

## DE MEEWERKENDE BREEDTE BIJ PLATEN ONDER GECONCENTREERDE BELASTINGEN

*Voor de berekening van tweezijdig opgelegde of ingeklemde platen, onder geconcentreerde belastingen wordt in vele landen nog gebruik gemaakt van het begrip meewerkende breedte, waarbij in de voorschriften regels ter bepaling van de grootte van deze breedte worden gegeven.*

*Na een omschrijving van het begrip en een overzicht van de voorschriften in verschillende landen over de meewerkende breedte als functie van de lastbreedte, worden de factoren, waarvan de meewerkende breedte afhankelijk zal zijn, opgesomd. De invloed van deze factoren wordt nagegaan en de uitkomsten volgens de G.B.V. 1950 worden vergeleken met die volgens de elementaire plaattheorie of met de resultaten van experimenteel onderzoek. Achtereenvolgens worden besproken: de randvoorwaarden, de plaatbreedte, de plaats van de belasting, de afmetingen van het belaste oppervlak, eventuele anisotropie, de dwarscontractiecoëfficiënt en laststelsels. In verschillende gevallen blijken de uitkomsten onderling belangrijke verschillen op te leveren. Een betere aanpassing van eenvoudige rekenregels aan de uitkomsten van de plaattheorie is dus alleszins gewenst.*

Een verantwoorde berekening van platen voor geconcentreerde belastingen was in het begin van deze eeuw in de praktijk zeker niet uitvoerbaar en is ook thans nog een vrij omvangrijk werk. Het is derhalve begrijpelijk dat men reeds vroeg naar een praktisch bruikbare berekeningsmethode heeft gezocht, wat heeft geleid tot het begrip meewerkende plaatbreedte, waarbij de tweedimensionale constructie (de plaat) wordt teruggebracht tot een ééndimensionale constructie (een balk). De geconcentreerde last  $P$  wordt over een zekere breedte  $B$  verdeeld gedacht, zodat men een lijn- of streepbelasting  $p = P/B$  per eenheid van breedte verkrijgt en het gedeelte van de plaat, waarop deze belasting aangrijpt, wordt dan als balk berekend en gedimensioneerd.

In het volgende bepalen we ons voor-  
 eerst tot de aan *twee zijden opgelegde of*  
*ingeklemde plaat* waarvan de beide andere  
 randen vrij zwevend zijn.

1. De twee gevallen, plaat en balk,  
 zijn, statisch gezien, eerst dan  
 te vergelijken, wanneer voldaan  
 is aan de volgende voorwaarden:
  - a. Het maximaal, werkelijk optre-  
 dend moment  $m_x$  is in beide ge-  
 vallen gelijk.
  - b. Het totale statische moment  $M_x$   
 in de beschouwde doorsnede is  
 in beide gevallen gelijk.

Aan beide voorwaarden wordt  
 voldaan, indien men voor de  
 meewerkende plaatbreedte  $B$  de volgende waarde aanhoudt:

$$B = \frac{M_x}{m_x}, \text{ of anders geschreven } B = \frac{\int_{-1/2 b_{pl}}^{+1/2 b_{pl}} \bar{m}_x \cdot dy}{m_x} \quad (\text{zie fig. 1}).$$

Het bepalen van  $B$  komt volgens het bovenstaande dus neer op het bepalen  
 van de beide grootheden  $M_x$  en  $m_x$ .

Men heeft de meewerkende plaatbreedte echter ook op andere wijzen ge-  
 definiëerd, b.v.:

2. met behulp van de specifieke rekken van het staal of beton:

$$B = \frac{\int \varepsilon_x dy}{\varepsilon_{x \max}}$$

Indien de dwarscontractie-coëfficiënt  $\nu = 0$  is en het materiaal zich ge-  
 draagt volgens de wet van Hooke zal deze methode tot dezelfde uitkomst  
 als de onder 1. vermelde leiden;

3. met behulp van de doorbuigingen:

$$B = \frac{\int w dy}{w_{\max}}$$

4. door de breedte van de plaat te bepalen die ten aanzien van een bepaald  
 verschijnsel zich gelijk gedraagt als de gehele plaat en dan de grootten der  
 belastingskrachten te vergelijken b.v. bij eerste scheurvorming, vloeien van  
 de wapening, eenzelfde doorbuiging enz.

Het blijkt dus wel dat de benaming „meewerkende plaatbreedte” minder  
 juist is. Beter ware het te spreken van vervangingsbreedte. Het vaststellen

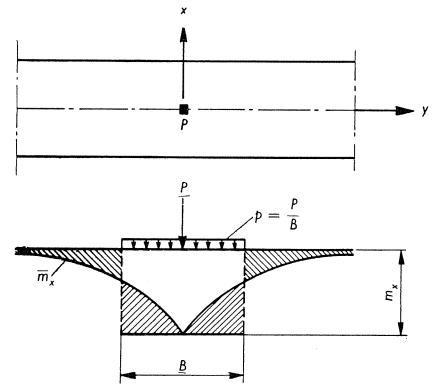


Fig. 1. Het verloop van het moment  $\bar{m}_x$   
 in de middendoorsnede van een zeer  
 brede plaat onder een geconcentreerde  
 last en de bijbehorende meewerkende  
 plaatbreedte.

van de grootte van deze spreidingsbreedte heeft vele onderzoekers reeds sinds het einde van de vorige eeuw bezig gehouden. Aanvankelijk nam men slechts een spreiding aan als functie van de plaatdikte, de dikte van de afdekplaten en de lastafmetingen. De overspanning van de plaat is echter van overwegende invloed. Reeds in het begin van deze eeuw leerden onderzoekingen dat bij een klein belastingsoppervlak op een vrij opgelegde plaat de meewerkende plaatbreedte ongeveer 0,7 tot 1,0 maal de overspanning kan bedragen.

Opmerkelijk is dat de voorschriften in verschillende landen en ook in ons land lang bij deze inzichten achterbleven. Tot 1940 schreef de G.B.V. een meewerkende breedte gelijk  $\frac{1}{3}$  van de overspanning plus de lastbreedte en een lastspreiding onder  $45^\circ$  tot de onderzijde van de plaat voor. In 1940 werd dit gewijzigd in de bekende formule:  $B = \sqrt{(\frac{3}{4}l)^2 + b^2}$  en een lastspreiding onder  $45^\circ$  tot halverhoogte de plaatdikte. In fig. 2 is een overzicht gegeven van de voorschriften in verschillende landen over de meewerkende plaatbreedte als functie van de lastbreedte. Ook zijn in deze figuur uitgezet de waarden volgens de theorie voor de oneindig brede, aan twee zijden vrij opgelegde plaat (verkregen uit lit. 1) en volgens de metingen aan het stalen model waarover reeds eerder is geschreven (W.G.S.-Mededelingen 1954, no. 1), beiden volgens de eerste definitie van  $B$ . Opvallend is bij de geconcentreerde lasten de grote spreiding in de voorschriften en de minder juiste tendenz in de G.B.V. (hol naar boven in plaats van naar beneden).

Frankrijk schrijft een berekening volgens de plaattheorie voor. Ook Duitsland laat sinds enkele jaren in de brugbouw een berekening m.b.v. de meewerkende plaatbreedte niet meer toe, terwijl Engeland het probleem omzeild heeft in zijn belastingsvoorschriften, waarbij geconcentreerde belastingen vervangen worden door aequivalente gelijkmatig verdeelde belastingen.

In vele gevallen geven de G.B.V. geen of onvoldoende uitsluitel inzake de meewerkende plaatbreedte. Maar ook voor die gevallen waarvoor de G.B.V. wel is bedoeld, dat zijn de aan twee zijden opgelegde platen, (zowel vrij opgelegd als geheel of gedeeltelijk ingeklemd), kan het aanbeveling verdienen de uitkomsten volgens de G.B.V. eens te toetsen aan die van de theorie of metingen. Dit nu is in het volgende gedaan. De meewerkende breedte is hierbij steeds op de onder 1. gedefiniëerde wijze bepaald.

#### Notaties.

$m_x, m_y$	maximum buigend moment per eenheid van lengte in een doorsnede loodrecht op $x$ - (overspannings)richting resp. $y$ -richting.
$M_x$	totale statische moment in een doorsnede loodrecht op de $x$ -richting
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	specifieke rek in $x$ -, resp. $y$ -richting
$P$	grootte van de belastingskracht
$p$	grootte van een streepbelasting per eenheid van lengte
$l = a$	overspanning van de plaat
$b_{pl}$	breedte van de plaat
$h$	dikte van de plaat
$E$	elasticiteitsmodulus van de plaat
$\nu$	dwaarscontractiecoëfficiënt van de plaat
$B$	meewerkende plaatbreedte
$b_p$	afmeting van het belaste oppervlak in breedterichting
$l_p$	afmeting van het belaste oppervlak in overspanningsrichting
$D = 2e$	diameter van een cirkelvormig belastingsoppervlak
$w$	doorbuiging van de plaat

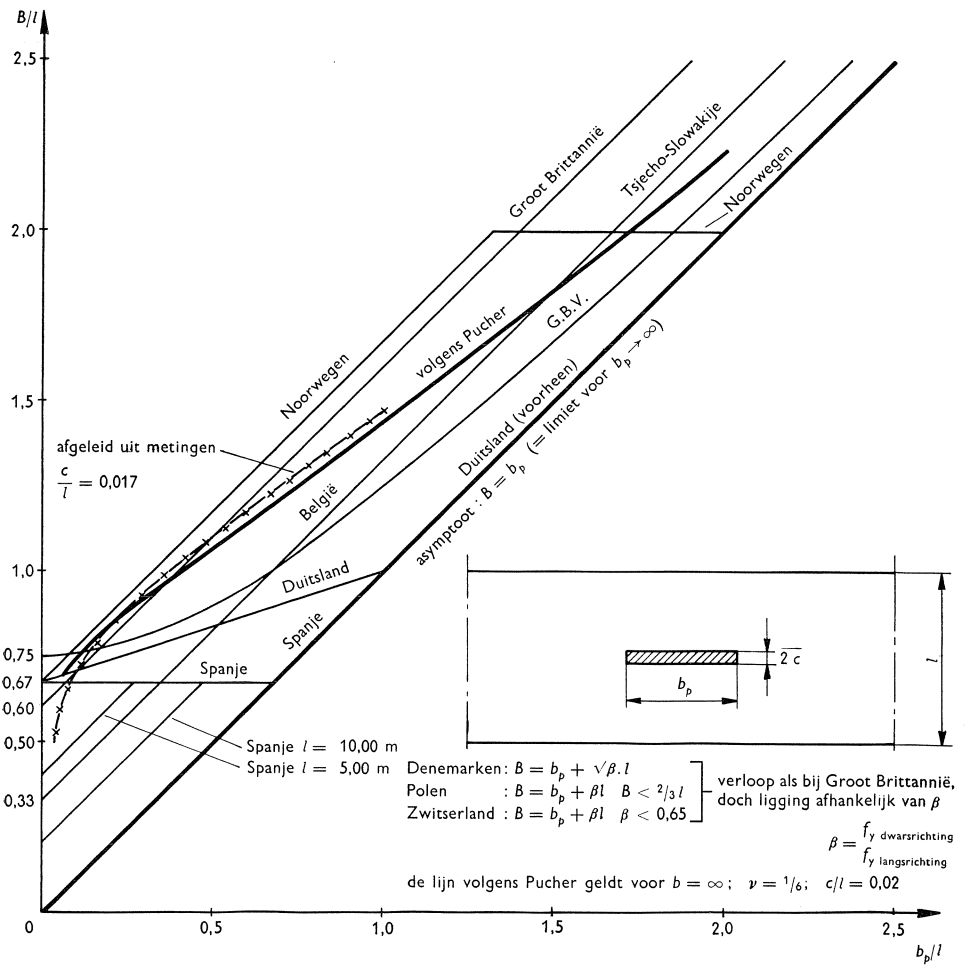


Fig. 2. De meewerkende plaatbreedte  $B$  als functie van de lastbreedte  $b_p$ , zoals de voorschriften in verschillende landen deze geven. Last het in midden van de overspanning.

De meewerkende plaatbreedte zal door een groot aantal factoren worden beïnvloed en wel door:

1. de randvoorwaarden van de plaat,
2. de plaatbreedte,
3. de plaats van de belasting op de plaat
4. de afmetingen van het belaste oppervlak in verhouding tot de overspanning en de plaatdikte,
5. de verhouding tussen de buigingsstijfheid in langs- en dwarsrichting van de plaat,
6. de dwarscontractiecoëfficiënt,
7. de afmetingen van de laststelsels.

Achtereenvolgens zal nu de invloed van deze factoren worden nagegaan. Omdat de grootte van het moment onder de last sterk afhankelijk is van de

concentratie van de last, heeft bij het nagaan van de andere invloeden de onderlinge vergelijking veelal slechts kwalitatieve betekenis.

### 1. De randvoorwaarden.

Het betreffende artikel in de G.B.V. spreekt uitsluitend over „een plaat met overspanning  $l$ ”, en spreekt zich dus niet over de randvoorwaarden uit. Het voorschrift kan dus worden toegepast op vrij opgelegde zowel als ingeklemde en over de steunpunten doorgaande platen. De grote relatieve fout die gemaakt wordt, indien het voorschrift ook op de ingeklemde plaat wordt toegepast, blijkt uit het volgende: Staat de geconcentreerde last  $P$  in het midden van de overspanning  $l$ , dan bedraagt het statisch moment  $M_x$  in de middendoorsnede bij:

de vrij opgelegde plaat:  $M_x = \frac{1}{4} P \cdot l$ ,

de ingeklemde plaat:  $M_x = \frac{1}{8} P \cdot l$ .

De meewerkende plaatbreedte volgt dan voor de vrij opgelegde plaat uit:

$$B_{\text{opgel.}} = \frac{M_{x \text{ opgel.}}}{m_{x \text{ opgel.}}} = \frac{\frac{1}{4} P \cdot l}{m_{x \text{ opgel.}}}$$

voor de ingeklemde plaat uit:

$$B_{\text{ingekl.}} = \frac{M_{x \text{ ingekl.}}}{m_{x \text{ ingekl.}}} = \frac{\frac{1}{8} P \cdot l}{m_{x \text{ ingekl.}}}$$

Wanneer  $B_{\text{opgel.}} = B_{\text{ingekl.}}$  wordt aangehouden, wordt verondersteld, dat  $m_{x \text{ ingekl.}} = \frac{1}{2} m_{x \text{ opgel.}}$  zou zijn. Het werkelijke verband is echter:

$m_{x \text{ ingekl.}} = m_{x \text{ opgel.}} - 0,066 P$ , (voor  $\nu = 0$ ) hetgeen dus geenszins hiermee overeenstemt. De inklemming veroorzaakt slechts een geringe reductie van het veldmoment omdat de grootteorde van  $m_x/P$  ongeveer 0,40 bedraagt. Zowel voor de vrij opgelegde als voor de ingeklemde plaat zijn in fig. 3 nog eens vergeleken de waarden van  $m_x/P$  als functie van de breedteafmeting  $b_p$  van de last, verkregen volgens de G.B.V. 1950, de eigen metingen

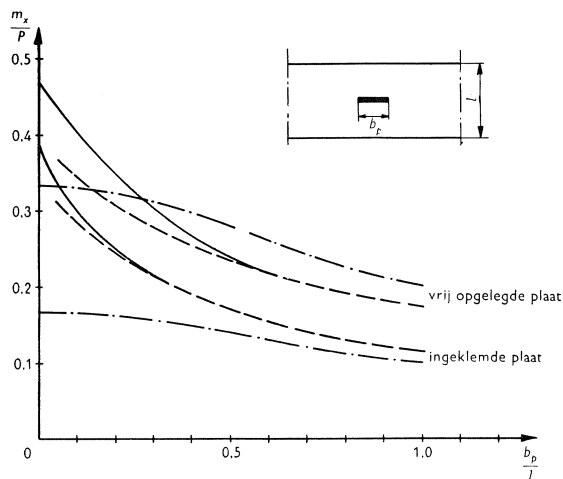


Fig. 3.  $\frac{m_x}{P}$  als functie van  $\frac{b_p}{l}$  van een oneindig brede, vrij opgelegde plaat en een oneindig brede ingeklemde plaat. Last in het midden. De afmeting  $l_p$  is zeer klein.

— — — theorie  $\left(\frac{l_p}{l} = 0,05, \nu = \frac{1}{6}\right)$   
 — — — eigen metingen  
 — · — · — G.B.V.-1950  $\left(\frac{l_p}{l} = 0,017, \nu = \frac{1}{6}\right)$

aan het stalen model (doch omgekeerd voor  $\nu = 1/6$ ) en de uitkomsten van de theorie voor de oneindig brede plaat (ook voor  $\nu = 1/6$ ).

De theorie stemt goed met de meetresultaten overeen; de verschillen bij kleinere  $b_p$  zijn toe te schrijven aan het verschil in de afmeting  $l_p$  van de last. Omdat de waarden volgens de G.B.V. verkregen, gelden voor een last met afmeting  $l_p = 0$ , kunnen deze waarden niet kwantitatief doch uitsluitend kwalitatief met de anderen worden vergeleken. Duidelijk blijkt echter het ongemotiveerde verschil volgens de G.B.V. tussen de vrij opgelegde en de ingeklemde plaat en ook de verkeerde tendenz (hol naar beneden i.p.v. naar boven) die deze lijnen aantonen voor de kleinere waarden van  $b_p$ .

Het verschil tussen de maximale momenten in de vrij opgelegde en de ingeklemde plaat is uiteraard afhankelijk van de afmetingen van de last. In fig. 4 is dit verband gegeven zowel voor een lijnlast in breedterichting als voor een lijnlast in de richting van de overspanning van de plaat. Tot vrij grote afmetingen van de last blijkt in beide gevallen dit verschil vrijwel constant te zijn.

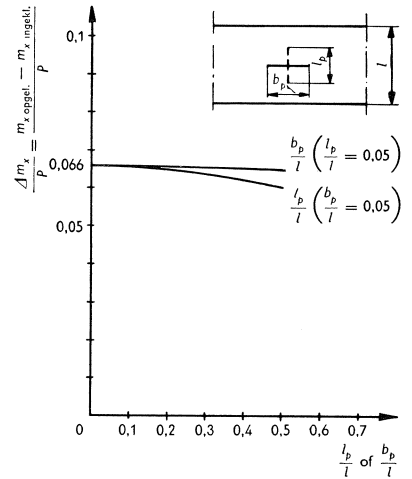
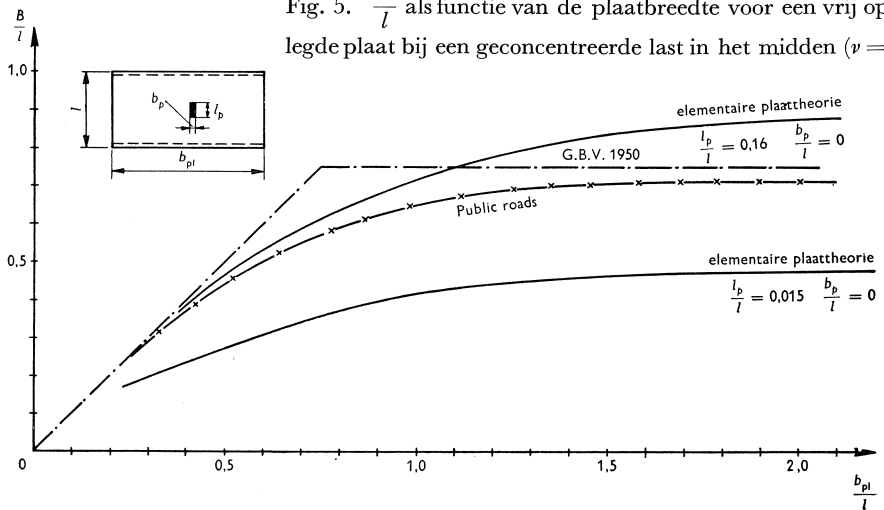


Fig. 4. Het verschil tussen de maximale momenten in een oneindig brede, vrij opgelegde en een oneindig brede ingeklemde plaat, als functie van de afmetingen van een streep-last in overspannings- resp. in breedterichting, geplaatst in het midden van de plaat. Gegevens volgens de elementaire plaattheorie met  $\nu = 0$ .

Fig. 5.  $\frac{B}{l}$  als functie van de plaatbreedte voor een vrij opgelegde plaat bij een geconcentreerde last in het midden ( $\nu = 0$ ).



## 2. De plaatbreedte

In de G.B.V. wordt t.a.v. de plaatbreedte uitsluitend als eis gesteld dat de volgens de voorgeschreven formule berekende meewerkende plaatbreedte inderdaad aanwezig is en medewerkend kan zijn. In fig. 5 is het verband tussen de meewerkende breedte en de aanwezige plaatbreedte weergegeven volgens dit voorschrift en volgens de uitkomsten van de theorie voor twee lijnlasten met verschillende afmeting in de richting van de overspanning, voor de aan twee zijden vrij opgelegde plaat. Ook is nog een kromme weergegeven, uit experimenten in de U.S.A. bepaald (lit. 2) Het blijkt dat in platen, waarvan de breedte meer dan 1,5 maal de overspanning bedraagt, in dit geval het maximum moment en daarmee de meewerkende breedte nagenoeg niet meer wordt beïnvloed door de plaatbreedte en overeenkomt met die voor een oneindig brede plaat. Volgens de G.B.V. ligt deze grens echter bij  $b_{pl} = 0,75 l$ , hetgeen dus te laag is. Ook in deze figuur gaat het dus slechts om een kwalitatieve vergelijking!

In het grensgebied geeft de G.B.V. dus relatief te hoge waarden voor de meewerkende breedte.

## 3. De plaats van de belasting.

De G.B.V. brengt de plaats van de last in rekening, door een reductie van de meewerkende breedte voor te schrijven indien de last zich in de nabijheid van een oplegging bevindt.

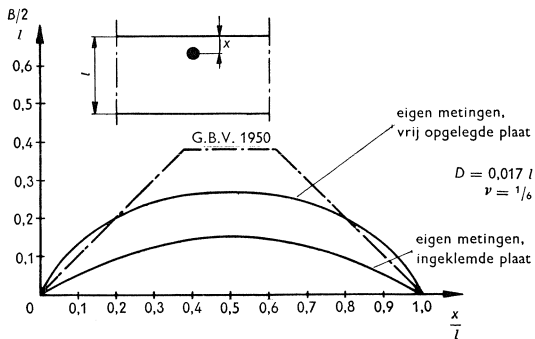


Fig. 6. De meewerkende plaatbreedte  $B$  in een zeer brede plaat als functie van de plaats van de geconcentreerde last.

In fig. 6 is voor een puntlast de voorgeschreven meewerkende breedte gegeven als functie van de plaats van de last. Ook zijn in deze figuur voor een vrij opgelegde en een ingeklemde plaat de uit de metingen aan het stalen model berekende meewerkende breedten weergegeven voor een cirkelvormige last met diameter  $D = 0,017 l$ . Door de sterke concentratie van deze last zijn deze waarden

in het midden van de plaat kleiner dan volgens de G.B.V. Het gaat dus ook hier slechts om een kwalitatieve vergelijking. Ook in deze figuur blijkt dat het niet geoorloofd is eenzelfde  $B$  aan te houden voor een vrij opgelegde en een ingeklemde plaat. De voorschriften vertonen in ieder geval met de reductie de goede tendenz.

Eenzijds is deze reductie noodzakelijk omdat de dwarskrachten in dit gebied een rol gaan spelen; de met behulp van een meewerkende breedte

verkregen balk dient men n.l. ook op schuine trekspanningen te berekenen. (In enkele landen voert men voor de berekening op dwarskracht een andere, kleinere meewerkende breedte in).

Anderzijds is deze reductie noodzakelijk daar het moment  $m_x$  onder de geconcentreerde last naar de oplegging toe langzaam afneemt. De verhouding  $m_x = M_x/B$  moet dus kleiner worden.

In fig. 7 is voor de vrij opgelegde en de ingeklemde plaat het uit de metingen aan het stalen model berekende verloop van  $m_x$  voor een cirkelvormige last met diameter  $D = 0,017 l$  weergegeven, evenals het uit de G.B.V. berekende verloop. Dit laatste verloop blijkt zeer aanvechtbaar doch is verklaarbaar omdat  $B$  naar de rand sneller afneemt dan  $M_x$  (parabool), zodat de verhouding  $m_x$  in waarde toeneemt in plaats van afneemt. Neemt de afmeting van de last in breedterichting toe, dan verdwijnt langzamerhand deze inconsequentie om bij een afmeting  $b_p = 0,5 l$  bijna geheel te zijn verdwenen.

Indien de last staat in de nabijheid van een vrij zwevende rand van de plaat geeft de G.B.V. geen expliciet voorschrift. Uit de laatste regel van art. 28 d 2 zou men kunnen opmaken dat, indien de last op de vrije rand staat, men de „dan wel aanwezige B” in rekening mag brengen, die voor een puntlast in dit geval dus de helft van  $0,75 l$ , dat is dus  $0,375 l$  bedraagt. De meewerkende breedte wordt dus eenvoudig gehalveerd, het maximale moment dus verdubbeld.

De meetresultaten aan het stalen model hebben geleerd dat deze opvatting wel verantwoord is, temeer daar de last vrijwel nooit precies op de rand zal staan en altijd een zekere afmeting in breedterichting zal hebben. Bij de metingen aan de vrij opgelegde plaat ( $\nu = 0,3$ ) werd de verhouding  $B_{\text{rand}}/B_{\text{midden}} = 0,49$  gevonden; bij de ingeklemde plaat ( $\nu = 0,3$ ) bedroeg de verhouding  $B_{\text{rand}}/B_{\text{midden}} = 0,45$ .

*Er is geen reden om aan te nemen dat deze verhoudingen door de dwarscontractiecoëfficiënt sterk beïnvloed zouden worden.*

Bij smalle platen is in dit geval het verloop van  $B$  als functie van de plaatbreedte volkomen gelijkvormig aan dat van fig. 5. Het concept van de G.B.V. 1950 gaf in het grensgebied dat hier ligt bij  $b_{pl} = 0,375 l$  relatief te hoge waarden voor  $B$ .

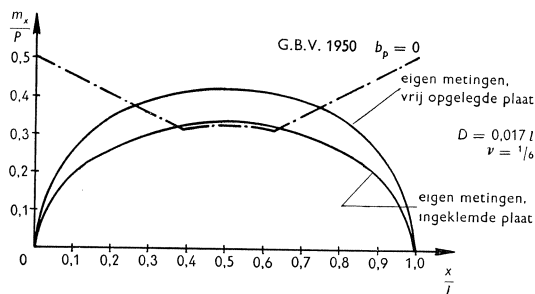


Fig. 7. Het moment  $\frac{m_x}{P}$  onder een geconcentreerde last in een zeer brede plaat als functie van de plaats van de last.



In fig. 8 is nog het verband gegeven tussen het maximale moment onder de last en de afstand hiervan tot de rand volgens eigen metingen en concept G.B.V. 1950. Het blijkt dat deze momenten zeer snel afnemen bij toenemende afstand van de last tot de rand. Het concept geeft hier dus een kwalitatief juist verloop.

4. *De afmetingen van het belaste oppervlak in verhouding tot de overspanning en de plaatdikte.*

Uit de eigen metingen en uit berekeningen is gebleken dat voor niet te grote belastingsoppervlakjes het volgende geldt:

a. Het verband tussen het maximum moment en de concentratie wordt beïnvloed door:

1. de plaats van de last op de plaat,
2. de randvoorwaarden van de plaat,
3. de dikte van de plaat,
4. de breedte van de plaat.

b. De krommen die dit verband aangeven, zijn bij één bepaalde plaatdikte gelijkvormig en te benaderen door een rechte. Het niveau van deze rechte wordt bepaald door de onder a sub 1, 2 en 4 genoemde factoren. Fig. 9 geeft hiervan een duidelijk beeld, ontleend aan de eigen metingen, dat goed overeenstemt met de uitkomsten van de theorie.

c. De plaatdikte is alleen bij sterke concentraties van invloed.

In fig. 9 wordt bovendien het verband gegeven tussen het maximum moment  $m_x/P$  onder de last en de concentratie  $D/l$  hiervan, voor verschillende waarden van de verhouding van plaatdikte  $h$  tot overspanning  $l$ , indien de last in het midden van de oneindig brede, vrij opgelegde plaat staat, berekend volgens de elementaire plaattheorie met de correctie volgens Westergaard.

Eigen metingen toonden aan dat deze berekeningsmethode goede resultaten oplevert mits de last niet te dicht bij de opleggingen staat.

In de praktijk van de bruggenbouw gebruikt men verhoudingen  $h/l = 1/20$  à  $1/35$ . Voor deze gevallen kunnen de in fig. 9 gegeven krommen redelijk worden benaderd door de rechte:

$$m_x/P = 0,50 - 3 \frac{e}{a} = 0,50 - 1,5 \frac{D}{l} \quad \left( \text{voor } \frac{D}{l} < 0,1 \right).$$

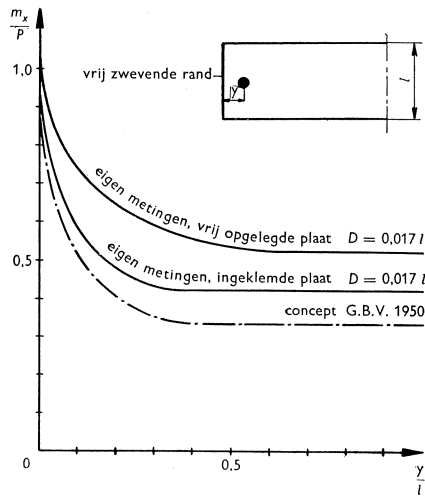


Fig. 8. De momenten  $\frac{m_x}{P}$  onder een geconcentreerde last als functie van de afstand  $y$  van de last tot de vrij zwevende rand, als de last in het midden van de overspanning blijft.

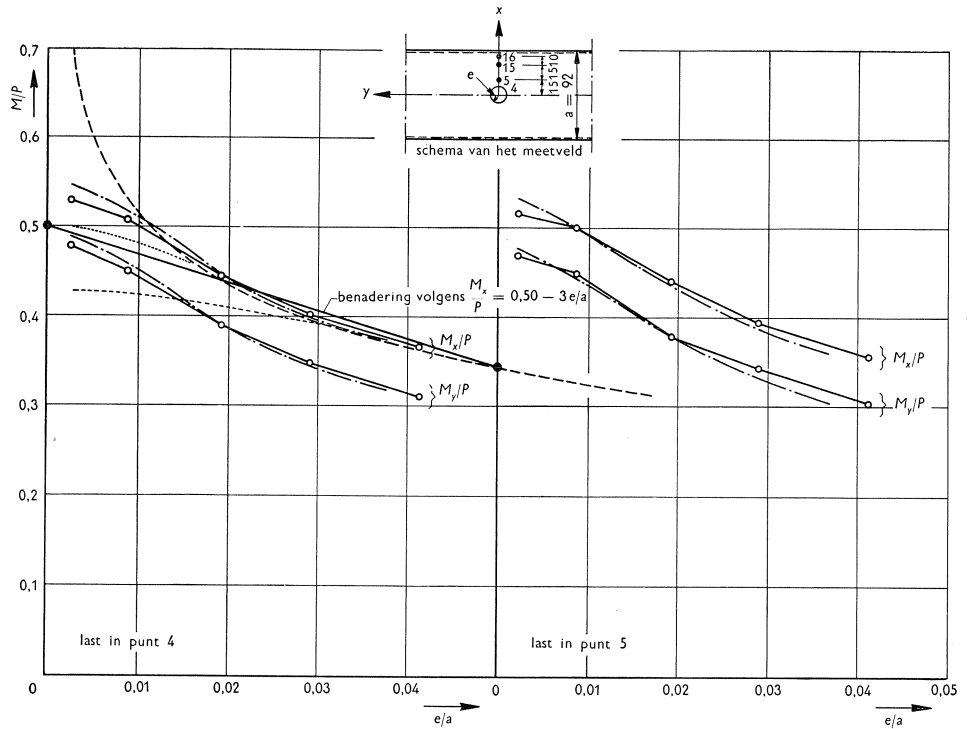


Fig. 9. Het verloop van de momenten onder de last als functie van de concentratie  $e/a$  als de last in enkele punten van de overspanning van de zeer brede, aan twee zijden vrij opgelegde, plaat staat.  $\nu = 0,3$ .

- Volgens elementaire plaattheorie.
- Volgens de metingen aan het stalen model (tussenlaag carton),  $h/a = 1/47,5$ .
- · - · - · Volgens de theorie van Westergaard voor  $h/a = 1/47,5$ .
- idem voor  $h/a = 1/30$
- idem voor  $h/a = 1/15$ .
- ——— ● Benadering volgens de rechte  $m_x/P = 0,5 - 3 e/a$ .

Tussen de momenten  $m_x$  en  $m_y$  bestaat het volgende verband

$$m_y = m_x - \frac{(1 - \nu)}{4 \pi} P,$$

voor  $\nu = 1/6$  wordt dit

$$m_y = m_x - 0,066 P.$$

Om de momenten onder belastingvlakjes met grotere afmetingen te kunnen bepalen, wordt eerst nagegaan de invloed van de breedte van de last bij een streeplast in breedterichting. In de reeds besproken fig. 3 is deze invloed nagegaan. De in deze figuur gegeven waarden voor  $M_x$  zijn in fig. 10 omgewerkt voor de meewerkende breedte  $B$ .

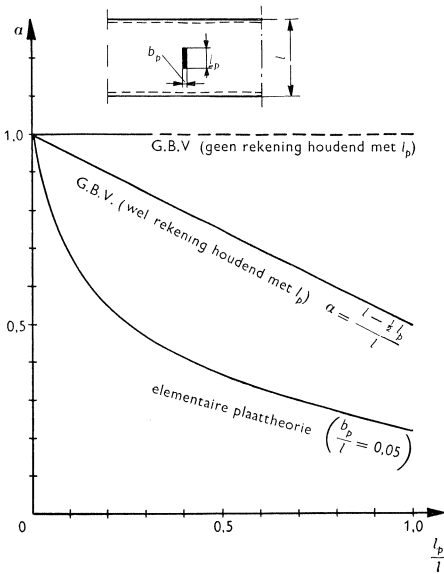
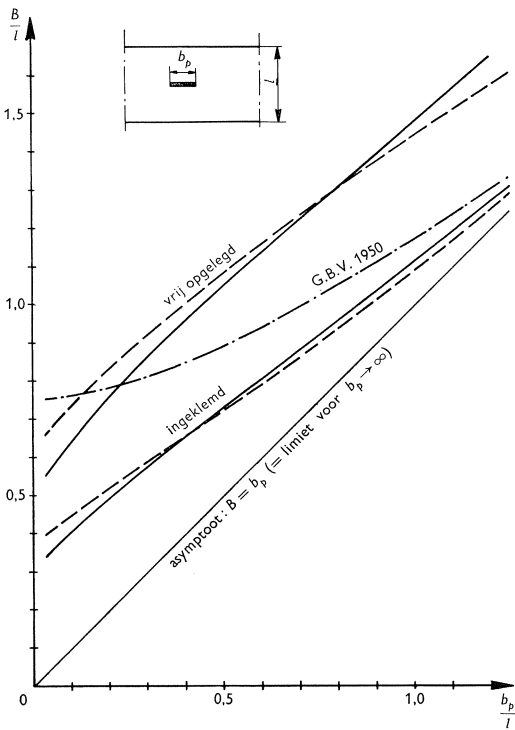
Over de invloed van de afmetingen van het belaste oppervlak in de richting van de overspanning spreken de G.B.V. en ook de andere voorschriften

Fig. 10.  $\frac{B}{l}$  als functie van  $\frac{b_p}{l}$  voor een oneindig brede, vrij opgelegde plaat en een oneindig brede, ingeklemde plaat. De last in het midden van de overspanning.

----- theorie ( $\frac{l_p}{l} = 0,05, \nu = 1/6$ ).  
 ——— eigen metingen  
 (.....) G.B.V.1950.  
 (.....) theorie ( $\frac{l_p}{l} = 0,017, \nu = 1/6$ ).

zich niet uit. Immers met behulp van de meewerkende plaatbreedte brengt men het probleem van de plaat terug tot dat van de balk. Voor deze balk kan de invloedslijn voor het moment in enig punt gemakkelijk worden bepaald en met behulp hiervan kan de lastafmeting  $l_p$  in rekening worden gebracht. Gebleken is, dat men in de praktijk met de afmeting  $l_p$  veelal geen rekening houdt.

Staat de last in het midden van de overspanning van de vrij opgelegde plaat dan rekent men dus met  $m_x = 1/4 P.l/B$ . Met behulp van de invloedslijn voor een balk zou men vinden  $m_x' = 1/4 P (l - 1/2 l_p) / B$ . De correctie voor eindige afmetingen van  $l_p$  bedraagt dan  $\alpha = \frac{m_x'}{m_x} = \frac{l - 1/2 l_p}{l}$ .



In fig. 11 is een en ander grafisch weergegeven, benevens de verhouding  $\alpha$  tussen  $m_x/P$  voor een streeplaat in de overspanningsrichting met variabele afmeting  $l_p$  en voor een streeplaat met  $l_p = 0,02$  (dus nagenoeg een puntlast) volgens de elementaire plaattheorie. Duidelijk blijkt de relatieve en ook quantitative fout die men maakt door geen  $l_p$  in rekening te brengen, doch ook

Fig. 11. De verhouding  $\alpha$  tussen de maximale momenten  $m_x$  onder een streeplaat  $l_p$  in overspanningsrichting en onder een puntlast in het plaatmidden bij de oneindig brede, vrij opgelegde plaat.

bij de meer consequente berekeningsmethode volgens de G.B.V. vindt men relatief te grote momenten.

Om de invloed van beide afmetingen van het belastingoppervlakje tezamen na te gaan werden in fig. 12 de momenten  $m_x/P$  onder een last in het midden van een oneindig brede, vrij opgelegde plaat, uitgezet als functie van  $b_p/l$  voor verschillende waarden van  $l_p/l$ , berekend volgens de elementaire plaattheorie voor  $\nu = 1/6$ .

Samenvattend kan over de invloed van de grootte van het belaste oppervlak worden gezegd:

- 1° De grootte en vorm van het belaste oppervlak beïnvloeden de momenten onder de last zeer sterk.
  - 2° De G.B.V. 1950 geeft voor vrij opgelegde platen te grote momenten (uitgezonderd bij zeer sterke concentraties) en voor ingeklemde platen te kleine momenten.
  - 3° Ook indien men bij de berekening volgens de meewerkende plaatbreedte de lastafmeting in overspanningsrichting in rekening brengt met behulp van een invloedslijn voor een balk, vindt men hogere momenten dan volgens de plaattheorie.
5. *De verhouding tussen de buigingsstijfheid in langs- en dwarsrichting van de plaat.*  
 Bij het voorgaande werd steeds aangenomen dat in  $x$ - en  $y$ -richting de buigingsstijfheid dezelfde was. Een verschillend wapeningspercentage en verschillende hoogteligging van de wapening kunnen echter oorzaak van een verschillende buigingsstijfheid zijn. De invloed hiervan op de anisotropie is echter gering. Uit de literatuur (3) is bekend dat de fout die men maakt door dergelijke platen als isotroop te beschouwen gering is en in ieder geval kleiner dan de fout die men maakt door de dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$  te verwaarlozen. Het is dus wel verantwoord bij normale plaatconstructies van de invloed van deze anisotropie af te zien.
6. *De dwarscontractiecoëfficiënt.*

De G.B.V. spreekt zich hierover niet uit daar hier het platenprobleem tot dat van een balk wordt teruggebracht. In de elementaire plaattheorie

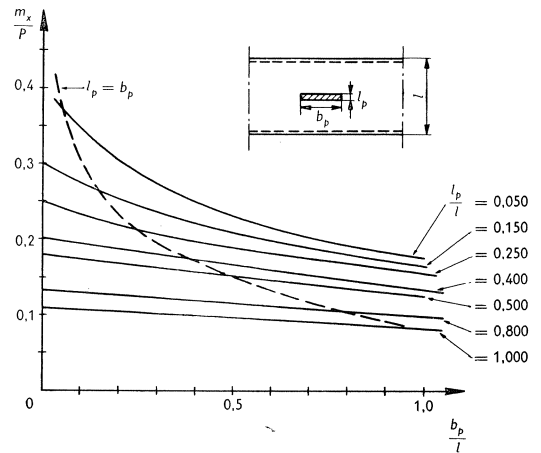


Fig. 12. De maximale momenten  $\frac{m_x}{P}$  onder een last in het midden van de overspanning van een oneindig brede, vrij opgelegde plaat als functie van de lastafmeting  $b_p$  voor verschillende waarden van  $l_p$  volgens de elementaire plaattheorie voor  $\nu = 1/6$ .

kan men b.v.  $\nu = 1/6$  aanhouden. De invloed hiervan is in het bijzonder van belang als de momenten in de ene richting belangrijk groter zijn dan die in de richting daar loodrecht op.

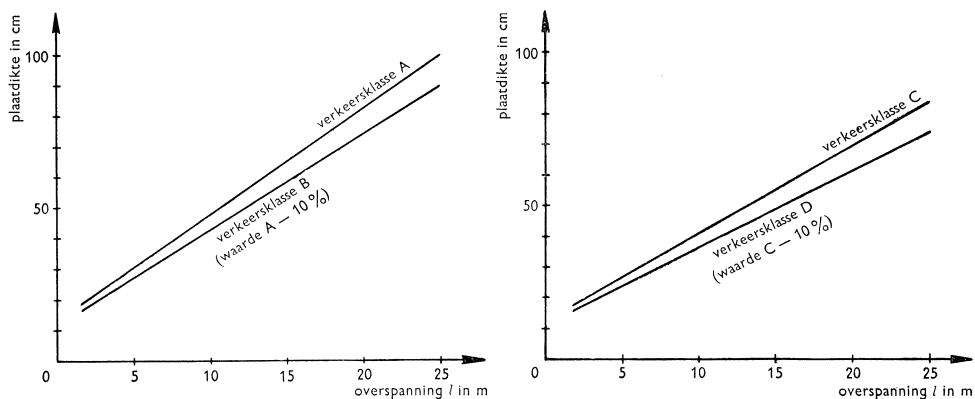
### 7. De laststelsels

In het voorgaande werd alleen gesproken over de momenten, die ónder de geconcentreerde last optreden. Het zal duidelijk zijn, dat indien er meerdere lasten op de plaat staan, deze momenten dienen te worden vergroot met de invloed van deze lasten. Dit aanvullend moment zal, mits zo'n last niet te dicht bij het beschouwde punt staat, nagenoeg onafhankelijk zijn van de plaatdikte en de afmetingen van het belaste oppervlak. In het volgende zijn voor het geval meerdere lasten op de brug staan, de momenten in de plaat, berekend volgens de elementaire plaattheorie, vergeleken met de uitkomsten volgens de G.B.V. Volgens de G.B.V. (art. 28 d 6) mag indien de meewerkende breedten van twee lasten elkaar overlappen de meewerkende breedte van dit stelsel gelijk worden genomen aan die voor één enkele last, waarvoor  $b$  gelijk is aan de totale breedte, die door beide lasten en de daartussen gelegen ruimte wordt ingenomen. Over het geval dat meerdere lasten in de richting van de overspanning staan, wordt niet gesproken. Met behulp van de invloedslijnen voor balken kan men dit probleem weer oplossen.

Om een praktisch uitgangspunt te hebben, werd in het volgende uitgegaan van de afmetingen van de laststelsels, zoals deze in de V.O.S.B. 1938 worden voorgeschreven. Allereerst werd bij een gemiddelde plaatdikte het verband gezocht tussen de meewerkende breedte  $B$  en de overspanning  $l$  indien de achterwielen van één auto in het midden van de overspanning werden geplaatst.

Hiervoor werd gevonden een vrijwel lineair verband dat onafhankelijk van de verkeersklassen was.

Fig. 13. De plaatdikte als functie van de overspanning voor de verschillende verkeersklassen, volgens gegevens uit de praktijk van de Nederlandse bruggenbouw.



In den vervolge werden daarom de verkeersklassen A en C nader onderzocht.

De plaatdikte werd daarbij gevarieerd zoals aangegeven is in fig. 13, die ontleend is aan gegevens uit de praktijk van de Nederlandse bruggenbouw. Wederom werd het verband nagegaan tussen de meewerkende breedte en de overspanning indien de achterwielen van één, respectievelijk twee auto's op het midden van de brug werden geplaatst. Ook dit verband bleek steeds vrijwel lineair en vrijwel onafhankelijk van de verkeersklasse (fig. 14 en 15).

In de meest algemene vorm kan het dus als volgt worden gesteld:

$$B = \alpha l + \beta,$$

waarin de lastspreiding verdisconteerd is. Bij de ingeklemde plaat is de

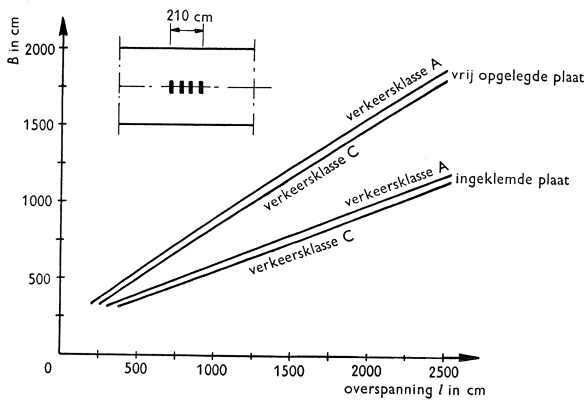
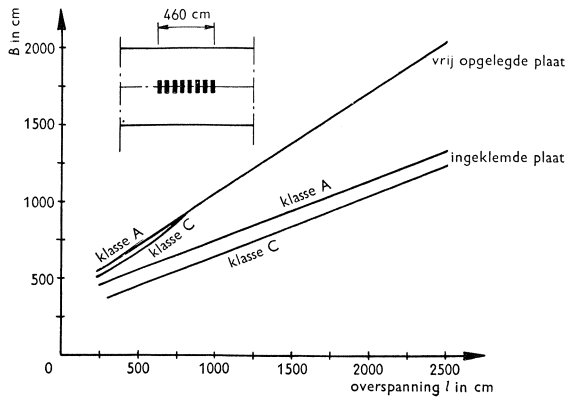


Fig. 14. De meewerkende plaatbreedte  $B$  als functie van de overspanning  $l$  indien de achterwielen van een wagen volgens verkeersklasse A, resp. C in het midden van de overspanning van een zeer brede plaat staan. Berekening volgens de elementaire plaattheorie en eigen metingen.  $\nu = 1/6$ .



spreiding in de factoren  $\alpha$  en  $\beta$  iets groter dan bij de vrij opgelegde. De lijnen stemmen ook goed overeen met de lijnen uit fig. 10, waarbij geen lastspreiding in rekening is gebracht.

Vervolgens werden voor verkeersklasse A alle wielen van twee naast elkaar staande auto's in rekening gebracht, waarbij de laatste rij achterwielen steeds in het midden van de overspanning van een vrij opgelegde plaat werd geplaatst.

Uit fig. 16 blijkt dat het verband tussen  $B$  en  $l$  nu niet meer lineair is; wel bestaat het uit een aantal lineaire takken. Bij toenemende

Fig. 15. De meewerkende plaatbreedte  $B$  als functie van de overspanning  $l$ , indien de achterwielen van twee naast elkaar staande wagens volgens verkeersklasse A, resp. C in het midden van de overspanning van een zeer brede plaat staan. Berekening volgens de elementaire plaattheorie en eigen metingen.  $\nu = 1/6$ .

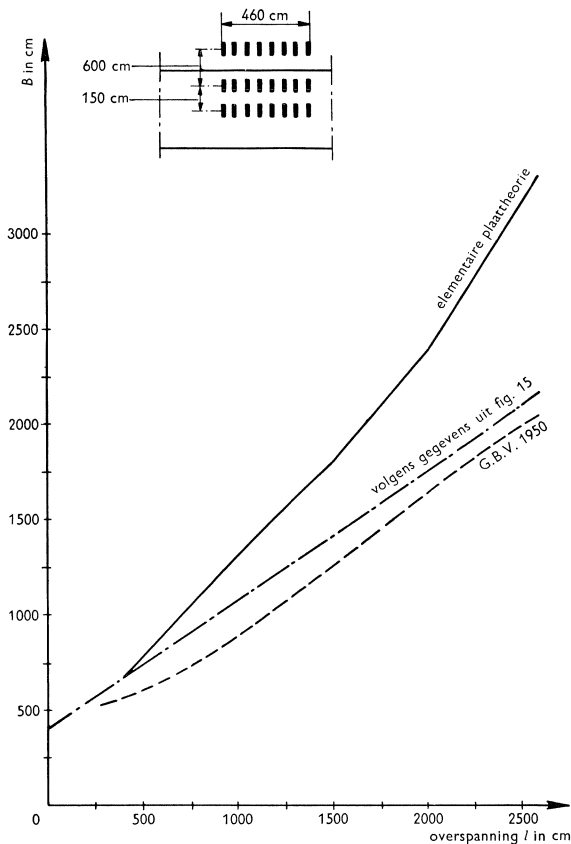


Fig. 16. De meewerkende plaatbreedte  $B$  als functie van de overspanning  $l$  indien alle wielen van twee, naast elkaar staande wagens, volgens verkeersklasse A, achtereenvolgens op een brug komen. Berekening volgens de elementaire plaattheorie met  $\nu = 1/6$ , volgens de G.B.V. 1950 en volgens de gegevens uit fig. 15.

overspanning kunnen er meer rijen wielassen op de brug komen, telkens wanneer dit gebeurt, treedt er een knik in de kromme op en divergeert het verloop van  $B$  volgens theorie en G.B.V. steeds meer. Berekeningen volgens de practijkmethode leveren dus voortdurend een vrij aanzienlijk kleinere waarde voor de meewerkende breedte dan de elementaire plaattheorie. Ondanks het feit dat het in fig. 15 gegeven verband goed overeenstemt met de uit-

komsten van de plaattheorie voor het geval waarvoor het is afgeleid t.w. streeplast in het plaatmidden, blijkt dat, indien men bij meerdere wielassen op de brug deze als balk beschouwt, berekeningen met behulp van deze meewerkende breedte ook tot te lage waarden van  $B$  aanleiding geven, een conclusie die naar aanleiding van fig. 11 ook reeds is getrokken. De invloed van de belastingen dicht bij de rand spreidt zich naar het midden toe over een grotere breedte uit.

Berekeningen, waarbij geen spreiding onder  $45^\circ$  tot de halve plaatdikte werd aangenomen maar waarbij de correctie volgens Westergaard in rekening werd gebracht, gaven slechts geringe verschillen te zien.

### Samenvatting en conclusies

De spanningsverdeling in platen onder geconcentreerde belastingen is afhankelijk van zeer veel factoren. Behalve de genoemde, spelen ook andere factoren als de materiaaleigenschappen b.v. krimp, kruip, plasticiteit e.d. een rol hierbij. Hun invloed op de krachtsverdeling is echter vrijwel niet

bekend. Om tot verantwoorde gegevens over de krachtsverdeling in platen te komen, moet men zich in het algemeen op de uitkomsten van de elasticiteits-theorie baseren.

De vergelijkende berekeningen met behulp van de G.B.V. 1950, de elementaire plaattheorie en de experimentele resultaten van het onderzoek bij de Werkgroep leren het volgende:

1. Omdat de meewerkende breedte volgens de G.B.V. onafhankelijk is van de randvoorwaarden van de plaat wordt het maximum moment in het midden van de ingeklemde plaat bij een geconcentreerde last aldaar de helft van dat bij de vrij opgelegde plaat. Deze reductie is relatief veel te groot.
2. Bij smalle platen geeft de G.B.V. een relatief te hoge waarde voor de meewerkende breedte. Volgens deze is de limietwaarde voor een oneindig brede plaat reeds bereikt bij een plaatbreedte =  $0,75 \times$  de overspanning. Volgens de plaattheorie is dit echter pas ongeveer het geval bij een plaatbreedte =  $1,5 \times$  de overspanning.
3. Indien de last de oplegging nadert, schrijft de G.B.V. terecht een reductie in de meewerkende breedte voor. Voor smalle lasten in de nabijheid van de oplegging worden volgens deze reductie echter te grote momenten verkregen.
4. Indien de last nabij een zwevende rand staat, is het maximum moment ongeveer twee maal zo groot als in het midden van de zeer brede plaat. Indien men volgens de G.B.V. 1950 met de „dan wel aanwezige breedte” rekt, krijgt men dus een kwalitatief juist beeld.  
Wanneer de last op een afstand  $0,4 l$  van deze rand is gekomen, is de invloed hiervan op de spanningsverdeling weer geheel verdwenen.
5. De grootte van het belaste oppervlak beïnvloedt de spanningsverdeling onder de belasting zeer sterk. Voor concentraties  $D/l > 0,05$  ( $e/a > 0,025$ ) levert de elementaire plaattheorie goede resultaten, bij sterkere concentraties speelt het dikte-effect een rol en kan de correctie van Westergaard worden toegepast. Een goede benadering voor de bruggenbouw voor het moment onder de last, zijn de formules:

$$\frac{m_x}{P} = 0,50 - 1,5 \frac{D}{l} \quad \left( \text{voor } \frac{D}{l} < 0,1 \right)$$

$$\frac{m_y}{P} = \frac{m_x}{P} - 0,066$$

indien de last in het midden van de overspanning staat van de zeer brede, vrij opgelegde plaat.

6. Staat een wielbelasting volgens de V.O.S.B. in het midden van de overspanning van een zeer brede plaat, dan worden goede uitkomsten verkregen met de in de figuren 14 en 15 gegeven lijnen.  
Het in rekening brengen van de afmetingen van de last in de richting van



de overspanning met behulp van de invloedslijnen voor een balk geeft aanleiding niet slechts tot relatief doch ook tot absoluut te hoge momenten, ook indien het in de figuren 14 en 15 gegeven verband wordt aangehouden.

7. De invloed van verschillende buigingsstijfheid in onderling loodrechte richtingen is bij platen van gewapend beton gering. De invloed van de dwarscontractie kan meer bedragen.
8. Het onderzoek naar de invloed van laststelsels heeft uitgewezen, dat het weinig verschil maakt op het maximum moment of de asbelasting verdeeld is over twee of vier wielen (twee geconcentreerde lasten of een streeplast). Het verband is steeds vrijwel lineair.  
Brenge men in overspanningsrichting meerdere assen op de brug, dan is er geen eenvoudig verband meer aanwezig. Berekening volgens een constante meewerkende plaatbreedte met behulp van de invloedslijnen voor een balk geven ook dan te grote waarden voor de momenten.

Een goede aanpassing van eenvoudige rekenregels aan de uitkomsten van de plaattheorie is dus alleszins gewenst. In het kader van de werkzaamheden van de onderzoekingscommissie A4 („Belastingspreiding in platen en balkroosters”) van het „Febo” wordt hieraan thans dan ook gewerkt.

#### LITERATUUR:

1. A. Pucher: Einflussfelder elastischer Platten, Wien 1951.
2. E. F. Kelley: Effective width of concrete bridge slabs supporting concentrated loads. Public Roads, vol. 7 (1926) nr. 1.
3. H. Olsen en F. Reinitzhuber: Die zweiseitig gelagerte Platte, Band I und II, Berlin 1950.
4. E. Bittner: Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten, Wien 1938.

#### SUMMARY

For the calculation of slabs, free supported or clamped on two opposite sides, under the action of concentrated loads, in many countries the conception of the effective width is used and in the regulations rules are given for its determination.

After a definition of the conception and a survey of the regulations regarding to the effective width as a function of the width of the load, in several countries, there follows an enumeration of the factors, on which the effective width will be dependent.

The influence of these factors are examined and the results according to the Dutch regulations for reinforced concrete (G.B.V. 1950) are compared with those according to the elementary theory of plates or with the results of experimental investigations. (W.G.S.-Mededelingen 1954 - No. 1).

Successively are discussed: the boundary conditions, the width of the plate, the position of the load, the dimensions of the load, any possible anisotropy, Poissons-modulus, and groups of loads.

In several cases the results show large differences. A better adaptation of simple rules to the results of the theory of plates is therefore desirable.