

OVER DE INVLOED VAN DE KRUIP EN DE RELAXATIE OP DE SPANNINGEN EN VERVORMINGEN IN CONSTRUCTIES, IN HET BIJZONDER BIJ EXCENTRISCH GEDRUKTE STAVEN EN BOGEN

Het bij beton experimenteel geconstateerde feit van een lineair verband tussen spanning en uiteindelijke vormverandering tengevolge van kruip vormt de basis waarop het navolgende artikel is opgebouwd.

Na een bespreking hiervan wordt de basisvergelijking, waarvan in het volgende is uitgegaan, opgesteld. Nadat de invloed van de kruip, bij de laboratoriumproef ter bepaling van het $\sigma - \epsilon$ diagram, wordt gememoreerd, wordt uitvoerig omschreven bij welke constructies van een homogeen, isotroop, elastisch materiaal de kruip wel en bij welke de kruip geen invloed zal hebben op de spanningsverdeling. Hierna komen nog de constructies in gewapend en voorgespannen beton ter sprake. Van deze laatste wordt één voorbeeld vrij uitvoerig behandeld. Ook de gewone op buiging belaste ligger wordt hierbij besproken. Bij de excentrisch gedrukte staaf worden eerst de knikformules in het elastische gebied gememoreerd, waarna de invloed van de kruip wordt nagegaan. De afleiding voert tot formules zoals reeds door Dischinger zijn opgesteld. Zoals bekend kan de invloed, bestaande uit een vergroting van de buigende momenten, zeer belangrijk zijn. Een toepassing op betonkolommen wordt gegeven.

Bij de bogen worden de knikformules gegeven en de analogie met excentrisch gedrukte staven belicht, waarna aan een voorbeeld de hier te volgen berekeningswijze wordt toegelicht.

Relaxatie kan soms een gunstige invloed hebben op de spanningsverdeling. Met een paar voorbeelden wordt dit aangetoond.

Inleiding

In het vorige artikel werd het kruipverschijnsel beschreven, zoals dat bij laboratoriumproeven aan centrisc gedrukte betonprisma's is waargenomen en werden de factoren, die erop van invloed zijn, kort behandeld.

In het navolgende artikel zal de invloed, die het kruipverschijnsel kan hebben op spanningen en vervormingen, voor verschillende gevallen worden besproken, waarbij in het bijzonder zal worden ingegaan op de invloed, die het kruipverschijnsel heeft bij excentrisch gedrukte staven en bogen.

Door Dischinger [1] [2] zijn destijds belangrijke beschouwingen aan dit onderwerp gewijd. Het hierna volgende is hieraan gedeeltelijk ontleend. In het voorgaande artikel is reeds beschreven dat een element van het kruipgevoelig materiaal beton, dat onder een bepaalde blijvende, constante (normaal-) spanning staat, een met de tijd toenemende vervorming ondergaat volgens een verband, gegeven in fig. 1. Het blijkt dat, wel niet in de aanvang, maar wel na verloop van tijd, de grootte van de vormveranderingen c.q. van de

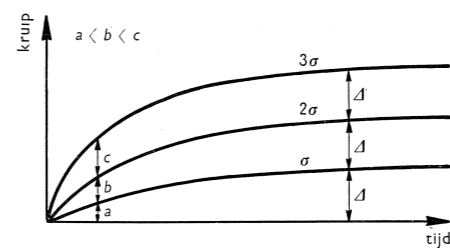


Fig. 1. De kruip in een betonelement als functie van de tijd voor verschillende normaalspanningen.

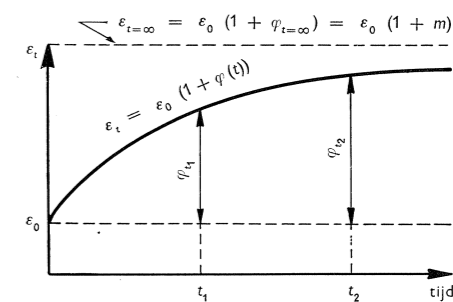


Fig. 2. De totale specifieke lengteverandering ϵ_t als functie van de tijd.

kruip evenredig blijft met de spanningen, m.a.w. dat (ook) hier de wet van Hooke geldig is, zij het dat de evenredigheidsfactor, die men bezwaarlijk meer een elasticiteitsmodulus kan noemen, een functie van de tijd is. Een bepaalde vormveranderingsgrootte, zeg ϵ , verandert dus in de loop der tijd volgens een verband

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \{1 + \varphi(t)\} \quad (\text{zie fig. 2}) \quad \dots \dots \dots (1)$$

waarin $\epsilon_0 = \frac{\sigma}{E_0}$ de ogenblikkelijke waarde na het aanbrengen van een spanning σ is. De kruipmaat, dat is de verhouding tussen de kruip en de elastische vervorming wordt dus gegeven door de functie $\varphi(t)$. Voor de van de tijd afhankelijke evenredigheidsfactor E_t vinden we dan de betrekking

$$E_t = \frac{E_0}{1 + \varphi_t} \quad \dots \dots \dots (2)$$

waarin E_0 de ogenblikkelijke waarde bij het aanbrengen van de belasting, c.q. de elasticiteitsmodulus is.

Wanneer de belasting niet op het tijdstip $t = 0$ wordt aangebracht, doch op een later tijdstip $t = t_1$, waarbij een kruipmaat φ_{t_1} zou behoren, dan is het verloop van de daarna optredende kruip te bepalen door alle ordinaten van de $\varphi(t)$ -kromme te verminderen met de waarde φ_{t_1} , zoals uit proeven van Whitney is gebleken [3] (zie fig. 3). De kruip is dan dus veel geringer door de grotere ouderdom van het beton. De kruip die zou zijn opgetreden vanaf $t = 0$ tot het tijdstip $t = t_1$ heeft men a.h.w. gemist.

Voor de evenredigheidsfactor E_t geldt dan dus de betrekking

$$E_t = \frac{E_0}{1 + \varphi_t - \varphi_{t_1}} \quad \dots \dots \dots (3)$$

De afname van E_t is dan dus ook geringer dan volgens vergelijking (2). Uit

Notaties

- ε specifieke rek.
- ε_0 specifieke rek bij het aanbrengen van een spanning σ ten tijde $t = 0$.
- ε_t specifieke rek ten tijde t .
- σ normaalspanning.
- E elasticiteitsmodulus.
- $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ elasticiteitsmodulus ten tijde $t = 0$.
- E_t van de tijd afhankelijke evenredigheidsfactor, die bij een constante spanning σ het verband geeft tussen de spanning en de vormverandering $E_t = \sigma/\varepsilon_t$.
- $\varphi(t)$ de kruipmaat als functie van de tijd.
- φ_t kruipmaat ten tijde t .
- $m = \varphi_t \rightarrow \infty$ de uiteindelijk te verwachten kruipmaat.
- E_{ij} elasticiteitsmodulus van staal.
- E_b elasticiteitsmodulus van beton.
- σ_{ij} staalspanning.
- f_{ij} doorsnede van de wapening.
- h wanddikte, liggerhoogte.
- d zijde van een vierkante kolom
- F oppervlak van een doorsnede.
- W weerstandsmoment van een doorsnede.
- I traagheidsmoment.
- $K = \frac{EI}{12(1-\nu^2)}$ buigingsstijfheid van een schaal of plaat.
- ν contractiecoëfficiënt.
- M buigend moment.
- z zakking, doorbuiging.
- ν_0 initiale excentriciteit = initiale afwijking tussen druklijn en staafas.
- l_k kniklengte.
- P drukkracht.
- $P_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$ knikkraft volgens Euler.
- $n = \frac{P_k}{P}$ knikzekerheid.
- γ vergrotingsfactoren van momenten en excentriciteiten tengevolge van elastische vormveranderingen en kruip tezamen.
- S drukkracht in een boog.
- H horizontale reactie bij een boog op twee scharnieren.

de „evenwijdigheid” enige tijd na het oogenblik $t = t_1$ van de kruipkromme bet horende bij een belasting, aangebracht ten tijde $t = 0$, en de kruipkromme bet horende bij een belasting, aangebracht ten tijde $t = t_1$, volgt, dat ook na het aanbrengen van een belasting op een later tijdstip t_1 de vormveranderingen

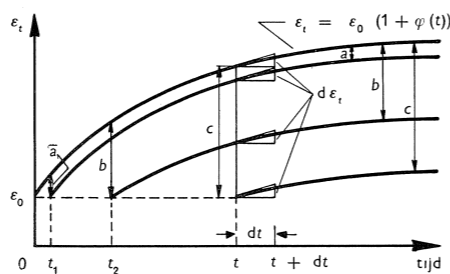


Fig. 3. De totale specifieke lengteverandering ε_t als functie van de tijd voor verschillende tijdstippen van het aanbrengen van (een zelfde) normaalspanning.

tengevolge van kruip enige tijd na dit oogenblik weer evenredig zijn met de totale opgebrachte belasting. Deze lineariteit tussen vormverandering en spanning maakt het mogelijk het kruipprobleem te analyseren en berekeningen b.v. over de invloed van de kruip op de spanningen te maken. Zij is in het navolgende dan ook de basis waarvan is uitgegaan. Uiteraard heeft zij slechts een benaderend karakter. De afwijkingen hiervan vallen echter binnen de overige onzekerheden, die het kruipverschijnsel met zich brengt en de benadering is dus alleszins toelaatbaar en verantwoord. We denken ons nu een prisma, op zeker tijdstip t belast met een normaalspanning σ . Blijft de spanning in het eerstvolgende oogenblik constant, dan kan de toename van de specifieke

vervorming ε in het tijdje dt worden bepaald door differentieren van vergelijking (1):

$$d\varepsilon_t = \varepsilon_0 \cdot d\varphi_t \dots \dots \dots (4)$$

waarbij voor ε_0 de ogenblikkelijke vormverandering onder een spanning σ , aangebracht bij $t = 0$, kan worden aangehouden, dus $\varepsilon_0 = \sigma/E_0$ (zie fig. 3).

Hierbij is dus gebruik gemaakt van het bovenvermelde feit, dat op een zeker tijdstip de raaklijnen aan de verschillende kruipkrommen (zie fig. 3), en de raaklijn aan de „basiskromme”: $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \{1 + \varphi(t)\}$, dezelfde helling hebben, als alle krommen dan voor dezelfde spanning σ gelden, waarbij het er niet toe doet volgens welk verloop deze spanningen tot σ zijn aangegroeid. Neemt de spanning in het tijdje dt echter ook toe met een bedrag $d\sigma$ dan dient de vormverandering te worden vermeerderd met de elastische vormverandering

$$d\varepsilon_t = \frac{d\sigma}{E_0} \dots \dots \dots (5)$$

waarbij voorlopig is aangenomen dat de elasticiteitsmodulus E_0 niet met de tijd verandert. Later zal hierop nader worden ingegaan.

De totale vormverandering bedraagt dan:

$$d\varepsilon_t = \varepsilon_0 \cdot d\varphi_t + \frac{d\sigma}{E_0} = \frac{1}{E_0} \sigma \cdot d\varphi_t + \frac{1}{E_0} \cdot d\sigma \dots \dots (6a)$$

Is dus enerzijds het verloop van de kruipkromme $\varphi(t)$ bekend, en kent men anderzijds het verloop van de spanning σ als functie van de tijd dan kan men dus door integratie van deze vergelijking het verloop van de vormverandering ε als functie van de tijd bepalen.

Is b.v. de spanning σ gedurende de beschouwde tijd constant, dan vervalt de tweede term in het rechterlid en krijgt men na integratie onder invoering van de juiste randvoorwaarde de vergelijking (1) terug. Het zal duidelijk

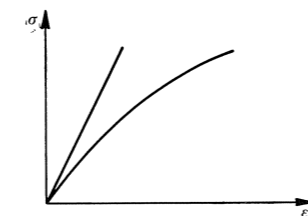


Fig. 4. Lineair en kromlijnig σ - ε diagram.

zijn dat bij een willekeurig verloop van de spanning σ , integratie van de tweede term in het rechterlid een lineair verband tussen vormverandering en spanning oplevert, indien E_0 constant, dus onafhankelijk van σ wordt gesteld. Integratie van de eerste term van het rechterlid betekent echter dat er afwijkingen van dit lineaire verband zullen optreden, die afhankelijk zijn van het verloop van de spanning als functie van de tijd en van de kruipkromme $\varphi(t)$. (zie fig. 4).

Zelfs bij een kortstondige duur van de belasting, zoals b.v. bij een laboratoriumproef het geval is, doet zich deze laatste invloed, de kruip dus, gelden. En het is dus niet direct te zeggen of het kromlijnig zijn van een gevonden σ - ε diagram inhaerent is aan het betrokken materiaal (een variabele E_0 dus), dan wel of en in welke mate hier een tijdeffect mede een rol speelt. Soms is men wel eens geneigd het kromlijnig verband geheel aan deze laatste

factor toe te schrijven. Het zal in ieder geval duidelijk zijn dat de factor tijd een belangrijke invloed heeft op de uitkomsten van een dergelijke prismaproef. In het licht hiervan hebben de verschillende aannamen over het spanningsverloop in de drukzone van een doorsnede van een op buiging belaste balk, zoals in verschillende plasticiteitstheorieën worden gedaan, slechts een betrekkelijke waarde. En dit geldt in het bijzonder voor spanningen tengevolge van langdurige belastingen daar, zoals reeds is opgemerkt (bl. 74, fig. 5), het $\sigma - \epsilon$ diagram hierbij weer tot een lineair verband kan naderen. Voor langdurige belastingen zou een lineair drukspanningsverloop over de doorsnede van een gebogen balk dus nog wel eens het beste met de werkelijkheid in overeenstemming kunnen zijn, waarbij uiteraard met een lage waarde van de elasticiteitsmodulus gerekend dient te worden.

Uit het bovenstaande blijkt reeds hoe de kruip een met de tijd veranderlijke invloed op de spanningsverdeling in een doorsnede kan hebben. De invloed van de kruip zal zich overal manifesteren waar de stijfheid tegen rek, buiging, afschuiving of wringing een rol speelt. Deze invloed blijft in vele gevallen beperkt tot de vormveranderingen, die dan met een lagere elasticiteitsmodulus volgens vgl. (2) of (3) berekend kunnen worden, terwijl de spanningsverdeling hierdoor geen wijziging ondergaat.

In al die constructies van een homogeen, elastisch, isotroop materiaal, waarvoor bij de berekening van de spanningen volgens de elasticiteitsleer men zich kan baseren op de wet van Hooke (lineariteit tussen spanning en vormverandering) en het superpositiebeginsel (lineariteit tussen enerzijds de belasting en anderzijds de spanningen en vervormingen) zullen door de kruip, indien hiervoor ook lineariteit tussen vormverandering en spanning geldt, geen wijzigingen in de spanningsverdeling worden veroorzaakt.

Statisch onbepaalde constructies vormen in het algemeen dus geen uitzondering ten opzichte van de statisch bepaalde. De momentenverdeling in de eenvoudige ligger op drie steunpunten (zie fig. 5) ondergaat door kruip dus evenmin wijziging als b.v. de grootte van de inklemmingsmomenten aan de voet van de wand van het cilindervormige reservoir (zie fig. 6). De kruip resulteert uitsluitend in grotere doorbuigingen t.o.v. de vaste steunpunten.

Wanneer men zich bij de berekening volgens de elasticiteitstheorie van een constructie bestaande uit een homogeen, elastisch, isotroop materiaal *niet* kan baseren op de wet van Hooke en op het superpositiebeginsel, dan zal een kruip, waarvoor wel lineariteit geldt, *wel* invloed hebben op de spanningsverdeling. In het volgende zal worden aangetoond dat deze invloed zeer belangrijk kan zijn.

Het wegvallen van het superpositiebeginsel b.v. doet zich voor wanneer de vormveranderingen, die ontstaan, op hun beurt de uitwendige belastingen

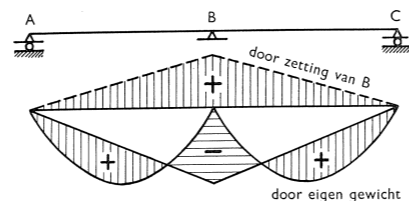


Fig. 5. Momentenlijn in ligger op drie steunpunten.

of de uitwendige momenten beïnvloeden, waardoor een niet-lineair verband tussen de uitwendige belasting en de vormveranderingen optreedt. Dit is b.v. het geval bij de excentrisch getrokken of gedrukte staaf.

Bij slanke bogen en hangbruggen, waarbij grote vervormingen kunnen optreden en die dus met een tweede-orde-theorie worden berekend, komt dit ook voor.

Alvorens op excentrisch gedrukte staven en bogen nader in te gaan, moge eerst nog op een tweede groep van constructies worden gewezen, waarbij de kruip ook invloed heeft op de spanningsverdeling. Deze groep omvat de constructies bestaande uit twee of meer samenhangende materialen. We kunnen hiertoe de constructies in gewapend en voorgespannen beton rekenen.

Uit proeven van Davis [4], Glanville [5] [6], Gehler [7] en Richart (8) op gewapend betonnen buigbalken en kolommen blijkt, dat de wapening in belangrijke mate de kruip reduceert. Door de kruip wordt een deel van de betonspanning overgedragen aan het wapeningsstaal. In de terminologie van de mechanische modellen (pag. 108 e.v.) kan men zeggen, dat het tot op zekere hoogte visco-elastisch element (het beton) parallel is geschakeld met het elastisch element (de wapening) als de spanning in de wapening beneden de vloeigrens blijft en met een plastisch element als de spanning hierin de vloeigrens overschrijdt. Des te hoger de vloeigrens van het staal is des te meer zal de kruip van het beton kunnen worden gereduceerd.

De overdracht van spanning van het beton naar het staal is bij kolommen groter dan bij buigbalken. In het eerste geval kan blijkens de genoemde proeven de staalspanning tot 3 à 4 maal de oorspronkelijke waarde oplopen, in het tweede geval tot ongeveer $1\frac{1}{2}$ maal de beginwaarde. De toename van de staalspanning is afhankelijk van het wapeningspercentage; hij neemt af bij toenemend wapeningspercentage. Tengevolge van de kruip blijken bij op buiging belaste balken de hoekverdraaiingen en de doorbuigingen te kunnen toenemen met 2 à 3 maal hun beginwaarden.

Bij voorgespannen betonconstructies is het nog belangrijker om de invloed van de kruip na te gaan, daar deze een afname in de voorspanning tengevolge kan hebben. Vroegere pogingen tot het toepassen van voorgespannen beton mislukten immers omdat de wapening bij het gedwongen mee ondergaan van de vormveranderingen van het beton tengevolge van kruip en krimp vrijwel zijn gehele voorspanning verloor. Door het toepassen van hoogwaardige staalsoorten heeft men deze moeilijkheden kunnen overwinnen. Anderzijds zal door het toepassen van hoogwaardig beton, nodig in verband met de optredende hoge spanningen, de kruip worden tegengegaan. Aan de omstandigheid dat de kruip van beton tot een eindige waarde nadert, is het te danken dat het grootste gedeelte van de voorspanning in het staal behouden blijft. Hoogwaardig beton benadert het visco-elastisch gedrag. In een voorgespannen betonconstructie is dus in belangrijke mate een wisselwerking aanwezig tussen een visco-elastisch element en een elastisch element. Het nagaan van de

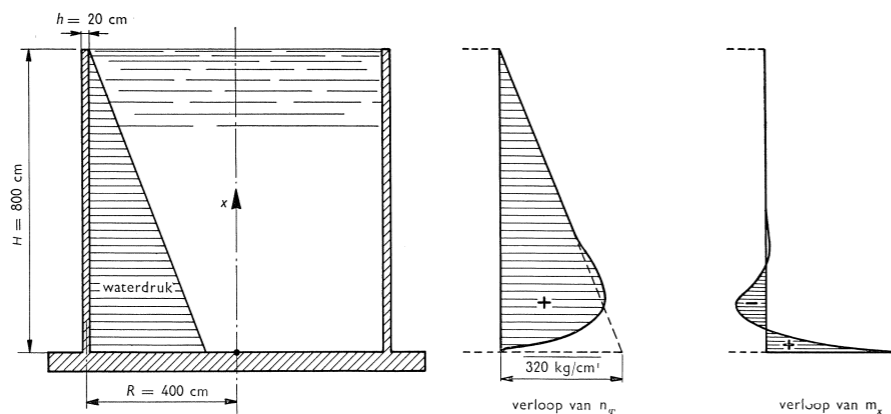


Fig. 6. Cylindrisch reservoir.

invloed van de kruip zal in het algemeen echter gecompliceerd zijn. Deze invloed zal bij liggers o.m. afhangen van de vorm en de plaats van de voorgespannen wapening.

Vaak is het mogelijk de voorspanning op te vatten als een uitwendige belasting. Blijven de variaties in de voorspanning tengevolge van de kruip betrekkelijk gering, b.v. kleiner dan 10%, dan is het veelal mogelijk langs deze weg een *directe* schatting te maken van de invloed van de kruip op de spanningsverdeling. Aan een voorbeeld moge dit worden toegelicht t.w. het cilindrische reservoir uit fig. 6, waarvan de wanden in de bodem ingeklemd worden gedacht. Bij een vulling met water tot de rand heerst op de bodem een druk $q = 0,8 \text{ kg/cm}^2$, waardoor een grootste ringkracht $n_\varphi = q \cdot R = 0,8 \cdot 400 = + 320 \text{ kg/cm}^1$ in de wand ter plaatse van de bodem zou ontstaan. Door de inklemming ter plaatse zal het verloop van n_φ over het benedenste gedeelte afbuigen. Gemakshalve rekenen we echter met deze fictieve waarde, daar meer naar boven de betrokken waarden ten opzichte van deze lineair afnemen. Wenst men door middel van een spiraalwapening het reservoir zodanig voor te spannen dat bij volbelasting geen trekspanningen in het beton optreden, dan zal de volledige kracht n_φ door deze wapening dienen te worden opgenomen. Deze uitwendige belasting door de voorspanning zal men dan ook lineair van boven naar beneden laten toenemen en de werking hiervan is gelijk, doch tegengesteld aan die van de waterdruk.

De specifieke stuik in de richting van de omtrek van de cirkelcylinder tengevolge van de voorspanning bedraagt:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{n_\varphi}{E_b \cdot h} \dots \dots \dots (7)$$

waarin h de wanddikte voorstelt. Het staal heeft deze vervorming meege maakt, welke correspondeert met een spanningsvermindering:

$$\sigma_{ij} = E_{ij} \cdot \varepsilon_\varphi = \frac{E_{ij}}{E_b} \cdot \frac{n_\varphi}{h} \dots \dots \dots (8)$$

Met de waarden $h = 20 \text{ cm}$, $E_{ij} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ en $E_b = 3 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ wordt dit: $\sigma_{ij} = 7 \cdot \frac{320}{20} \text{ kg/cm}^2 = 112 \text{ kg/cm}^2$. Deze spanningsvermindering kan men

tijdens het spannen compenseren. Een daarna optredend spanningsverlies tengevolge van kruip echter veelal niet. Bedraagt de kruipmaat $\varphi_{t \rightarrow \infty} = m$ bijvoorbeeld 4, hetgeen een hoge waarde is, dan zal tengevolge van de kruip het spanningsverlies $\sigma_{ij} = 4 \times 112 \text{ kg/cm}^2 = 448 \text{ kg/cm}^2$ kunnen bedragen. Heeft men voorgespannen op b.v. een spanning $\sigma_{ij} = 8000 \text{ kg/cm}^2$ dan is dit een verlies van 5,4%, wat dus een even grote reductie in de „belasting” tengevolge van de voorspanning betekent. De spanningen en momenten, b.v. het inklemmingsmoment aan de voet, ondergaan dus ook een reductie van 5,4%. Bij grotere verliezen is deze redenering natuurlijk niet juist meer omdat de verminderde voorspanning op zijn beurt weer aanleiding geeft tot een verminderde kruip.

Voor het *algemeen geval* zal men kunnen uitgaan van vgl. (6a):

$$d\varepsilon_t = \frac{1}{E_0} d\sigma + \frac{1}{E_0} \cdot \sigma \cdot d\varphi_t.$$

In feite is in het bovenstaande dus slechts rekening gehouden met de tweede term in het rechterlid van deze vergelijking en is de invloed van de verandering van de voorspanning, de eerste term, verwaarloosd. Bij kleine verliezen is dit uiteraard geoorloofd.

Voor een op buiging belaste ligger met hoogte h geldt voor de extreme vezels:

$$\sigma_e = \frac{M}{W}, \quad \varepsilon_e = -\frac{1}{2} h \frac{d^2z}{dx^2}, \quad I = W \cdot \frac{1}{2} h.$$

Werken we met behulp hiervan vergelijking (6a) om, dan vinden we:

$$-d\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{1}{EI} dM + \frac{1}{EI} M \cdot d\varphi \dots \dots \dots (9)$$

De eerste term in het rechterlid stelt weer de elastische vormverandering voor, de tweede term de vormverandering tengevolge van kruip. Blijft het moment in alle doorsneden gedurende het beschouwde tijdvak constant, dan vervalt weer de eerste term in het rechterlid en vinden we door integratie:

$$-\int_{t=t_0}^{t=t_1} d\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{M}{EI} \int_{t=t_0}^{t=t_1} d\varphi \quad \text{of} \quad -\frac{d^2z}{dx^2} \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} = \frac{M}{EI} \cdot \varphi \Big|_{t=t_0}^{t=t_1}$$

of

$$-\left\{ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{t=t_1} - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{t=t_0} \right\} = \frac{M}{EI} \left\{ \varphi_{t=t_1} - \varphi_{t=t_0} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

We dienen nu nog de juiste beginvoorwaarde in te voeren. Stel dat het moment M is aangebracht als $t_0 = 0$, dan is $\varphi_{t=t_0} = \varphi_0 = 0$ (fig. 2), terwijl

de kromming $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ op dat ogenblik gelijk is aan de elastische kromming:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{t=t_0=0} = \frac{-M}{EI}.$$

Voeren we deze waarden in, dan vinden we

$$-\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{t=t_1} = \frac{M}{EI} (1 + \varphi_{t=t_1}) \dots \dots \dots (11)$$

De uiteindelijk te verwachten kromming ten tijde $t = t_1 \rightarrow \infty$ vinden we door in te vullen de te verwachten krimpmaat $m = \varphi_{t \rightarrow \infty}$:

$$-\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{t \rightarrow \infty} = \frac{M}{EI} (1 + m) \dots \dots \dots (12)$$

De krommingen en dus ook de doorbuigingen kan men ook in dit geval verkrijgen door het invoeren van een lagere waarde voor de elasticiteitsmodulus, c.q. buigingsstijfheid. (zie vgl. 2).

Verandert het moment echter in het beschouwde tijdvak dan moet men dus ook rekening houden met de eerste term in het rechterlid van vergelijking (9). Om deze vergelijking te kunnen oplossen is het dan nodig het verloop van M als functie van de tijd te kennen of nog een betrekking tussen de onbekenden z en M op te sporen, waardoor één van hen kan worden geëlimineerd en een vergelijking in één afhankelijk veranderlijke overblijft.

Alvorens deze laatste procedure toe te passen bij de excentrisch gedrukte staaf zal deze gang van zaken bij het reeds besproken reservoir nog worden toegelicht. Voor het reservoir van fig. 6 geldt, zoals bekend¹⁾ dezelfde differentiaalvergelijking als voor de elastisch ondersteunde ligger. De verticale strookjes worden door de ringspanningen n_φ elastisch ondersteund. Naar analogie van vergelijking (9) kunnen we dus ook hier schrijven:

$$K d\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right) + \frac{Eh}{R^2} d(z) = d(q) + q \cdot d\varphi \dots \dots \dots (13)$$

Voor de belasting q tengevolge van de voorspanning kunnen we schrijven:

$$q = \frac{f_{ij} \cdot \sigma_{ij}}{R} = \frac{f_{ij}}{R} \cdot E_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = \frac{f_{ij}}{R} \cdot E_{ij} \cdot \frac{z}{R} = \alpha \cdot z, \quad \text{als} \quad \alpha = \frac{E_{ij} \cdot f_{ij}}{R^2}.$$

Vergelijking (13) gaat dan over in (14) waarin uitsluitend z en φ voorkomen

$$K d\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right) + \frac{Eh}{R^2} d(z) = \alpha d(z) + \alpha z d\varphi \dots \dots \dots (14)$$

¹⁾ Men zie bekende leerboeken als:
TIMOSHENKO S. P., Theory of plates and shells, McGraw Hill, New York 1940.
GIRKMANN, K., Flächentragwerke. 3e Aufl. Springer, Wien 1954.
HARTOG, J. P. DEN, Advanced strength of materials. McGraw Hill, New York 1952.

Deze vergelijking laat zich eenvoudig, op analoge wijze als later wordt behandeld, oplossen, zodat op deze wijze de grootte van het spanningsverlies in de voorspanning kan worden nagegaan. De spanning blijkt volgens een negatieve e -macht tot een bepaalde limietwaarde af te nemen.

De excentrisch gedrukte staaf

Wanneer in een door een drukkracht P belaste staaf een initiale afwijking v_0 tussen staafas en druklijn aanwezig is, wordt deze initiale afwijking door de drukkracht P vergroot. Het doet er hierbij niet toe of de excentriciteit, dat is dus de initiale afwijking v_0 tussen druklijn en staafas, veroorzaakt wordt door een initiale uitbuiging van de staaf, dan wel door een zijdelingse belasting op de staaf, dan wel door een excentrisch aangrijpen van de drukkracht op de uiteinden van de staaf. Wanneer deze initiale uitbuigingslijn affien is met de uitbuigingslijn bij uitknikken en de zekerheid tegen knik onder een centrisc aangrijpend gedachte drukkracht P de waarde n bedraagt ($n = \frac{P_k}{P}$), wordt de initiale excentriciteit vergroot in de verhouding $\frac{n}{n-1}$. Ook wanneer de uitbuigingslijnen niet affien zijn, is toch deze vergrotingsfactor in het algemeen in verrassende mate voldoende nauwkeurig¹⁾.

Voor één bepaald geval zal een en ander nog kort worden uiteengezet. We kiezen hiertoe de aan twee zijden scharnierend opgelegde staaf met een initiale uitbuiging, welke sinusvormig verloopt (zie fig. 7):

$$v_0 = \hat{v}_0 \sin \frac{\pi x}{l_k} \dots \dots \dots (15)$$

Ondergaat de staaf door het aanbrengen van de drukkracht P nog een extra doorbuiging z dan is het buigende moment in een doorsnede x :

$$M_x = P(v_0 + z) \dots \dots \dots (16)$$

Anderzijds geldt voor de elastische lijn van de staaf de vergelijking:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} \dots \dots \dots (17)$$

Substitutie van M_x uit vergelijking (16) in de laatste vergelijking voert tot de differentiaalvergelijking voor de uitgebogen staaf:

$$EI \frac{d^2z}{dx^2} + Pz = -Pv_0 = -P\hat{v}_0 \sin \frac{\pi x}{l_k} \dots \dots \dots (18)$$

welke als oplossing heeft:

$$z = A \sin \frac{\pi x}{l_k}$$

Substitutie hiervan in vergelijking (18) geeft de waarde van de constante A .

¹⁾ Men zie b.v. Klopper, J., Leerboek der toegepaste mechanica II. Waltman, Delft 1951.

We vinden tenslotte:

$$z = \frac{P}{\frac{\pi^2 EI}{l_k^2} - P} \hat{v}_0 \sin \frac{\pi x}{l_k}$$

De eerste term in de noemer stelt juist de knikkracht P_k volgens Euler voor, zodat we ook kunnen schrijven:

$$z = \frac{P}{P_k - P} \hat{v}_0 \sin \frac{\pi x}{l_k} = \frac{1}{\frac{P_k}{P} - 1} v_0 = \frac{1}{n - 1} v_0 = \frac{1}{n - 1} \frac{M_0}{P} \dots (19)$$

De totale uitbuiging na aanbrengen van de drukkracht P bedraagt dus:

$$v_{\text{tot}} = v_0 + z = v_0 + \frac{1}{n - 1} v_0 = \frac{n}{n - 1} v_0 \dots (20)$$

In de formules (19) en (20) komt dus het niet-lineaire verband tussen vormverandering v , c.q. z en de drukkracht P tot uiting. In dit geval blijkt dit verband zeer eenvoudig.

Het totale moment bedraagt uiteindelijk:

$$M_{\text{tot}} = P \cdot v_{\text{tot}} = \frac{n}{n - 1} P v_0 = \frac{n}{n - 1} M_0 \dots (21)$$

Ook het initiaal aanwezige moment $M_0 = P \cdot v_0$ wordt dus vergroot in de verhouding $\frac{n}{n - 1}$.

Tenslotte willen we nog de doorbuiging z uitdrukken in het totale moment M_{tot} . Met behulp van vergelijkingen (19) en (21) vinden we:

$$z = \frac{1}{n - 1} \cdot v_0 = \frac{M_{\text{tot}}}{nP} = \frac{v_{\text{tot}}}{n} \dots (22)$$

Voor het nagaan van de invloed van de kruip op de momenten in een excentrisch gedrukte staaf onder een constante drukkracht P beschouwen we nogmaals een rechte of flauw gebogen staaf (zie fig. 7) waarvan de druklijn op zeker ogenblik op een afstand v_{tot} van de staafas ligt. Op elk moment geldt dus dat het optredend moment M_t evenredig is met deze afstand, nl. $M_t = P \cdot v_t \dots (23)$

Voor deze afstand v_t kunnen we schrijven:

$$v_t = v_0 + z \dots (24)$$

waarin v_0 de beginexcentriciteit en z nu de som van elastische deformatie en deformatie tengevolge van kruip voorstelt.

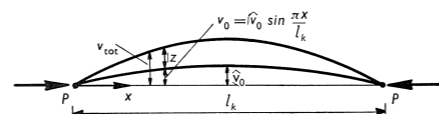


Fig. 7 Sinusvormig uitgebogen staaf.

We gaan weer uit van onze basisvergelijking:

$$d\varepsilon_t = \frac{1}{E_t} \cdot d\sigma + \frac{1}{E_0} \sigma \cdot d\varphi_t \dots (6b)$$

die de vormverandering in het tijdje dt voorstelt tengevolge van elastische vormverandering (1^e term rechter lid) en vormverandering tengevolge van kruip (2^e term rechter lid). In tegenstelling tot vergelijking (6a) is hier echter aangenomen dat de elasticiteitsmodulus $E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, die dus de vervorming bepaalt tengevolge van het aanbrengen van een spanning op het ogenblik t , met de tijd veranderlijk is, b.v. bij beton tengevolge van het verhardingsproces, waardoor in de noemer van de eerste term deze veranderlijke modulus verschijnt. Uit de beschouwing op bl. 82 en 83 is reeds gebleken waarom deze invloed tot de eerste term beperkt blijft.

Aan vergelijking (6b) ligt in zijn algemeenheid de wet van Hooke in de vorm $\varepsilon = \sigma/E$ ten grondslag. Bij omwerking voor de op buiging belaste ligger (9) bleek dat aldaar op volkomen analoge wijze van de differentiaalvergelijking van de gebogen ligger $-\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{EI} \cdot M$ kon worden uitgegaan. Het zal duidelijk zijn, dat bij het onderhavige probleem dus eveneens op analoge wijze van de basisvergelijking (22): $z = \frac{M_{\text{tot}}}{nP}$, die in dit geval het verband tussen vormverandering z en uitwendig moment M_{tot} uitdrukt, kan worden uitgegaan. We kunnen dus schrijven:

$$dz_t = \frac{1}{n_t P} dM_t + \frac{1}{n_0 P} M_t \cdot d\varphi_t \dots (25)$$

Het is duidelijk dat in de eerste term van het rechterlid de zekerheid n_t op het beschouwde ogenblik dient te worden aangehouden, in de tweede term daarentegen de zekerheid n_0 op het ogenblik van belasten. Uit de vergelijkingen (23) en (24) volgt:

$$dM_t = P \cdot dv_t = P \cdot dz_t \dots (26)$$

Substitutie in vergelijking (25) levert de vergelijking

$$dM_t = \frac{1}{n_t} \cdot dM_t + \frac{1}{n_0} M_t d\varphi_t,$$

welke na enige omwerking overgaat in:

$$dM_t = \frac{1}{n_0} \cdot \left(\frac{n_t}{n_t - 1} \right) M_t d\varphi_t \dots (27)$$

de vergelijking die het gehele probleem beheerst en de toename van het buigend moment M_t met de tijd uitdrukt.

Het is wellicht gewenst, alvorens dit resultaat nader uit te werken, het proces dat plaats vindt nog eens nader te analyseren om ook langs deze weg tot bovenvermelde vergelijking te geraken. Het kenmerkende van het gehele verschijnsel ligt in het feit dat bij constante ligging van de druklijn en bij constante waarde van de drukkracht een bepaalde doorbuiging tengevolge van kruip een grotere waarde van het buigende moment tengevolge heeft. Dit grotere moment heeft op zijn beurt weer een snellere kruip tengevolge; we komen op een kruipkromme behorende bij een groter moment. Dit proces nu werkt dus cumulatief en dat de momenten tenslotte een eindige limietwaarde benaderen is alleen te danken aan het feit dat de kruipkromme $\varphi(t)$, voor zover bekend, nadert tot een eindige waarde. Maar de uiteindelijke waarden van deze momenten kunnen onder ongunstige omstandigheden vele malen groter zijn dan de beginwaarden.

Op dezelfde wijze als in vergelijking (1) voor de vormverandering ε is geschied, kunnen we voor de doorbuiging z onder een constant moment M_t schrijven:

$$z = z_0 \{1 + \varphi(t)\} \dots \dots \dots (28)$$

Voor de aangroeiing van deze doorbuiging in het tijdje dt tengevolge van kruip vinden we dus op dezelfde wijze door differentieren:

$$dz_{kr} = z_0 \cdot d\varphi_t \dots \dots \dots (29)$$

Ook hier maken we weer gebruik van het feit (bl. 83) dat de hellingen van de raaklijnen aan verschillende kruipkrommen, op een zelfde tijdstip gelijk zijn aan die van de basiskromme, waarbij de belasting, die op dat ogenblik voor de verschillende kruipkrommen gelijk is, voor de basiskromme van de aanvang af gold (zie fig. 3 en fig. 8). Voor z_0 kunnen we dus met behulp van vergelijking (22) invullen:

$$z_0 = \frac{M_t}{n_0 \cdot P}$$

waarbij n_0 dus de zekerheid ten opzichte van knik bij het begin van de belasting voorstelt.

We hebben dus:

$$dz_{kr} = \frac{M_t}{n_0 \cdot P} \cdot d\varphi_t \dots \dots \dots (30)$$

Door deze toename van de doorbuiging tengevolge van kruip zal het moment M_t in hetzelfde ogenblik toenemen met een bedrag — vergelijk formule (23) en (24):

$$dM_t = P dz_{kr} \dots \dots \dots (31)$$

waarvoor we met behulp van vergelijking (30) ook kunnen schrijven:

$$dM_t = \frac{M_t}{n_0} \cdot d\varphi_t \dots \dots \dots (32)$$

Door deze toename van het moment ontstaat in hetzelfde tijdje dt nog een elastische doorbuiging — zie formule (19):

$$dz_{el} = \frac{1}{n_t - 1} \frac{dM_t}{P} \dots \dots \dots (33)$$

wat met behulp van vergelijking (32) wordt:

$$dz_{el} = \frac{1}{n_t - 1} \cdot \frac{M_t}{n_0 \cdot P} d\varphi_t \dots \dots \dots (34)$$

Het is duidelijk dat hier de knikzekerheid n_t op het beschouwde ogenblik dient te worden ingevoerd.

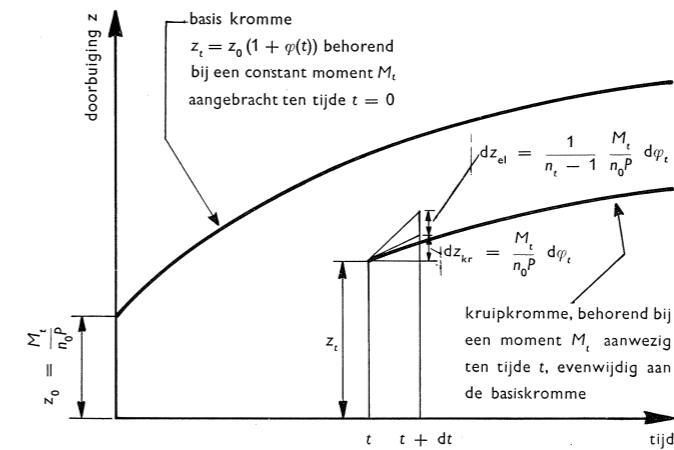


Fig. 8. De totale toename van de doorbuiging in het tijdje dt t.w.: $dz_t = dz_{kr} + dz_{el}$.

De totale toename van z in het tijdje dt bestaat dus uit twee gedeelten, een gedeelte tengevolge van de kruip (30) en een elastisch gedeelte (34) en laat zich als volgt schrijven:

$$dz_t = \frac{M_t}{n_0 \cdot P} \cdot d\varphi_t + \frac{1}{n_t - 1} \cdot \frac{M_t}{n_0 \cdot P} \cdot d\varphi_t \dots \dots \dots (35)$$

Fig. 8 laat nog eens zien dat de toename van z_t met de tijd niet geschiedt volgens de bij een moment M_t behorende kruipkromme — vgl. (28), doch dat deze toename sneller geschiedt en dat achtereenvolgens verschillende z -krommen worden gekruist. Anderzijds weten we uit vergelijking (23) en (24) dat $dM_t = P \cdot dz_t$. Substitutie hiervan in vergelijking (35) leidt na enig omwerken tot de reeds langs andere weg afgeleide vergelijking (27).

Deze differentiaalvergelijking laat zich eenvoudig integreren en levert dan:

$$M_t = C \cdot e^{\int \frac{n_t}{n_0(n_t-1)} d\varphi} \dots \dots \dots (36)$$

De integratieconstante C is te bepalen uit de beginvoorwaarden. Wordt op het ogenblik $t = 0$ de belasting aangebracht, waarbij een initiale excentriciteit v_0 aanwezig is, c.q. een initiaalmoment M_0 optreedt, dan is voor $t = 0$ de integraal in de exponent van e gelijk aan 0. De integratieconstante wordt dus

$$C = M_{t=0} = \frac{n_0}{n_0 - 1} M_0 \dots \dots \dots (37)$$

De oplossing van (36) luidt dan dus:

$$M_t = \frac{n_0}{n_0 - 1} \cdot M_0 \cdot e^{\int_0^t \frac{n_t}{n_0(n_t-1)} d\varphi} \dots \dots \dots (38)$$

Deze vergelijking geeft dus het verloop van het buigend moment als functie van de tijd bij een willekeurig verloop van de kruipkromme $\varphi(t)$ en een willekeurig verloop van de knikzekerheid n_t , veroorzaakt door een toename van de elasticiteitsmodulus E_t als gevolg van b.v. het verhardingsproces bij beton.

Stellen we eerst eens dat de elasticiteitsmodulus E_t niet meer met de tijd toeneemt, zodat we kunnen stellen $n_t = n_0$. We vinden dan:

$$M_t = \frac{n_0}{n_0 - 1} \cdot M_0 \cdot e^{\frac{\varphi_t}{n_0 - 1}} = \gamma_{t_0} M_0 \dots \dots \dots (39)$$

Vergelijking met formule (21) doet zien dat het initiale moment M_0 , behalve met de ogenblikkelijke elastische vergrotingsfactor $\frac{n_0}{n_0 - 1}$, in de loop der tijd tengevolge van kruip nog vergroot wordt volgens de factor $e^{\frac{\varphi_t}{n_0 - 1}}$.

Deze vergrotingsfactor is dus onafhankelijk van het verloop van de kruipkromme $\varphi(t)$ doch uitsluitend afhankelijk van de waarde van de kruipmaat φ_t ten tijde van het beschouwde ogenblik t en van de knikzekerheid n_0 op het ogenblik van belastingen.

Men kan de kruip in dit geval dus niet in rekening brengen door een simpele verlaging van de elasticiteitsmodulus volgens vergelijking (2) of (3). In de loop van de tijd ziet men met de steeds toenemende vormveranderingen eigenlijk een vertraagde film van het knikverschijnsel zich afspelen, dat op den duur echter tot stilstand komt, als $\varphi(t)$ tot een eindige waarde nadert. Dat hierbij in vele gevallen het breukmoment in een doorsnede kan worden overschreden, is duidelijk. Het weerstandsmoment van de staaf dient dan ook zo groot te zijn dat ook bij het uiteindelijk te verwachten moment de zekerheid ten opzichte van het breukmoment nog voldoende is. Het is duidelijk dat

als de exponent van e groter wordt dan 1 de vergrotingsfactor zeer sterk toeneemt. Men zal dus in het algemeen de eis willen stellen dat de knikzekerheid n_0 ten tijde van het belastingen behoorlijk groter is dan de te verwachten kruipmaat $\varphi_{t \rightarrow \infty} = m$ dus $n_0 \gg m$. Maar ook dan kan de totale vergrotingsfactor γ_{t_0} nog aanzienlijk zijn, zoals onderstaande tabel¹⁾ laat zien.

TABEL 1. Waarde van de vergrotingsfactor γ_{t_0} .

Kruipmaat $m = \varphi_{t \rightarrow \infty}$	0	1	2	3	4	
$n_0 = 3$	1,50	2,47	4,08	6,72	11,08	
4	1,33	1,86	2,62	3,62	5,06	
5	1,25	1,61	2,16	2,65	3,40	
$E_t = E_0 = \text{constant}$	6	1,20	1,47	1,79	2,19	2,67
	7	1,17	1,38	1,63	1,93	2,28
	8	1,15	1,33	1,53	1,76	2,04
$n_t = n_0 = \text{constant}$	9	1,13	1,27	1,44	1,64	1,85
	10	1,11	1,24	1,39	1,55	1,73
	12	1,09	1,19	1,31	1,43	1,57
	24	1,04	1,09	1,14	1,19	1,24
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	

Bij een met de tijd toenemende knikzekerheid n_t is de integraal uit vergelijking (38) in het algemeen slechts langs numerieke weg te berekenen.

Wanneer echter voor de toename van de elasticiteitsmodulus met de tijd een verloop wordt aangenomen dat affien is met dat van de kruipkromme $\varphi(t)$, dus

$$E_t = E_0 (1 + \psi_t) = E_0 (1 + \delta \varphi_t) \dots \dots \dots (40)$$

hetgeen zeer plausibel is, zodat dus ook voor de knikzekerheid n_t de betrekking geldt

$$n_t = n_0 (1 + \delta \varphi_t) \dots \dots \dots (41)$$

dan is het mogelijk de integraal uit vergelijking (38) op te lossen, zoals eenvoudig is na te gaan, en wederom tot een besloten formule voor M_t te geraken, waarbij het verloop van de φ - respectievelijk ψ -kromme weer niet van belang blijkt te zijn, doch uitsluitend de uiteindelijke waarden φ_t en $\psi_t = \delta \varphi_t$ respectievelijk $\varphi_{t \rightarrow \infty} = m$ en $\psi_{t \rightarrow \infty} = \delta m$.

De volgende uitdrukking wordt dan gevonden:

$$M_t = \frac{n_0}{n_0 - 1} \cdot M_0 \cdot e^{\frac{\varphi_t}{n_0}} \left[1 + \frac{\ln(n_t - 1) - \ln(n_0 - 1)}{n_t - n_0} \right] = \gamma_{t_0} M_0 \dots \dots (42)$$

De waarden voor deze vergrotingsfactor γ_{t_0} zijn in de navolgende tabellen gegeven en wel voor het geval dat $E_t = 1,5 E_0$ ($n_t = 1,5 n_0$) en voor het geval dat $E_t = 2,0 E_0$ ($n_t = 2,0 n_0$).

¹⁾ Ontleend aan Dischinger l.c. 1939 p. 427.

TABEL 2. Waarde van de vergrotingsfactor γ_t .

Kruipmaat $m = \varphi_t \rightarrow \infty$	0	1	2	3	4
$n_0 = 3$	1,50	2,37	3,75	5,92	9,35
	4	1,33	1,83	2,50	3,42
	5	1,25	1,59	2,02	2,57
$E_t = 1,5 E_0$	6	1,20	1,46	1,77	2,14
	7	1,17	1,37	1,62	1,90
	8	1,15	1,31	1,51	1,74
$n_t = 1,5 n_0$	9	1,13	1,27	1,44	1,63
	10	1,11	1,24	1,38	1,53
	12	1,09	1,19	1,31	1,43
	24	1,04	1,09	1,14	1,19
	∞	1,00	1,00	1,00	1,00

TABEL 3. Waarde van de vergrotingsfactor γ_t .

Kruipmaat $m = \varphi_t \rightarrow \infty$	0	1	2	3	4
$n_0 = 3$	1,50	2,29	3,58	5,52	8,55
	4	1,33	1,81	2,45	3,59
	5	1,25	1,58	1,99	2,53
$E_t = 2,0 E_0$	6	1,20	1,45	1,75	2,11
	7	1,17	1,37	1,60	1,88
	8	1,15	1,31	1,51	1,72
$n_t = 2,0 n_0$	9	1,13	1,26	1,43	1,61
	10	1,11	1,23	1,38	1,53
	12	1,09	1,19	1,30	1,43
	24	1,04	1,09	1,14	1,19
	∞	1,00	1,00	1,00	1,00

Het blijkt, dat bij grotere knikzekerheden n_0 de waarden van deze vergrotingsfactoren slechts weinig kleiner zijn dan die uit tabel 1. De toename van de elasticiteitsmodulus met de tijd blijkt dus slechts een geringe invloed ten gunste, op de grootte van de vergrotingsfactoren uit te oefenen. De waarde van de kruipmaat φ_t c.q. m daarentegen is in hoge mate belangrijk.

Wordt de belasting niet op het tijdstip $t = 0$ aangebracht, doch op het tijdstip t_1 , nadat de kruip dus al enigermate is uitgewerkt, dan laten zich uit vergelijking (36) op volkomen analoge wijze de volgende formules afleiden:

Bij constante $n_t = n_0$:

$$M_t = \frac{n_0}{n_0 - 1} \cdot M_0 \cdot e^{\frac{\varphi_t - \varphi_{t_1}}{n_0 - 1}} \dots \dots \dots (43)$$

en bij met de tijd toenemende n_t :

$$M_t = \frac{n_{t_1}}{n_{t_1} - 1} \cdot M_0 \cdot e^{\frac{\varphi_t - \varphi_{t_1}}{n_0} \left[1 + \frac{\ln(n_t - 1) - \ln(n_{t_1} - 1)}{n_t - n_{t_1}} \right]} \dots \dots (44)$$

Voor de waarden van deze vergrotingsfactoren kan worden verwezen naar de tabellen van Dischinger (l.c. 1939, p. 428/429).

De hier aangegeven vergrotingsfactoren gelden, wegens de evenredigheid tussen het moment M_t en de excentriciteit v_t ook voor de excentriciteit ($v_t =$ de afstand dus tussen druklijn en staafas — zie vgl. (23).

Voor de doorbuigingen z zijn de vergrotingsfactoren dus nog groter daar hiervoor eerst van de totale excentriciteit v_t de beginexcentriciteit v_0 dient te worden afgetrokken (vgl. 24).

Uit het bovenstaande moge zijn gebleken welke grote invloed de kruip kan hebben op de momenten in excentrisch gedrukte staven in het bijzonder bij lage knikzekerheden. In het licht hiervan zijn de grote zekerheden die b.v. in de G.B.V. 1950 worden geeist volkomen begrijpelijk. Berekent men b.v. voor een vierkante kolom met hoogte l_k en zijde d met behulp van de formule

van Euler de knikspanning: $\sigma_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2 F}$ waarbij voor de elasticiteitsmodulus

een betrekkelijk lage waarde: $E = 240.000 \text{ kg/cm}^2$ wordt aangehouden, dan vindt men de in tabel 4 aangegeven waarden. De toelaatbare drukspanning verkrijgt men volgens de G.B.V. door de toelaatbare drukspanning voor centrisch belaste constructiedelen (zonder bouwcontrole: $\bar{\sigma} = 40 \text{ kg/cm}^2$) te delen door een knikfactor (artikel 32, sub c). We vinden dan de eveneens in tabel 4 aangegeven waarden. Uit het quotient van knikspanning en drukspanning volgt de zekerheid tegen knik.

TABEL 4.

l_k/d	$\sigma_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2 F}$	knikfactor ω	$\bar{\sigma} = \frac{40}{\omega} \text{ kg/cm}^2$	knikzekerheid $n = \frac{\sigma_k}{\bar{\sigma}}$
17	683 kg/cm^2	1,00	40 kg/cm^2	17
20	493 „	1,23	32,5 „	15
25	316 „	1,66	24,1 „	13
30	219 „	2,10	19,1 „	11
35	161 „	2,53	15,8 „	10
40	123 „	2,97	13,5 „	9

Ook bij centrisch belaste kolommen zullen er echter altijd afwijkingen tussen druklijn en staafas kunnen voorkomen. Deze knikzekerheden zijn dus zo hoog om de invloed van secundaire verschijnselen binnen de perken te houden. Zij stellen in het geheel niet de werkelijke zekerheid tegen bezwijken voor.

Wanneer in een door een drukkracht P belaste kolom een initiale excentriciteit v_0 voorkomt, waardoor een initiaal buigend moment $M_0 = P v_0$ optreedt, kunnen de extreme spanningen als volgt worden berekend:

$$\sigma_e = - \frac{P}{F} + \frac{M_0}{W} = - \frac{P}{F} + \frac{P \cdot v_0}{W} \dots \dots \dots (45)$$

Voor een vierkante kolom met zijde d wordt dit

$$\sigma_e = -\frac{P}{d^2} \left(1 \pm \frac{6v_0}{d}\right) = \sigma_{\text{gem}} \left(1 \pm 6 \frac{v_0}{d}\right) \dots \dots \dots (47)$$

Door het kruipen zal de buigingsterm vergroot worden met de factor γ . Uiteindelijk zullen de extreme spanningen dus bedragen:

$$\sigma_e = \sigma_{\text{gem}} \left(1 \pm \gamma \cdot 6 \frac{v_0}{d}\right) \dots \dots \dots (48)$$

Laten we in de kolom een gemiddelde spanning σ_{gem} toe volgens tabel 4, dan kennen we dus de daarbij behorende knikzekerheid n_0 . Voor een bepaalde te verwachten kruipmaat kennen we dan ook de waarde van γ . De waarde van γ ontleen we in dit geval aan tabel 1.

Voor twee gevallen t.w. één kolom met een verhouding $l_k/d = 40$ en één met een verhouding $l_k/d = 20$ willen we de uiteindelijk te verwachten extreme spanningen voor verschillende initiale excentriciteiten v_0 eens bepalen en wel voor een te verwachten kruipmaat $m = 0$, $m = 2$ en $m = 4$ ($m = \varphi_{t \rightarrow \infty}$). De resultaten zijn verzameld in tabel 5.

Hierbij kan nog worden opgemerkt dat bij kolommen van gewapend beton, het geruime tijd kan duren alvorens zij hun belasting geheel krijgen te dragen, zodat voordien reeds een niet onbelangrijk deel van de kruip kan zijn uitgewerkt. Ook zal bij kolommen van gewapend beton de langswapening de overblijvende kruip tegenwerken. Het lijkt derhalve niet redelijk in dit geval al te hoge waarden voor de kruipmaat m aan te houden.

Vergelijking van de overeenkomstige kolommen laat hier dus duidelijk de invloed van de kruip op de extreme spanningen zien. Men zal ook hier als eis willen stellen, dat de drukspanning de toelaatbare drukspanning van op buiging belaste constructiedelen niet overschrijdt, zonder bouwcontrole dus: $|\sigma_d| < 60 \text{ kg/cm}^2$. Anderzijds mogen de buigtrekspanningen niet te hoog oplopen omdat, als de doorsnede scheurt, het traagheidsmoment sterk afneemt en daarmee de knikzekerheid.

Aan de hand van bovenstaande gegevens kan men dus concluderen welke initiale uitbuigingen uiteindelijk tot te grote spanningen aanleiding geven. Acht men het evenwel mogelijk, dat dergelijke vóóruitbuigingen in de praktijk zullen optreden, dan dient men de gemiddelde toelaatbare spanning σ_{gem} te verlagen. Uit nevenstaande tabel blijkt niet, dat de slanke kolom ($l_k/d = 40$) bij eenzelfde waarde van v_0/d in dit opzicht ongunstiger zou zijn dan de gedrongen kolom ($l_k/d = 20$). Uiteraard spelen bij een dergelijke vergelijking ook andere factoren als de aanwezigheid van grindnesten, de waarschuwing tegen breuk e.d. een rol.

Een extreme spanning $\sigma_e = -60 \text{ kg/cm}^2$ houdt uiteraard niet in dat er een 2,5-voudige zekerheid in de belasting bestaat ten opzichte van een extreme spanning $\sigma_e = -150 \text{ kg/cm}^2$. Dit blijkt uit het volgende. Omgekeerd kan men namelijk, als men een bepaalde extreme drukspanning σ_e

TABEL 5. Extreme spanningen σ_{bi} (binnenzijde = holle zijde) en σ_{bu} (=buitenzijde = bolle zijde) in een vierkante kolom volgens formule (48) (drukspanningen negatief).

v_0/d	$l_k/d = 40 \quad \sigma_{\text{gem}} = -13,5 \text{ kg/cm}^2 \quad n_0 = 9 \quad E_0 = 240.000 \text{ kg/cm}^2$					
	$m = 0 \therefore \gamma = 1,13$		$m = 2 \therefore \gamma = 1,44$		$m = 4 \therefore \gamma = 1,85$	
	σ_{bi} in kg/cm^2	σ_{bu} in kg/cm^2	σ_{bi} in kg/cm^2	σ_{bu} in kg/cm^2	σ_{bi} in kg/cm^2	σ_{bu} in kg/cm^2
0,001	-13,6	-13,4	-13,6	-13,4	-13,6	-13,4
0,01	-14,4	-12,6	-14,7	-12,3	-15,0	-12,0
0,05	-18,1	-8,9	-19,3	-7,7	-21,0	-6,0
0,10	-22,7	-4,3	-25,2	-1,8	-28,5	+1,5
0,20	-31,8	+4,8	-36,8	+9,8	-43,5	+16,5
0,30	-41,0	+14,0	-48,5	+21,5	-58,5	+31,5
0,40	-50,1	+23,1	-60,2	+33,2	-73,4	+46,4

v_0/d	$l_k/d = 20 \quad \sigma_{\text{gem}} = -32,5 \text{ kg/cm}^2 \quad n_0 = 15 \quad E_0 = 240.000 \text{ kg/cm}^2$					
	$m = 0 \therefore \gamma = 1,08$		$m = 2 \therefore \gamma = 1,27$		$m = 4 \therefore \gamma = 1,49$	
	σ_{bi} in kg/cm^2	σ_{bu} in kg/cm^2	σ_{bi} in kg/cm^2	σ_{bu} in kg/cm^2	σ_{bi} in kg/cm^2	σ_{bu} in kg/cm^2
0,001	-32,7	-32,3	-32,7	-32,3	-32,8	-32,2
0,01	-34,6	-30,4	-35,0	-30,0	-35,4	-29,6
0,05	-43,0	-22,0	-44,9	-20,1	-47,0	-18,0
0,10	-53,6	-11,4	-57,3	-7,7	-61,6	-3,4
0,20	-74,6	+9,6	-82,0	+17,0	-90,6	+25,6
0,30	-95,7	+30,7	-107	+41,8	-120	+54,7
0,40	-117	+51,7	-132	+66,6	-149	+83,7

toelaatbaar acht, bepalen welke gemiddelde spanning $\sigma_{\text{gem}} = \frac{\sigma_k}{n}$ daar bij behoort, wederom door oplossing van vergelijking (48). Dit is dan een transcendente vergelijking die niet rechtstreeks is op te lossen. Met enig proberen komt men echter spoedig tot een resultaat met behulp van de in de tabellen gegeven waarden van γ , in dit geval tabel 1.

In tabel 6 zijn voor verschillende waarden van v_0/d en voor de waarden $m = 0$, $m = 2$ en $m = 4$ zowel voor de slanke kolom ($l_k/d = 40$) als voor de gedrongen kolom ($l_k/d = 20$) de waarden van de aan te houden knikzekerheid n en de daarbij behorende gemiddelde spanning σ_{gem} weergegeven. Dit is gedaan zowel voor het geval in de extreme vezel uiteindelijk de toelaatbare spanning $\sigma_e = -60 \text{ kg/cm}^2$ wordt bereikt, als voor het geval in deze vezel een spanning $\sigma_e = -150 \text{ kg/cm}^2$ wordt bereikt.

Uit de in tabel 4 gegeven waarden voor σ_{gem} blijkt hier in tabel 6 dus weer,

TABEL 6 Aan te houden knikzekerheid n en gemiddelde spanning σ_{gem}
 $\sigma_e = -60 \text{ kg/cm}^2$ resp.

		$l_k/d = 40$						$\sigma_k = -123 \text{ kg/cm}^2$						$E_0 = 240.000 \text{ kg/cm}^2$						
		$\sigma_e = -60 \text{ kg/cm}^2$						$\sigma_e = -150 \text{ kg/cm}^2$												
		$m = 0$		$m = 2$		$m = 4$		$m = 0$		$m = 2$		$m = 4$		$m = 0$		$m = 2$		$m = 4$		
v_0/d	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²
0,001	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—
0,01	<3	—	<3	—	3,2	-38,4	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—
0,05	3,0	-41,0	3,8	-32,4	4,6	-26,7	<3	—	<3	—	<3	—	3,2	-38,4	<3	—	<3	—	<3	—
0,10	3,7	-33,2	4,8	-25,6	5,7	-21,6	<3	—	<3	—	<3	—	3,8	-32,4	<3	—	<3	—	<3	—
0,20	5,1	-24,1	6,3	-19,5	7,4	-16,6	<3	—	<3	—	3,7	-33,2	4,7	-26,2	<3	—	<3	—	<3	—
0,30	6,4	-19,2	7,8	-15,8	8,9	-13,8	3,0	-41,0	4,4	-28,0	5,4	-22,8	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—
0,40	7,7	-16,0	9,1	-13,5	10,3	-11,9	3,6	-34,2	5,0	-24,6	6,0	-20,5	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—

welke initiale excentriciteiten nog toelaatbaar zijn. Bovendien blijkt hier wanneer in een extreme vezel uiteindelijk een spanning $\sigma_e = -60 \text{ kg/cm}^2$ zal optreden bij een bepaalde belasting, welke zekerheid ten opzichte van deze belasting aanwezig is alvorens in de extreme vezel een spanning zal optreden, $\sigma_e = -150 \text{ kg/cm}^2$. B.v. voor de slanke kolom ($l_k/d = 40$) en bij $m = 2$ en $v_0/d = 0,40$ bedraagt $\sigma_{gem} = -13,5 \text{ kg/cm}^2$ bij een $\sigma_e = -60 \text{ kg/cm}^2$ en bedraagt $\sigma_{gem} = -24,6 \text{ kg/cm}^2$ bij een $\sigma_e = -150 \text{ kg/cm}^2$. Genoemde zekerheid bedraagt dus $24,6/13,5 = 1,82$. Bij de overeenkomstige waarden van m en v_0/d bedraagt bij de gedrongen kolom ($l_k/d = 20$) deze zekerheid $36,5/16,4 = 2,23$.

In tabel 6 zijn de extreme drukspanningen als maatgevend beschouwd.

Er dient nog op gewezen te worden, dat bij hogere spanningen plastische vormveranderingen kunnen optreden, die een verlaging van de waarde van E_0 en daarmee van n_0 en dus een extra vergroting van de factoren γ ten gevolge kunnen hebben.

Men kan natuurlijk ook de extreme trekspanningen als maatgevend beschouwen. Het is duidelijk dat dan de invloed van de wapening zeer belangrijk is. Hier zal echter niet verder op worden ingegaan.

De voorgaande beschouwing over de invloed van de kruip op de spanningen had betrekking op een staaf die aan beide zijden scharnierend opgelegd was en door een in richting en grootte constante drukkracht P belast werd en waarvan de vóóruitbuigingslijn affien was met de uitbuigingslijn bij knik. Reeds is gezegd, dat indien deze lijnen niet affien zijn dit in het algemeen slechts een geringe invloed op de grootte van de elastische vergrotingsfactor

in een vierkante kolom, indien de extreme spanningen uiteindelijk de waarden -150 kg/cm^2 zullen bereiken.

		$l_k/d = 20$						$\sigma_k = -493 \text{ kg/cm}^2$						$E_0 = 240.000 \text{ kg/cm}^2$						
		$\sigma_e = -60 \text{ kg/cm}^2$						$\sigma_e = -150 \text{ kg/cm}^2$												
		$m = 0$		$m = 2$		$m = 4$		$m = 0$		$m = 2$		$m = 4$		$m = 0$		$m = 2$		$m = 4$		
v_0/d	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²	n	σ_{gem} kg/cm ²
0,001	8,25	-59,8	8,27	-59,6	8,30	-59,4	3,30	-149	3,36	-147	3,40	-145	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—
0,01	8,8	-56,0	8,9	-55,4	9,0	-54,8	3,6	-137	3,9	-126	4,2	-117	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—
0,05	10,9	-45,2	11,5	-42,9	12,0	-41,1	4,6	-107	5,3	-93,0	6,0	-82,2	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—
0,10	13,5	-36,5	14,5	-34,0	15,5	-31,8	5,7	-86,5	6,6	-74,7	7,6	-64,9	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—
0,20	18,7	-26,4	20,0	-24,7	21,0	-23,5	7,8	-63,2	9,0	-54,8	10,0	-49,3	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—
0,30	23,6	-20,9	25,0	-19,7	26,0	-19,0	9,8	-50,3	11,2	-44,0	12,5	-39,4	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—
0,40	28,5	-17,3	30,0	-16,4	31,0	-15,9	11,9	-41,4	13,5	-36,5	15,0	-32,9	<3	—	<3	—	<3	—	<3	—

$\frac{n}{n-1}$ heeft (bl. 89). Hetzelfde kan gezegd worden ten aanzien van de vergrotingsfactoren tengevolge van kruip.

Wanneer de staaf niet aan beide zijden scharnierend is opgelegd zal de kniklijn niet meer door een enkelvoudige sinuslijn kunnen worden voorgesteld, doch door een andere eigenfunctie. Is de vóóruitbuigingslijn echter weer affien met de kniklijn dan verandert er aan de gegeven afleiding niets en zijn de gevonden resultaten dus onverminderd geldig. Uiteraard verandert bij een zelfde belasting P in een dergelijk geval wel de knikzekerheid n . Is de staaf aan één zijde b.v. ingeklemd dan wordt deze zekerheid twee maal zo hoog.

Is in het meest algemene geval de vóóruitbuigingslijn ook niet affien met de kniklijn dan kan men trachten de eerste in een reeks van eigenfuncties te ontwikkelen. De invloed van de hogere termen op de elastische vergrotingsfactor en de vergrotingsfactor tengevolge van kruip, zal in het algemeen slechts gering zijn.

Bogen

Het gedrag van bogen ten opzichte van knik is tot in hoge mate te vergelijken met dat van gedrukte staven, zoals in het voorgaande is beschreven. In het volgende zullen we ons voornamelijk bepalen tot de op twee scharnieren opgelegde boog; de aan beide zijden ingeklemde boog zal een enkele maal worden gememoreerd.

Voor de berekening van de knikzekerheid van op twee scharnieren opgelegde bogen kan worden aangesloten bij de formule, die door Timoshenko [9] is afgeleid voor een cirkelvormige boog onder gelijkmatig verdeelde radiale belasting q (zie fig. 9). Hiervoor geldt voor de critieke belasting q_{crit} , waarbij knik zal optreden:

$$q_{crit} = \frac{EI}{R^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \dots (49)$$

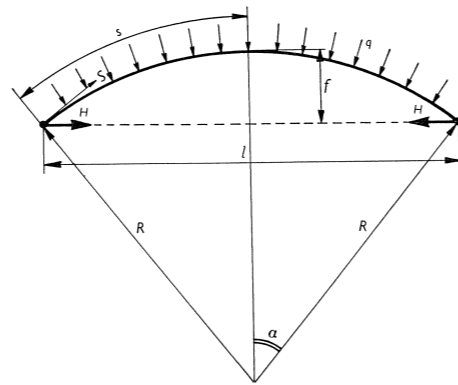


Fig. 9. Boog op twee scharnieren met radiale belasting.

Bij niet te grote waarden van α kan dit bij benadering gelijk gesteld worden aan:

$$q_{crit} = \frac{EI}{R^3} \cdot \frac{\pi^2}{\alpha^2} \dots (50)$$

Bij een verhouding van pijl/overspanning $= f/l = 1/8$ b.v., bedraagt de fout, veroorzaakt door de verwaarlozing van 1 ten opzichte van $\frac{\pi^2}{\alpha^2}$, slechts ongeveer 2,5 %.

De drukkracht in de boog bedraagt $S = q \cdot R$. We kunnen voor de critieke waarde (knikkracht) van deze kracht dus ook schrijven:

$$S_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{\alpha^2 R^2} = \frac{\pi^2 EI}{s^2} \dots (51)$$

Geringe wijzigingen in de vorm van de boog zullen slechts geringe invloed op de waarde van deze knikkracht uitoefenen. Zo zullen b.v. voor cirkel, kettinglijn en parabool, alle drie gaande door de beide scharnierpunten en door dezelfde top, de waarden van de knikkracht vrijwel dezelfde zijn.

We kunnen nu ook de radiale belasting q vervangen door een verticale belasting q en tenslotte de drukkracht S in de boog gelijk stellen aan zijn horizontale projectie H , de horizontale reactie in de scharnieren. We vinden dan:

$$H_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{s^2} \dots (52)$$

De formules (51) en (52) stellen de gewone formule van Euler voor een rechte, aan twee zijden scharnierend opgelegde, staaf voor, waarbij de kniklengte gelijk is aan de halve booglengte. De boog knikt asymmetrisch uit in twee halve golven, waarbij de top geen verticale verplaatsingen ondergaat,

doch zich slechts horizontaal verplaatst. Ondanks de aannamen en verwaarlozingen is formule (52) in het algemeen, bij niet te sterk gekromde bogen, meer dan voldoende nauwkeurig (bij een verhouding $f/l = 1/8$ b.v. tot op ca. 5 %).

Bij een parabolische boog met gelijkmatig verdeelde belasting q heeft zoals bekend, de horizontale reactie H de waarde

$$H = \frac{q l^2}{8 f} \dots (53)$$

Bij een verhouding $f/l = 1/8$ b.v. wordt dit

$$H = q \cdot l \dots (54)$$

Voor de critieke belasting q_{crit} vinden we dan ($s = 0,52 l$):

$$q_{crit} = 36,25 \frac{EI}{l^3} \dots (55)$$

Bij belasting met een constante, gelijkmatig verdeelde, belasting q_2 over de halve lengte is het vervormingsbeeld bij uitknikken hetzelfde als bij volbelasting. De horizontale reactie H bedraagt dan

$$H = \frac{1}{16} \frac{q_2 l^2}{f} = \frac{1/2 q_2 l^2}{8 f} \dots (56)$$

Voor dit belastingsgeval zijn geen knikformules bekend. Het lijkt echter plausibel hiervoor de formules (51) (52) (54) te gebruiken en daarbij de belasting q_2 over de halve lengte te vervangen door een aequivalente belasting $1/2 q_2$ over de gehele lengte. Is zowel een volbelasting q_1 als een eenzijdige belasting q_2 aanwezig dan rekenen we dus met een aequivalente belasting

$$q_{aeq} = q_1 + 1/2 q_2 \dots (57)$$

Ook voor de cirkelvormige ingeklemde boog onder radiale belasting is door Timoshenko een formule afgeleid, die op overeenkomstige wijze gemodificeerd kan worden. Het knikbeeld van de halve boog is gelijk aan dat van de aan één zijde ingeklemde, aan de andere zijde scharnierend opgelegde staaf.

Uit het vorenstaande blijkt de parallel, die getrokken kan worden tussen niet te sterk gekromde bogen en gedrukte staven. Bij het uitknikken in een asymmetrische knikvorm verandert de horizontale reactie H en de drukkracht in de boog niet van grootte; de ligging van de druklijn ten opzichte van de boogas blijft (dus) dezelfde. Aan de praemissen, gesteld bij de afleiding voor de excentrisch gedrukte staaf is dus ook hier voldaan.

Wanneer dus eventuele afwijkingen tussen druklijn en boogas op dezelfde wijze verlopen als de antimetrische knikfiguur kunnen de eerder genoemde vergrotingsfactoren van de momenten en de verplaatsingen ook hier optreden. In het algemeen zullen de afwijkingen niet affien zijn met de knikfiguur. Bij de staven is echter reeds gezegd dat deze afwijkingen al zeer belangrijk

moeten zijn, alvorens zij een enigermate belangrijke invloed op de grootte van de vergrotingsfactoren uitoefenen.

Geen enkele boog heeft onder alle omstandigheden de ideale vorm, waarbij druklijn en boogas geheel samenvallen. Afwijkingen „ v_0 ” tussen beide zullen dus voorkomen, waardoor buigende momenten in de boog worden geïntroduceerd ter grootte van $M_0 = H \cdot v_0$. Deze afwijkingen kunnen b.v. worden

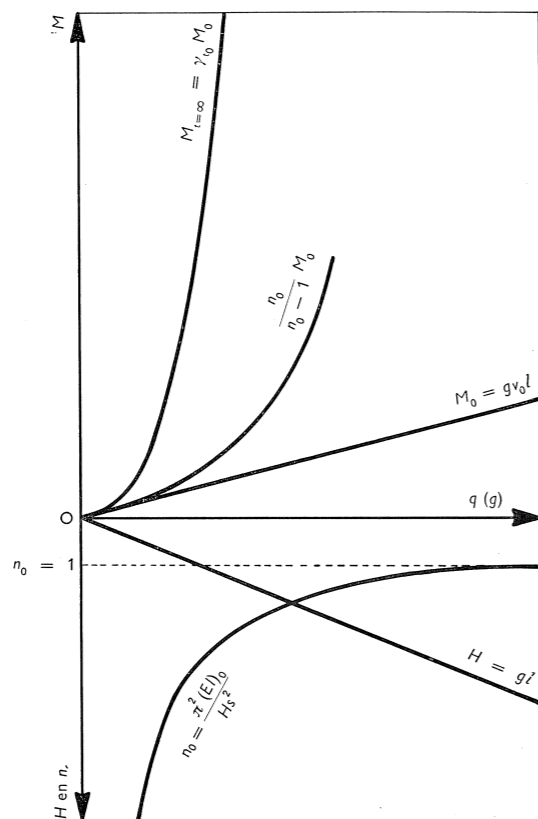


Fig. 10. Horizontale reactie H , knikzekerheid n_0 en buigende momenten M in een parabolische boog op twee scharnieren als functie van het eigen gewicht g (c.q. een volbelasting q). Initiale afwijking tussen boogas en druklijn is v_0 , verhouding pijl: overspanning $f/l = 1/8$.

veroorzaakt door een minder juiste maatvoering, dan wel door gedeeltelijke belastingen, veroorzaakt b.v. door sneeuw, wind, nuttige belasting of variatie in eigen gewicht, dan wel door temperatuursvariaties of krimpverschijnselen. Voorzover deze afwijkingen c.q. belastingen een geheel of gedeeltelijk blijvend karakter hebben, worden zij door de kruip beïnvloed.

De verschillende factoren zullen hier niet verder worden ontleed, slechts

zal nog even het geval van de parabolische boog op twee scharnieren onder een volbelasting q , c.q. een eigen gewicht g , waarbij een grootste initiale afwijking v_0 tussen boogas en druklijn voorkomt, worden behandeld aan de hand van fig. 10.

De horizontale reactie H verloopt lineair met de belasting c.q. het eigen gewicht g . Bij een verhouding pijl/overspanning $= f/l = 1/8$ bedraagt $H = gl$. De knikzekerheid n_0 ten tijde van het aanbrengen van de belasting (voor eigen gewicht is dit dus het ogenblik van ontlasten) verloopt dus als functie van de belasting als een orthogonale hyperbool. Het grootste initiale moment in de boog $M_0 = H v_0 = g \cdot v_0 \cdot l$ verloopt dus weer lineair met de belasting. Op het ogenblik van ontstaan ondergaat dit dus reeds een elastische vergroting

in de verhouding $\frac{n_0}{n_0 - 1}$. Hier komt dus het niet-lineaire karakter tussen ogen-

blikkelijk optredend moment en belasting tot uiting. In de loop van de tijd kan dit moment echter door kruip toenemen tot een uiteindelijke waarde $M_{t \rightarrow \infty} = \gamma_{t_0} M_0$, welke waarde eveneens schematisch in figuur 10 is aangegeven. De waarden van γ_{t_0} zijn te ontlezen aan tabel 1, 2 of 3. Het weerstandsmoment van de boog dient dus zo groot te zijn dat ook bij een uiteindelijk te verwachten moment $M_{t \rightarrow \infty}$ in de boog nog voldoende veiligheid ten opzichte van het breukmoment c.q. scheurmoment aanwezig is, ook indien hier nog eens een tijdelijk moment tengevolge van kortstondige belasting (sneeuw, temperatuur b.v.) bijkomt. Is hieraan niet voldaan dan kan men hieraan tegemoet komen door een hogere waarde van de knikzekerheid n_0 en een lagere waarde van de kruipmaat m in te voeren. Een hogere waarde van n_0 verkrijgt men door een grotere dikte en door een hogere waarde van de elasticiteitsmodulus E_0 . Dit laatste bereikt men door eerst op een later tijdstip de belasting aan te brengen, c.q. te ontlasten. Daardoor zal men tevens een deel van de kruip ontgaan, zodat met een lagere waarde van de kruipmaat kan worden volstaan. Ook in de samenstelling van het mengsel en in de omstandigheden waaronder de beton verhardt (vochtig houden) heeft men een middel om de kruipmaat lager te doen worden.

Relaxatie

Ofschoon over het relaxerend vermogen van beton weinig bekend is, mogen toch enkele opmerkingen hierover worden gemaakt. Relaxatie, dat is afname van de spanningen onder een constant blijvende vormverandering, zal veelal een gunstige invloed op de spanningsverdeling in een constructie kunnen hebben. Ondergaat b.v. van de ligger op drie steunpunten (zie fig. 5) het middelste steunpunt een zetting dan zullen hierdoor secundaire momenten worden geïntroduceerd, zoals aangegeven in fig 5. Door relaxatie zullen deze momenten in de loop der tijd weer afnemen. Indien relaxatie en kruip twee

aspecten zouden zijn van eenzelfde phenomeen, is het zelfs mogelijk een kwantitatieve indruk te verkrijgen over de afname van deze momenten in de loop der tijd.

We gaan daartoe weer uit van de basisvergelijking (6a):

$$d \varepsilon = \frac{1}{E_0} d \sigma + \frac{1}{E_0} \sigma d \varphi.$$

Wanneer de constructie een voorgeschreven vormverandering wordt opgelegd, welke daarna constant blijft, dan is in deze vergelijking het linkerlid gelijk nul. De resterende vergelijking laat zich eenvoudig integreren. Gevonden wordt:

$$\sigma_t = \sigma_0 \cdot e^{-(\varphi_t - \varphi_0)} \dots \dots \dots (58)$$

als σ_0 de spanning en φ_0 de kruipmaat zijn, welke aanwezig zijn op het ogenblik dat de gedwongen vormverandering wordt opgelegd. Heeft dit laatste plaats ten tijde $t = 0$ als $\varphi_0 = 0$, dan vinden we

$$\sigma_t = \sigma_0 \cdot e^{-\varphi_t} \dots \dots \dots (59)$$

Bij een grote te verwachten kruipmaat na het opleggen van de gedwongen vormverandering, kan de reductie in de erbij behorende spanningen dus aanzienlijk zijn. Het is mogelijk dat er uiteindelijk slechts een fractie (enkele procenten) van deze spanningen resteert, zodat de uiteindelijke momentenverdeling in de beschouwde ligger weer de volgens de elasticiteitstheorie berekende benadert. Een beton van niet te goede kwaliteit, dus met grotere kruip, zal dit eerder bewerkstelligen dan een goed beton met weinig kruip.

Uiteraard mogen de ogenblikkelijke vormveranderingen bij zetting niet tot te grote spanningen hebben geleid; ook hiervoor geldt dat een minder goed beton met lagere elasticiteitsmodulus deze beter kan opnemen dan een goed beton.

Een tweede voorbeeld wordt ontleend aan de behandelde boog op twee scharnieren. Wanneer b.v. door krimp de boogas korter wordt, doch de scharnieren op hun plaats blijven, zullen in de boog secundaire momenten worden geïntroduceerd die eenvoudig zijn te berekenen. Door relaxatie kunnen deze momenten echter weer afnemen. Hetzelfde geldt voor momenten die b.v. ontstaan wanneer de opleggingen door een of andere oorzaak uit elkaar wijken of naar elkaar toekomen en op dat ogenblik het materiaal nog relaxerend vermogen heeft. Werkt kruip dus bij bogen veelal ongunstig, de tegenhanger relaxatie heeft veelal een gunstige uitwerking.

LITERATUUR:

[1] Dischinger, F., Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Knicken des Betons bei Bogenbrücken. Der Bauingenieur, **18** (1937) p. 487—520, p. 539—552, p. 595—621.
 [2] Dischinger, F., Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken. Der Bauingenieur, **20** (1939) p. 53—63, p. 286—294, p. 426—437, p. 563—572.
 [3] Withney, C. S., Plain and reinforced concrete arches. Proceedings American Concrete Institute **28** (1932) p. 479—519.
 [4] Davis, R. E. and H. E. Davis, Flow of concrete under the action of sustained loads. Proceedings American Concrete Institute **27** (1931) p. 837—901.
 [5] Glanville, W. H., Report of the Building Research Board, 1929 p. 48—60 en 1930 p. 47—52.
 [6] Glanville, W. H., Building Research, Technical Paper no. 21.
 [7] Gehler, W. en H. Amos, Versuche über Elastizität, Plastizität und Schwinden von Beton. Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, Heft 78.
 [8] Richart, F. E., The effect of plastic flow in rigid frames of reinforced concrete. Proceedings American Concrete Institute **30** (1934) p. 181.
 [9] Timoshenko, S., Theory of elastic stability. Mc.Graw Hill, New York 1936.
 [10] Freudenthal, A. M., The inelastic behaviour of engineering materials and structures. Wiley, New York 1950.

SUMMARY

The basis of this article is the linear relation between stress and ultimate deformation due to creep of concrete as established experimentally. After a review of this relation the fundamental equation, which is a starting point for the article, is drawn up. After recalling to memory the influence of the creep at the laboratory test for the determination of the stress-strain diagram it is defined minutely in which constructions of a homogeneous, isotropic and elastic material creep will or will not influence the stress distribution. Then constructions of reinforced concrete and of prestressed concrete come up for discussion. An example of a prestressed construction is dealt with rather amply. The normal girder loaded to bending is discussed too. From the excentrically loaded strut first the buckling formulae for the elastic range are recalled to memory, after which the influence of the creep is examined. The derivation leads to formulae as already drawn up by Dischinger. As known the influence, consisting of an increase of the bending moments may be very important. An application to concrete columns is given. Considering arches the buckling formulae are given and the analogy to excentrically loaded struts is elucidated, after which the way of calculation to be applied is illustrated by a specimen. Relaxation may have a favourable influence on the stress distribution in some cases. This is demonstrated by a few examples.