

OVER DE BEREKENING VAN KRAANRAILCONSTRUCTIES

Uit de aanvragen om adviezen voor kraanrailconstructies is ons gebleken dat de hierbij optredende problemen voor velen van belang zijn. In het volgende wordt op de berekening van deze constructies nader ingegaan.

In een grafiek worden voor verschillende waarden van het traagheidsmoment van het samenstel van rail en onderlegplaat het buigend moment in de rail en de tussendruk op de elastische onderlaag gegeven als functie van de beddingconstante. Met enige voorbeelden wordt het gebruik van deze grafiek toegelicht.

Uit de diverse aanvragen om adviezen betreffende de constructie, welke dient te worden toegepast tussen een kraanrail en de dragende betonconstructie, blijkt, dat dit probleem bij meerdere bedrijven urgent is. Het kan daarom van belang zijn op deze plaats iets nader op deze materie in te gaan. De problemen vallen in twee groepen uiteen n.l.

1. Problemen, die betrekking hebben op schadegevallen aan de dragende betonconstructie. Gevraagd werd daarbij niet alleen de oorzaak van het verbrijzelen van het beton op te sporen, maar ook om aan te geven welke elastische tussenlaag toegepast diende te worden om in de toekomst bovengenoemd euvel te vermijden.
2. Problemen, welke bij nieuwbouw naar voren komen. De belangrijkste zijn: Welke afmetingen moeten de rail en de stalen plaat, die tussen de railvoet en de elastische laag wordt aangebracht, hebben en wat is de vereiste verconstante van de elastische tussenlaag?

In dit artikel zullen alleen die problemen behandeld worden, welke met behulp van de toegepaste mechanica kunnen worden benaderd. Hierbij wordt geen aandacht geschonken aan de lasverbindingen in de rail, daar deze zeer moeilijk en slechts met zeer grove benaderingen aan theoretische beschouwingen kunnen worden onderworpen. Ook de vraag: Hoe gedraagt zich de elastische tussenlaag op den duur, vooral wat betreft de elasticiteit, weerbestendigheid, bestendigheid tegen olie, enz. zal onbeantwoord blijven, daar deze zeer sterk afhangt van de aard van de tussenlaag en van de plaats, waar de kraanbaan ligt.

Het samenstel van rail en stalen onderlegplaat kan worden beschouwd als een oneindig lange ligger, die elastisch ondersteund is. De betonnen balk wordt in eerste instantie oneindig stijf tegen buiging verondersteld. Later zal aangegeven worden op welke wijze correcties aangebracht kunnen worden, doordat niet aan bovenstaande aanname voldaan is.

Bovendien wordt aangenomen, dat de radafstanden van de kranen zodanig

zijn, dat de spanningen in rail en onderlegplaat, veroorzaakt door één wiel, niet beïnvloed worden door andere zich op dezelfde rail bevindende wielen.

Voor de afleiding van de formules die gelden voor een oneindig lange, elastisch ondersteunde ligger, die belast is met een puntlast P wordt verwezen naar S. Timoshenko: „Strength of Materials” (van Nostrand Company, New York 1940) en J. Klopper: „Leerboek der Toegepaste Mechanica III” (Waltman, Delft. 1948).

De voor bovenstaand probleem benodigde formules luiden:

$$M_t = \frac{P}{4A} \cdot \dots \dots \dots (1)$$

$$\sigma = k \frac{PA}{2c} \text{ en } \dots \dots \dots (2)$$

$$y = \frac{\sigma}{k} = \frac{PA}{2c} \cdot \dots \dots \dots (3)$$

In deze formules zijn de grootheden bepaald door:

M_t = het (maximale) moment dat in het samenstel van rail en onderlegplaat optreedt.

P = de grootte van de puntlast.

$4A^4 = \frac{c}{EI_t}$, waarin

c = de tegendrukcoëfficiënt per eenheid van lengte van de balk.

E = de elasticiteitsmodulus van het staal ($2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$)

I_t = het traagheidsmoment van de rail + onderlegplaat.

Aangenomen wordt dat het traagheidsmoment gelijk is aan de som van de eigen traagheidsmomenten van rail en onderlegplaat; d.w.z. er kunnen zich geen schuifspanningen ontwikkelen tussen beide onderdelen (de onderlegplaat is dus niet vastgelast aan de voet van de rail).

Verder is:

$c = bk$, waarin

b = de breedte van de onderlegplaat en

k = de beddingconstante van de elastische ondersteuning.

σ = de *gemiddelde* druk, die ter plaatse van de puntlast P op de elastische ondersteuning wordt uitgeoefend.

y = de *gemiddelde* zakking van het samenstel van rail en onderlegplaat in de doorsnede onder de puntlast.

Ten aanzien van het bovenstaande kan het volgende worden opgemerkt:

De maximale staalspanning zal praktisch steeds optreden in de rail. Teneinde deze te kunnen berekenen is het nodig het moment, dat de rail alleen opneemt, te kennen. Bij bovengenoemde berekening is aangenomen, dat de

elastische lijnen van rail en onderlegplaat congruent zijn. Het moment dat in de rail optreedt, is dus

$$M_{\text{rail}} = \frac{I_{\text{rail}}}{I_{\text{rail}} + I_{\text{onderlegplaat}}} \cdot M_t \quad \dots \quad (4)$$

Ten aanzien van de berekening van de beddingconstante wordt het volgende opgemerkt. De beddingconstante is globaal die kracht per cm² op de elastische ondersteuning, die de afstand tussen bovenkant elastische laag en het midden van de hoogte van de betonbalk 1 cm verkleint. Het verloop van de verticale spanningen in hoogterichting ziet eruit als aangegeven in fig. 1. De spanningen in de tussenlaag hebben dus een constante waarde, terwijl die over de hoogte van de balk verlopen volgens een derdegraads-parabool. Het oppervlak van deze parabool is dus $\propto \frac{1}{2} h \sigma$. Is de dikte van de tussenlaag z cm, de hoogte van de balk h cm en zijn de elasticiteitsmoduli hiervan E_e , resp. E_b , dan is de afstandsverandering δ tussen bovenkant elastische laag en onderkant betonbalk globaal

$$\delta = \frac{\sigma z}{E_e} + \frac{1/2 \sigma h}{E_b}.$$

Wordt $\delta = 1$ cm, dan wordt $\sigma = k = \frac{2 E_e E_b}{2 z E_b + h E_e} = \frac{2 E_b}{2 z \frac{E_b}{E_e} + h}$.

Wordt de stalen onderlegplaat rechtstreeks op de betonconstructie gelegd, dan vervalt de eerste term.

Bij bovenstaande berekening is aangenomen, dat de betonnen ligger oneindig stijf tegen buiging is. In werkelijkheid is dit niet het geval en zullen extra spanningen in de rail en de stalen onderlegplaat optreden. Deze kan men als volgt denken te zijn ontstaan. Men denkt zich de puntlast P niet op de rail, maar in dezelfde doorsnede naast de rail op de betonconstructie geplaatst. Hierdoor zullen in de betonconstructie vormveranderingen ontstaan, welke door de rail, die meestal met behulp van ankers op de betonconstructie bevestigd is, gevolgd zullen worden. De elastische lijnen van betonnen ligger en het samenstel van rail en onderlegplaat zullen dus congruent zijn. Het moment dat in de rail ontstaat, is dan

$$M'_{\text{rail}} = \frac{EI_{\text{rail}}}{EI_{\text{betonnen ligger}} + EI_{\text{rail}}} \cdot M'_{\text{beton}}.$$

Door de last van de ligger op de rail te plaatsen ontstaan de reeds eerder berekende spanningen. In het algemeen zullen echter de spanningen ten gevolge van M'_{rail} te verwaarlozen zijn ten opzichte van die ten gevolge van M_{rail} .

Bij bovenstaande berekeningen is verder aangenomen, dat de onderlegplaat

in dwarsrichting oneindig stijf is. De „tussendrukspanning” σ was dus over de gehele breedte van de onderlegplaat gelijkmatig verdeeld. In werkelijkheid is dit niet het geval. Teneinde een inzicht te krijgen in het werkelijk verloop van de tussendruk in de breedterichting en de invloed hiervan op de in de rail en stalen onderlegplaat optredende spanningen, wordt de onderlegplaat in de breedterichting opgevat als een ligger, waarop een belasting werkt, groot $b\sigma$. Aangenomen wordt dat deze kracht een puntlast is, welke ter

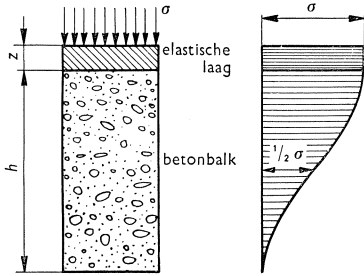


Fig. 1. Verloop van de verticale drukspanning. In de elastische tussenlaag is deze constant; over de hoogte van de betonbalk verloopt de spanning volgens een derdegraads-parabool.

plaatse van het hart van de rail op de onderlegplaat aangrijpt. In werkelijkheid is dit geen puntlast, maar is de kracht over een geringe breedte gelijkmatig verdeeld. De werkelijke spanningen zullen dus iets kleiner zijn dan die, welke berekend worden ten gevolge van de puntlast.

De formules voor dit probleem zijn eveneens vermeld in „Strength of Materials” van S. Timoshenko.

De formule, die voor dit probleem van belang is, luidt:

$$y_{\max} = \frac{\sigma ba}{2k} \frac{\cosh ab + \cos ab + 2}{\sinh ab + \sin ab}.$$

Hierin is y_{\max} de indrukking van de elastische laag ter plaatse van de puntlast en is a weer te bepalen uit:

$$4a^4 = \frac{k}{Ei} \dots \dots \dots (5)$$

Daar bij deze berekening een liggertje (hoogte d cm) met een breedte van 1 cm beschouwd wordt, is $i = \frac{1}{12} d^3$.

Bovendien is aangenomen, dat de dwarsstijfheid van de voetplaat van de rail te verwaarlozen is ten opzichte van die van de stalen onderlegplaat. In de meeste gevallen is deze verwaarlozing gerechtvaardigd, behalve wanneer de onderlegplaat zeer dun is.

Substitutie van de formule $y = \frac{\sigma}{k}$ in bovenstaande formule levert

$$y_{\max} = y \frac{ba}{2} \frac{\cosh ab + \cos ab + 2}{\sinh ab + \sin ab} = \beta y \dots \dots \dots (6)$$

Het maximale moment m , dat in dwarsrichting van de onderlegplaat optreedt, is

$$m = \frac{\sigma b}{4 a} \cdot \frac{\cosh ab - \cos ab}{\sinh ab + \sin ab} \dots \dots \dots (7)$$

De maximale staalspanning σ' in de breedterichting van de onderlegplaat wordt gevonden met de formule

$$\sigma' = \frac{6 m}{d^2} \dots \dots \dots (8)$$

Wanneer de onderlegplaat te breed is, zouden we vinden dat er langs de randen trekspanningen tussen de plaat en de elastische ondersteuning zouden voorkomen. Deze kunnen natuurlijk niet optreden, m.a.w. de plaat zal daar opwippen. Aan de praemissen die aan bovenstaande formules ten grondslag liggen, is dan echter niet voldaan. De grens waarbij nog juist geen opwippen voorkomt volgt uit de betrekking

$$b = \frac{\pi}{a} \dots \dots \dots (9)$$

(Zie b.v. J. Klopper l.c.).

Is het uit een oogpunt van stijfheid in de lengterichting of uit constructieve overwegingen nodig een bredere onderlegplaat toe te passen, dan moet men toch in de berekening de waarde van b uit bovenstaande formule invoeren.

Substitueren we deze waarde voor b in bovenstaande formules, dan vinden we:

$$y_{\max} = y \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cosh \pi + \cos \pi + 2}{\sinh \pi + \sin \pi} = 1,65 y.$$

Bij smallere onderlegplaten kan deze verhouding β dus lager liggen.

Een globale indruk over de invloed hiervan op de spanningen kan als volgt worden verkregen.

Een grotere doorbuiging onder het lijf van de rail betekent dat in feite de ondersteunende laag „slapper” is, m.a.w. dat ter plaatse de k - en de c -waarde een factor β kleiner zijn. De waarde van A wordt dus kleiner in de verhouding $\sqrt[4]{\beta}$, het maximum moment in de rail onder de puntlast wordt hierdoor in dezelfde verhouding vergroot, dat is dus maximaal met een factor $\sqrt[4]{1,65} = 1,13$.

Uit de formule (3) voor de doorbuiging onder de puntlast volgt dat de zonder dwarsinvloed berekende waarde wordt vergroot in de verhouding $1,65/1,13 = 1,455$ voor het punt onder het lijf van de rail. Hetzelfde geldt ten aanzien van de tussendruk ter plaatse op de elastisch ondersteunende laag.

Voor verschillende waarden van I_t zijn nu met behulp van formule (1) de waarden van M_t berekend als functie van de tegendrukcoëfficiënt k en uit-

gezet in fig. 2 (k is hierbij logaritmisch uitgezet) voor een belasting groot $P = 10$ ton. In deze formule is A nu als volgt berekend:

$$4 A^4 = \frac{c}{EI_t \cdot 1,65}.$$

De berekende waarden van M_t zijn dus maxima, behorend bij een breedte van de onderlegplaat $b = \pi/a$.

Voor smallere onderlegplaten zullen zij iets kleiner kunnen zijn, hooguit 5 à 10%.

Bij de bepaling van de waarde $b = \frac{\pi}{a}$ is a berekend met behulp van formule (5):

$$4 a^4 = \frac{k}{Ei}, \text{ waarin } i = \frac{1}{12} d^3.$$

Voor d is hierbij aangehouden $d = 2,5$ cm. Bij grotere waarden van d behoort een kleinere waarde van a en dus een grotere waarde van b , dus van c . Hierdoor zal het totale moment iets afnemen. Bij grote waarden van b en grote waarden van d (b.v. 6 cm) kan deze afname 10 à 15% bedragen. De berekende waarden van M zijn dus in het algemeen aan de veilige kant.

In dezelfde figuur zijn bovendien uitgezet de waarden van σ , dat is hier de maximale tegendruk op de elastisch ondersteunende laag onder het lijf van de rail. Ook bij de berekening van σ met behulp van formule (2) is bij de bepaling van c en dus b een waarde $d = 2,5$ cm aangehouden.

Bij grotere waarden van d , b.v. een waarde $d = \alpha \cdot 2,5$ cm wordt b vergroot in de verhouding $\sqrt[4]{\alpha^3}$, evenals c .

De coëfficiënt A wordt dus vergroot in de verhouding $\sqrt[16]{\alpha^3}$.

Uit formule (2) volgt dus dat de tussendruk σ verandert in de verhouding

$$\frac{\sqrt[16]{\alpha^3}}{\sqrt[4]{\alpha^3}} = \frac{1}{\sqrt[16]{\alpha^9}}.$$

Voor een verhouding $\alpha = 2$ b.v. betekent dat, dat de spanning σ afneemt met $\frac{1}{\sqrt[16]{2^9}} = \frac{1}{1,48}$, als tenminste de bijbehorende grote waarde van b toegepast wordt. Bij kleinere waarden van b zal de reductie minder bedragen. De grafieken van fig. 2 blijven bruikbaar door in dergelijke gevallen overeenkomstig hogere (fictieve) spanningen σ op de tussenlaag toe te laten.

Rekenvoorbeelden.

1. Als voorbeeld kiezen we een railprofiel nr. 3 ($I_{\text{rail}} = 329 \text{ cm}^4$), belast met een puntlast, groot 35 ton, en opgelegd op een stalen onderlegplaat met afmeting $23 \times 2,5 \text{ cm}^2$.

Het totale traagheidsmoment bedraagt dus:

$$I_t = (329 + \frac{1}{12} \cdot 23 \cdot 2,5^3) \text{ cm}^4 = 359 \text{ cm}^4.$$

Bij een waarde van $k = 5000 \text{ kg/cm}^3$ vinden we dus een totaal moment

$$M_t = \frac{35 \text{ t}}{10 \text{ t}} 37 \text{ tcm} = 129,5 \text{ tcm (punt A)}.$$

Hierbij hoort een grootste staalspanning in de rail:

$$\sigma_y = \frac{I_{\text{rail}}}{I_t} \cdot \frac{M_t}{W_{\text{rail}}} = \frac{329}{359} \cdot \frac{129500 \text{ kgcm}}{74 \text{ cm}^3} = 1604 \text{ kg/cm}^2$$

en een grootste drukspanning (onder het lijf)

$$\sigma = 26 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{35 \text{ t}}{10 \text{ t}} = 91 \text{ kg/cm}^2 \text{ (punt B)}.$$

2. Zijn omgekeerd de belasting P en het railprofiel met onderlegplaat gegeven, evenals de toelaatbare spanningen in de rail en op de elastisch ondersteunende laag, dan kunnen we met behulp van deze figuur aflezen de waarden waartussen k moet liggen.

Laten we in de rail b.v. een spanning $\bar{\sigma}_y = 2000 \text{ kg/cm}^2$ toe, dan volgt hieruit bij het bovenvermelde profiel een toelaatbaar moment

$$M_t = \frac{I_t}{I_{\text{rail}}} \cdot W_{\text{rail}} \cdot \bar{\sigma}_y = \frac{359}{329} \cdot 74 \cdot 2000 = 161,7 \text{ tcm}.$$

In de grafiek die gegeven is voor een belasting $P = 10$ ton, correspondeert deze waarde met een $M_t = \frac{10 \text{ t}}{35 \text{ t}} \cdot 161,7 = 46,2 \text{ tcm}$.

Het snijpunt (punt C) met de lijn $I_t = 359 \text{ cm}^4$ bepaalt de k waarde: $k = 1450 \text{ kg/cm}^3$. Is anderzijds b.v. op de elastische onderlaag een drukspanning $\sigma = 100 \text{ kg/cm}^2$ toelaatbaar, dan correspondeert deze waarde met

een drukspanning $\frac{10 \text{ t}}{35 \text{ t}} \times 100 \text{ kg/cm}^2 = 28,57 \text{ kg/cm}^2$ in de grafiek. De hori-

zontale lijn door dit punt snijdt de bijbehorende lijn voor $I_t = 359 \text{ cm}^4$ in een punt D waarbij een k -waarde hoort: $k = 6375 \text{ kg/cm}^3$.

Zullen dus bij de gegeven belasting en het aangehouden railprofiel en de aanwezige onderlegplaat nergens de toelaatbare spanningen worden overschreden, dan moet k tussen de genoemde waarden liggen.

Tenslotte zijn met behulp van formule (9) de waarden bepaald van b (de breedte van de onderlegplaat) waarbij nog juist geen opwippen plaatsvindt voor verschillende waarden van de dikte d en de beddingconstante k . In fig. 3 is dit verband weergegeven. Aangenomen is dus dat de druk van

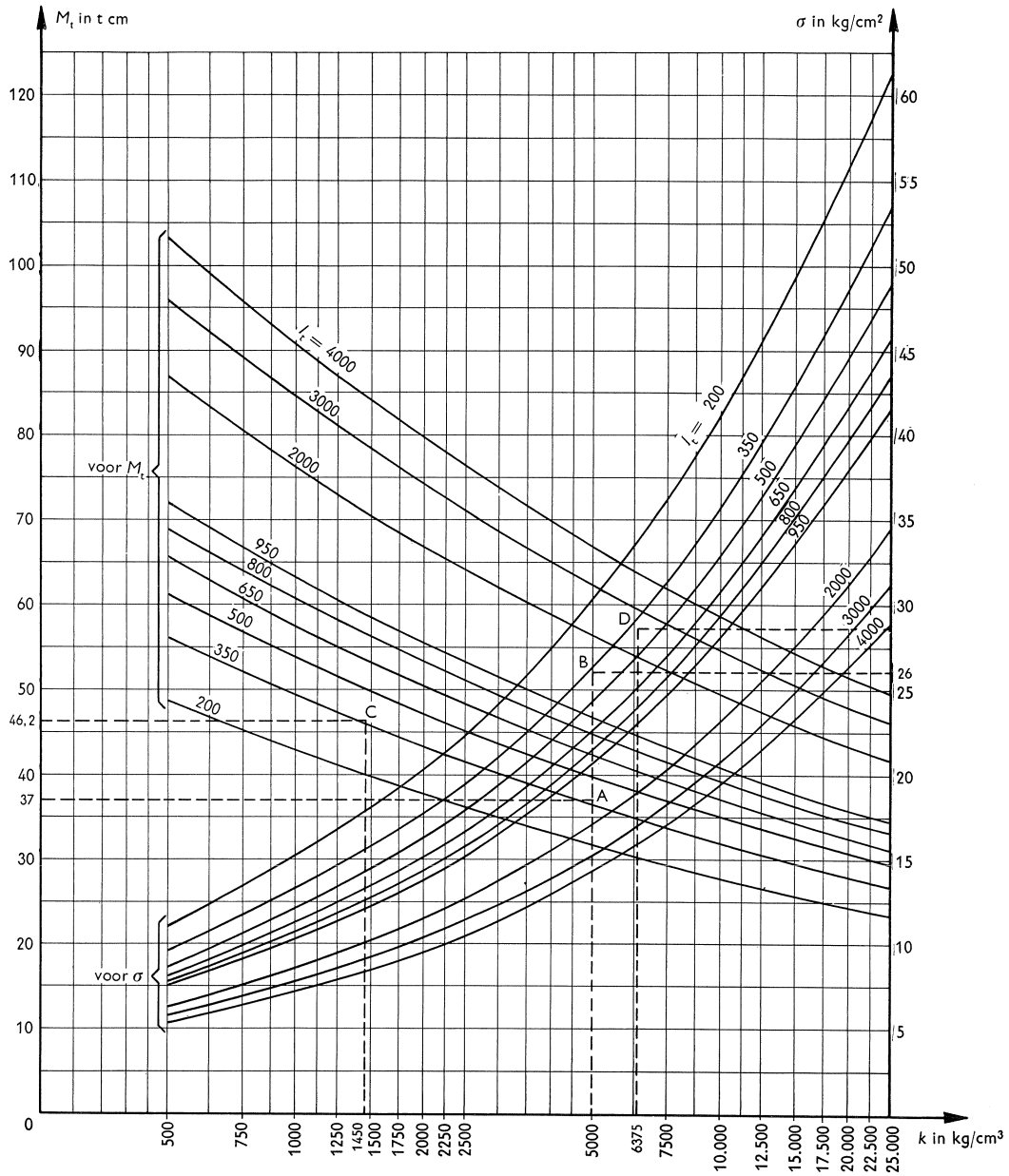


Fig. 2. Het totale buigend moment M_t in railprofiel en onderlegplaat en de tussendruk σ op de elastisch ondersteunende laag voor verschillende waarden van het totale traagheidsmoment I_t als functie van de beddingconstante k , voor een belasting $P = 10$ ton.

de rail als een puntlast ter plaatse van het lijf op de onderlegplaat werkt. De lijfplaat zal echter een zekere breedte hebben en ook door de railvoet

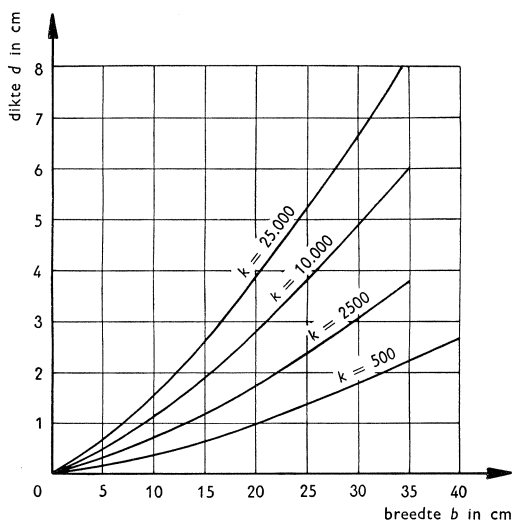


Fig. 3. De dikte van de onderlegplaat als functie van de breedte voor verschillende waarden van de beddingconstante k , wanneer juist geen opwippen langs de randen zal optreden.

zal een zekere spreiding van deze last plaatsvinden. Bovendien zal de railvoet zelf zich tegen buiging in dwarsrichting verzetten.

Beide invloeden zullen tengevolge hebben, enerzijds dat de in fig. 3 aangegeven breedten b iets groter zullen kunnen zijn alvorens opwippen optreedt, anderzijds dat de in fig. 2 aangegeven drukspanningen op de elastisch ondersteunende laag iets kleiner zullen zijn. Bij gedrongen railprofiel en dunne onderlegplaat zijn deze invloeden het grootst. In dit geval kunnen zij tezamen $\pm 20\%$ bedragen.

SUMMARY

From the requests for advice concerning the constructions for the rails necessary for cranes, it appeared that the problems connected herewith are of interest to many people. In the next will be gone into the calculation of these constructions.

The bending moment in the rail and the stress on the elastic foundation are given as a function of the „foundationmodulus” for different values of the moment of inertia of the system of rail and under-layer.

In some examples the use of this graph is explained.