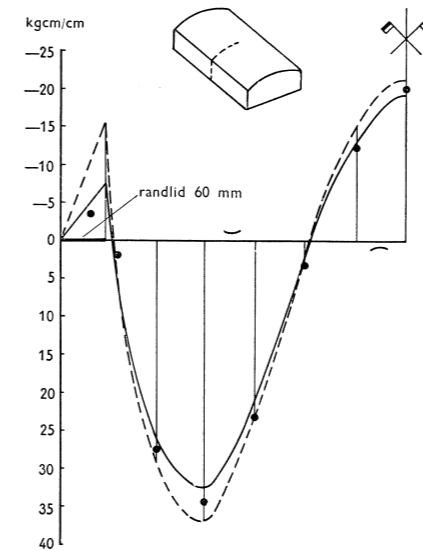
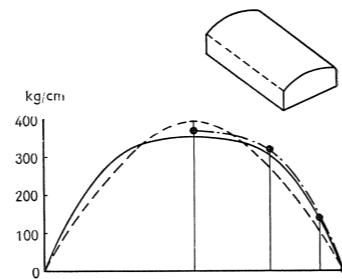
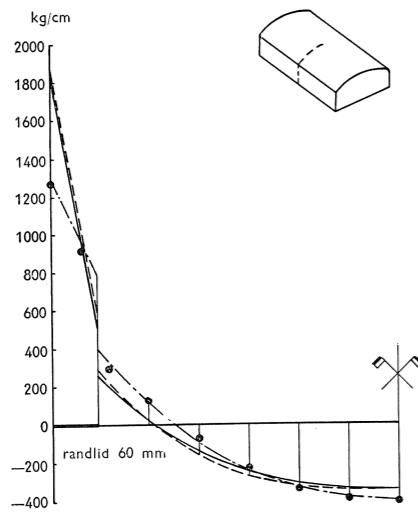


Fig. 12a. Verloop van m_ϕ in dwarsrichting

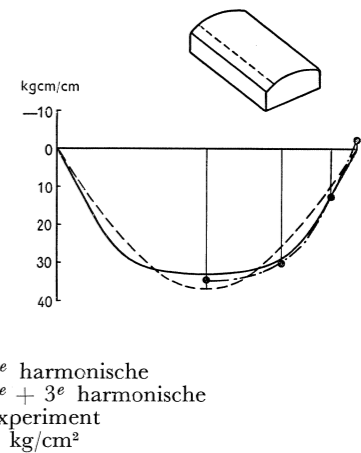


Fig. 12b. Verloop van m_ϕ in langsrichting

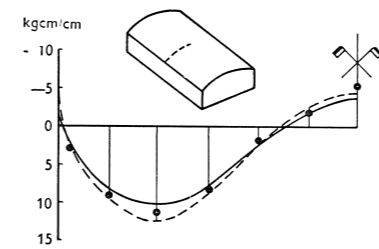


Fig. 12c. Verloop van m_x in dwarsrichting

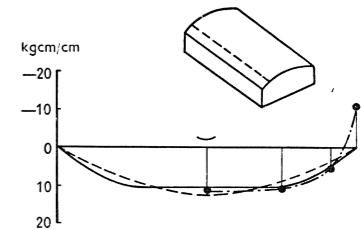


Fig. 12d. Verloop in m_x in langsrichting

Het *dwars*moment m_ϕ . Ook hier heeft de derde harmonische bij de randbalk-aansluiting de grootste invloed (zie fig. 12 a). Voor de zeer gevoelige dwarsmomenten (denk b.v. aan temperatuursinvloed) is evenwel de overeenstemming tussen experiment en 1^e harmonische, over de gehele dwarsdoorsnede bezien, reeds behoorlijk, al heeft, wat langsrichting betreft, (fig. 12 b, op 1/6 van de openingshoek van de rand af) superpositie van de 3^e harmonische natuurlijk wel een beter constant verloop in het middengedeelte tot gevolg.

Het *moment in langsrichting* m_x . Dit langsmoment vertoont over de gehele schaal hetzelfde verloop als m_ϕ (fig. 12 c en d). Uit de numerieke uitwerking blijkt dat m_x , hoofdzakelijk t.g.v. de vrij grote contractie-coëfficiënt, van niet te verwaarlozen grootte-orde is. De lijnen voor m_x zijn op dezelfde schaal getekend. Bij de traversen is slechts in één punt voor m_x een vrij hoge waarde gevonden. Deze waarde bedraagt evenwel maar ongeveer 25% van de grootste gemeten m_ϕ -waarde.

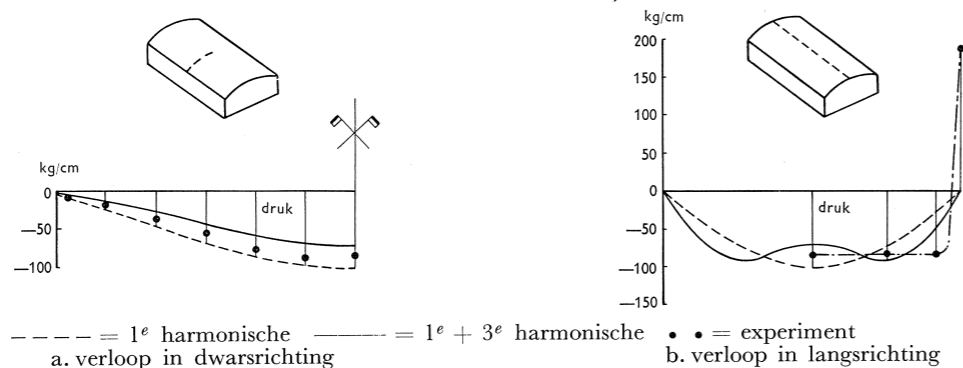


Fig. 13. De normaalkracht in dwarsrichting n_p . (belasting = 1 kg/cm²).

De normaalkracht in dwarsrichting n_p . Hiervoor was de belastingcorrectie van weinig betekenis. Voor de derde harmonische vooral is de membraancomponent van dominerende invloed, en deze component bedraagt $\frac{1}{3}$ deel van die van de eerste harmonische. De meetpunten liggen tussen de twee lijnen in (fig. 13 a), de 5^e harmonische levert na superpositie een spanningslijn, die ook hier tussenin zal liggen. Erg groot zijn deze spanningen nooit, het zijn steeds drukspanningen.

Bij de traversen moet er meer aandacht aan besteed worden. Daar treden n.l. trekspanningen op. Dit blijkt b.v. duidelijk voor het verloop in langsrichting in de top van de schaal (fig. 13 b). De discrepantie met de theorie is een gevolg van de aanname, dat de travers in eigen vlak oneindig stijf is. Op de rand van de travers werkt een schuifkracht, die aan de bovenkant trekspanningen doet ontstaan en daarbij wordt de aangrenzende schaalstrook betrokken. Deze „storing” blijkt echter zeer snel uitgedempt te zijn.

De schuifkracht $n_{\varphi x}$. Deze verloopt nabij de aansluitingsrand ongeveer lineair (fig. 14), in overeenstemming met het verloop van de uitwendige dwarskracht. Voor de randzône is de 3^e harmonische dan ook van meer betekenis, superpositie op de cosinusvormig verloopende 1^e harmonische levert een meer lineair verloop. $n_{\varphi x}$ bepaalt voor een belangrijk deel de oplegkracht.

De 3^e harmonische levert $\frac{1}{9}$ deel van de belasting, die met de 1^e harmonische in rekening wordt gebracht. Op grond hiervan is, zonder uitvoerige berekening, tamelijk goed een schatting te maken over de bijdrage voor $n_{\varphi x}$ van de 3^e harmonische.

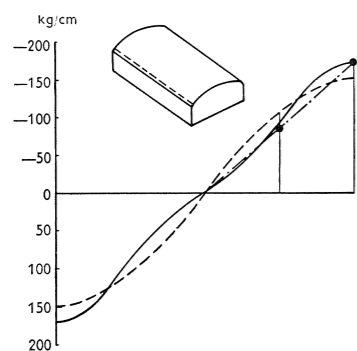


Fig. 14. Het verloop in langsrichting van de schuifkracht $n_{\varphi x}$.
 - - - = 1^e harmonische
 ——— = 1^e + 3^e harmonische
 • • • = experiment
 belasting = 1 kg/cm².

V. Zettingen

Als afzonderlijk proefje is nagegaan het optreden van spanningen ten gevolge van ongelijkmatige zakking der opleggingen. Eén steunpunt zakte 1 cm, de drie andere steunpunten bleven op hetzelfde niveau.

De gemeten waarden bij de rekstrookjes in langs- en dwarsrichting waren van de orde van grootte der meetfouten, t.w. enkele microreks. Alleen bij de strookjes onder 45° werden grotere waarden gevonden. De spanningen in die richting bedroegen 30 à 40 kg/cm².

In langs- en dwarsrichting waren dus, zoals te verwachten viel, de normaalspanningen praktisch nul.

Als we dit resultaat interpreteren voor een betonnen schaal, waarvan alle afmetingen 20 maal zo groot zijn als van het model (dus 15 m breed en 30 m lang), komt het hierop neer, dat bij 20 cm zakking van een steunpunt spanningen optreden van 3 à 4 kg/cm² (in scheve richting), indien aangenomen wordt, dat de elasticiteitsmoduli van staal en beton zich verhouden als 10 : 1. Uit het proefje blijkt dus duidelijk, dat voor een dergelijke enkele schaal hoekpuntzakkingen niet gevaarlijk zijn.

VI. Conclusies

Uit het onderzoek, voorzover hier behandeld, vallen enige conclusies te formuleren.

a. De meting.

Het blijkt mogelijk met behulp van rekstrookjes het spanningsbeeld in een stalen schaaldakmodel met een redelijke nauwkeurigheid te bepalen.

De foutberekening, waarin ook constructieve onvolmaaktheden zijn begrepen (b.v. afwijking in symmetrie, variërende plaatdikte) heeft dit aangetoond.

b. De berekening.

Het is ook hier wenselijk gebleken een van begin tot eind consequent doorgevoerd, overzichtelijk systeem aan te houden. De berekening biedt n.l. geen tussentijdse controle. Alleen een goed systeem kan het maken van fouten voorkomen, en het verzekert bovendien een snelle werkwijze.

c. Vergelijking van theorie en experiment.

Uit de vergelijking van de meetresultaten met de uitkomsten van de theorie kan geconcludeerd worden, dat de differentiaalvergelijking, afgeleid volgens de iteratie-methode van Aas Jakobsen, de basis is voor een betrouwbare berekening voor een cirkelcylindrische schaal op twee steunpunten, mits de ingevoerde aannamen (b.v. belastingschema, stijfheden tegen buiging en wrijving van de randbalk, geldigheid van de wet van Hooke) zorgvuldig bepaald zijn. Hierbij moet opgemerkt worden, dat de nauwkeurigheid meer bepaald wordt door het invoeren van het werkelijk aanwezige belastingschema, dan door het in rekening brengen van de 3^e of

nog hogere harmonischen. Over het gebied waarin de toepassing van de theorie verantwoord is, kan exact niets gezegd worden, omdat het onderzoek slechts verricht is voor één lengte-breedte verhouding (2 : 1), maar de gevoeligheid van de theorie voor variatie in randliggerhoogte en voor het invoeren van een juist belastingschema, tot uiting komend in de rekenresultaten, wijst heen naar een ruim gebied van toelaatbare toepassing op verschillende schaaltypen. Natuurlijk rijst ook de vraag, in hoeverre voor een gewone praktijk-constructie deze theorie geldt. Het antwoord moet luiden: voorzover de aannamen juist zijn. Dus voor een schaalconstructie in staal, wat voor de civiele techniek niet uitgesloten moet worden, zijn er niet veel moeilijkheden.

Voor een betonnen schaaldak kan door een goede verdeling van de wapening over de randbalkhoogte scheurvorming tegengegaan worden, terwijl voorspannen het vergelijken met een stalen model in grote mate legitimeert.

d. Vergelijking theorieën onderling.

De gebruikte theorie kan ook dienen voor het toetsen van vereenvoudigde theorieën. Vergelijken we b.v. het verschil tussen de uitkomsten van de gebruikte theorie en het experiment enerzijds en het verschil in uitkomst van deze theorie en van de theorie naar de D.K.J.-vergelijking anderzijds, dan blijkt het laatste verschil van te verwaarlozen betekenis te zijn. M.a.w. bij het opstellen van de D.K.J.-vergelijking zijn slechts geoorloofde verwaarlozingen ingevoerd. De eerder gemaakte opmerking over de lengte-breedteverhouding geldt ook hier.

SUMMARY

In order to test the accuracy of some of the methods employed for the calculation of shell-type roofs, measurements were carried out on a steel model of a barrel-shaped shell construction with edge girders of varying height. A description of the tests is given in this article, followed by reproductions of the stress characteristics which were established by measurement. Comparison with theory shows that both the method based on the D.K.J. equation and that based on the differential equation according to the iteration principle of Aas Jakobsen give reliable results. The third harmonic of the load series is of minor importance for most of the stress functions.