

DE BEREKENING VAN DE SPANNINGSVERDELING IN CIRKELCILINDRISCHE SCHAALDAKEN VOLGENS DE D.K.J.-METHODE MET BEHULP VAN EEN REKENSHEMA

In dit artikel wordt, uitgaande van de zgn. D.K.J.-methode, welke een betrekkelijk eenvoudige en overzichtelijke berekeningswijze mogelijk maakt, een op praktisch gebruik gerichte berekeningsmethodiek gegeven. Hiertoe zijn enige rekenschema's opgesteld, nl. één voor symmetrische tonschalen en één voor shedschalen. Aan de schema's gaat een behandeling van de theoretische grondslagen vooraf.

I

INLEIDING

De analytische berekeningsmethoden van schaaldaken zijn vrij moeilijk toegankelijk en in ons land over het algemeen nog te weinig bekend. De behoefte deed zich dan ook gevoelen naar een behandeling van een analytische berekeningsmethode van cirkelcilindrische schalen, welke in het bijzonder zou zijn gericht op het praktische gebruik. Getracht is hieraan tegemoet te komen door het opstellen van enige rekenschema's, nl. één voor symmetrische tonschalen en één voor shedschalen.

Als uitgangspunt voor deze rekenschema's is gekozen de zgn. D.K.J.-methode. Dit is een methode, die uitgaat van een differentiaalvergelijking van de achtste orde, die oorspronkelijk is afgeleid door DONNELL in 1933 [12] voor de bepaling van de stabiliteit van cilinders bij wringing. VON KARMAN c.s. [13] breidde de vergelijking uit voor het niet-lineaire gebied voor het bestuderen van plooiverschijnselen. JENKINS [3] was de eerste om de vergelijking toe te passen bij de gewone statische berekening van schaaldaken. Hij past

hierbij echter matrixrekening toe, wat niet essentieel is en een meer uitgebreide toepassing van de methode in de weg staat. De drie letters D-K-J vinden in deze drie namen hun verklaring.¹⁾

Het essentiële van deze methode is, dat onbelangrijke termen consequent worden geschraapt, waardoor men komt tot een overzichtelijke differentiaalvergelijking, in tegenstelling met de bekende vergelijkingen van FINSTERWALDER, DISCHINGER, AAS JAKOBSEN, LUNDGREN e.a. Ook de uitdrukkingen voor de spanningen, momenten en verplaatsingen worden bij deze methode eenvoudiger en overzichtelijker dan bij de genoemde analytische methoden.

Dat de verwaarlozingen, welke bij de D.K.J.-methode worden toegepast, verantwoord zijn, bleek duidelijk in de gevallen dat de uitkomsten volgens deze methode zijn vergeleken met die volgens de strenge methode van AAS JAKOBSEN [7b], [7c], [7d]. Onder deze gevallen was een zeer gevoelig systeem, t.w. een vrij korte symmetrische schaal zonder randleden. Een goede overeenkomst bleek ook te bestaan tussen de uitkomsten van deze beide methoden en de resultaten van metingen aan een stalen model [7e], [8d].

De uitkomsten van berekeningen volgens de D.K.J.-methode kunnen dus als betrouwbaar worden beschouwd, uiteraard met de beperkingen, welke door de gebruikelijke aannamen in de elasticiteitstheorie worden opgelegd.

De D.K.J.-methode is zowel voor lange als voor korte schalen, als voor schalen in het zgn. overgangsgedebied toe te passen. Dit kan niet van alle analytische methoden worden gezegd. De methoden FINSTERWALDER en SCHORER b.v. hebben slechts beperkte geldigheid.

Dit grote gebied van toepassing van de D.K.J.-methode is ook een voordeel wanneer deze methode wordt vergeleken met elementaire benaderings- en berekeningsmethoden als b.v. de liggermethode, waarvan bekend is, dat deze slechts in een beperkt aantal gevallen redelijk betrouwbare uitkomsten geeft voor de langs- en schuifspanningen.

De berekening van een schaaldak volgens de D.K.J.-methode is goed uitvoerbaar als gebruik wordt gemaakt van een rekenschema in de trant als in dit artikel is gegeven. Een dergelijke berekening komt hiermee binnen het bereik van velen, temeer daar de hiervoor benodigde tijd redelijk geacht kan worden. De berekening van een symmetrische tonschaal op de hier gegeven wijze vergt, als men de beschikking heeft over een elektrische rekenmachine, ongeveer $2\frac{1}{2}$ dag, de berekening van een shedschaal ongeveer 4 dagen, ook als men geen ervaring heeft op dit gebied. Deze berekeningswijze wordt, met de methode „VAN DER EB” [9], bij het Instituut sinds enige jaren dan ook voornamelijk toegepast. Een rekenmachine is wel noodzakelijk; dit kan natuurlijk ook een handrekenmachine zijn.

De behandelde methode wil niet de pretentie hebben meer tijd te besparen dan de methoden, waarbij gebruik gemaakt kan worden van tabellen, waarin

¹⁾ Voor zover bekend is de benaming D.K.J.-methode geïntroduceerd door MacNamee [5].

van te voren reeds veel van het rekenwerk is verwerkt, met name het „Manual” nr. 31 van de A.S.C.E. [1] en de methode VAN DER EB [9]. Eerstgenoemde is voor shedschalen echter minder op zijn plaats, terwijl ook de interpolatie te grof is, wat een belangrijke invloed op de uitkomsten kan hebben.

De hier gegeven methode laat echter de constructeur grote vrijheid. Afwijkingen van de hier gegeven gevallen zullen slechts in de randvoorwaarden optreden. Op de verwerking van de randvoorwaarden is derhalve bij de schema's uitvoerig ingegaan. Een ieder zal het mogelijk blijken voor afwijkende gevallen overeenkomstige schema's op te stellen, veelal door in de gegeven schema's slechts kleine wijzigingen aan te brengen.

Aan de beide schema's gaan een aantal hoofdstukken vooraf, waarin de theoretische grondslagen worden behandeld, noodzakelijk om een inzicht te geven in de wijze waarop de schema's zijn samengesteld.

Allereerst wordt de afleiding gegeven van de differentiaalvergelijking, die dus het schalenprobleem beheerst (hoofdstuk II). Hierna volgt de oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking (hoofdstuk III).

Als particuliere oplossing wordt de membraanoplossing genomen (hoofdstuk IV). In een tabel worden voor verschillende belastingstypen de membraancomponenten voor de spanningen en verplaatsingen gegeven. Deze tabel verschaft de mogelijkheid alle praktisch voorkomende belastinggevallen in rekening te brengen. Vervolgens worden (hoofdstuk V) de uitdrukkingen voor de buigingscomponenten voor de spanningen, momenten en verplaatsingen afgeleid uit de oplossing voor de gereduceerde differentiaalvergelijking en in een tabel verzameld. Hierna volgt een algemeen gehouden bespreking van de mogelijke randvoorwaarden (hoofdstuk VI) en een bespreking van de werkwijze bij andere schaalsystemen dan die, waarbij de schalen op de uiteinden vrij zijn opgelegd (hoofdstuk VII). Daarna volgen dan nog enkele opmerkingen over de wederzijdse beïnvloeding van de storingsen, welke uitgaan van de langsranden van de schaal (hoofdstuk VIII).

Ten slotte volgen dan de beide rekenschema's voor een tonschaal (hoofdstuk IX) en voor een shedschaal (hoofdstuk X). Beide worden voorafgegaan door een toelichting, waarin in het bijzonder op de randvoorwaarden wordt ingegaan.

Notaties

<p>$A_{i,i}$ integratieconstante</p> <p>b index, die de buigingscomponent aanduidt</p> <p>c_i $\cos \frac{\beta y}{2 \sigma_i}$ ($i = 1, 2$)</p> <p>C_i $\cosh \beta y \sigma_i$ ($i = 1, 2$)</p> <p>E elasticiteitsmodulus</p> <p>g eigen gewicht van de schaal per eenheid van oppervlak</p> <p>H horizontaal ontbondene van R_y en N_y</p> <p>k_i $\beta y \sigma_i$ ($i = 1, 2$)</p> <p>K $^{1/12} E t^3$ (buigingsstijfheid)</p> <p>L lengte van de schaal (zie fig. 1)</p> <p>m index, die de membraancomponent aanduidt</p> <p>M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} momenten per eenheid van lengte als aangegeven in fig. 5</p> <p>N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} langs- en schuifkrachten per eenheid van lengte als aangegeven in fig. 4</p> <p>o index, die een randgrootheid aanduidt</p> <p>p (p_1, p_2) radiale belasting per eenheid van oppervlak</p> <p>P_1 $\sigma_1^3 - 2 \sigma_1 + \frac{1}{4 \sigma_1}$ (parameter)</p> <p>P_2 $\sigma_2^3 + 2 \sigma_2 + \frac{1}{4 \sigma_2}$ (parameter)</p> <p>q_{tot} verticale belasting van de schaal per eenheid van lengte</p> <p>Q_x, Q_y dwarskrachten per eenheid van lengte als aangegeven in fig. 5</p> <p>Q_1 $\frac{1}{2} \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{8 \sigma_1^3}$ (parameter)</p> <p>Q_2 $\frac{1}{2} \sigma_2 - \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{8 \sigma_2^3}$ (parameter)</p> <p>r index, die randliggergrootheid aanduidt.</p> <p>R straal van de cirkelcilinder gemeten tot het middenvlak</p> <p>R_y $Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$ (statisch equivalent van dwarskracht en wringend moment)</p> <p>s sneeuwbelasting</p> <p>s_i $\sin \frac{\beta y}{2 \sigma_i}$ ($i = 1, 2$)</p> <p>S_i $\sinh \beta y \sigma_i$ ($i = 1, 2$)</p>	<p>S_x $-\int_x^{\frac{1}{2}L} N_{xy} dx$</p> <p>$t$ dikte van de schaal</p> <p>u verplaatsing van de schaal in x-richting (zie fig. 2)</p> <p>v verplaatsing van de schaal in y-richting (zie fig. 2)</p> <p>V verticale ontbondene van N_y en R_y</p> <p>w verplaatsing van de schaal in z-richting (zie fig. 2)</p> <p>x, y, z coördinaten als aangegeven in fig. 1</p> <p>X, Y, Z belastingscomponenten als aangegeven in fig. 3</p> <p>α_n $\frac{(2n+1)\pi}{L}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)</p> <p>β bepaald door $4\beta^8 = \frac{12}{R^2 t^2} \alpha_n^4$</p> <p>$\gamma$ $\frac{\alpha_n^2}{\beta^2}$</p> <p>$\gamma_{xy}$ specifieke hoekverdraaiing in het middenvlak</p> <p>δ_h horizontale verplaatsing</p> <p>δ_v verticale verplaatsing</p> <p>Δ $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$</p> <p>$\varepsilon_x$ specifieke rek van het middenvlak in x-richting</p> <p>ε_y specifieke rek van het middenvlak in y-richting</p> <p>ν contractiecoëfficiënt van Poisson</p> <p>σ_i parameter</p> <p>σ_x, σ_y respectievelijk $\frac{N_x}{t}$ en $\frac{N_y}{t}$ (normaalspanningen)</p> <p>τ_{xy} $\frac{N_{xy}}{t}$ (schuifspanning)</p> <p>φ $\frac{y}{R}$ (zie fig. 1)</p> <p>φ_0 halve openingshoek als aangeduid in de figuren 1, 12, 13 en 16</p> <p>φ' hoek, die de verticaal maakt met de normaal in een willekeurig punt van de schaal (zie figuur 1 en 16)</p> <p>$\bar{\varphi}$ $\lambda \varphi + A$ (λ en A willekeurige constanten)</p> <p>χ $\frac{\partial w}{\partial y}$ (hoekverdraaiing)</p>
---	---

CIRKELCILINDRISCHE SCHAAL

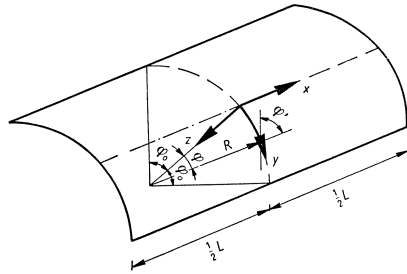


Fig 1. Coördinaten

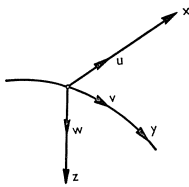


Fig. 2. Verplaatsingen u , v , en w

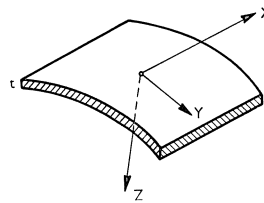


Fig. 3. Belastingscomponenten X , Y en Z

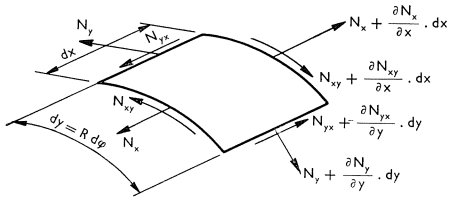


Fig. 4. Spanningskrachten in het vlak van de schaal

De spanningen t.g.v. hiervan bedragen:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} \quad \sigma_y = \frac{N_y}{t} \quad \tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{t}$$

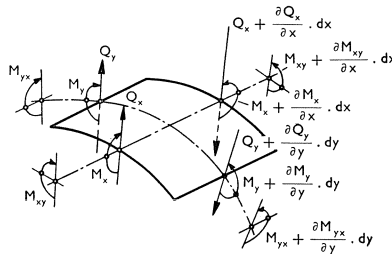


Fig. 5. Momenten en dwarskrachten

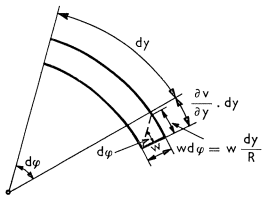


Fig. 6. Bepaling van ϵ_y

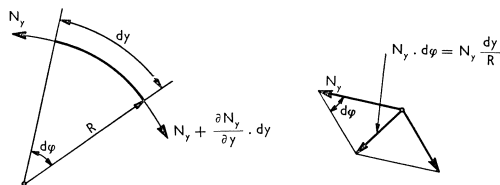


Fig. 7. Radiale component van N_y

II

AFLEIDING VAN DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING¹⁾

We baseren de afleiding op de gebruikelijke aannamen in de theorie van platen, die óf loodrecht op, óf in hun vlak worden belast.

Bij de afleiding verwaarlozen we de contractiecoëfficiënt terwille van de eenvoud en de overzichtelijkheid. De afleiding, waarbij de contractiecoëfficiënt wel in rekening wordt gebracht, verloopt volkomen analoog, zie b.v. [3], [7b] en [10].

De notaties voor de afmetingen van de schaal, het coördinatenstelsel, de verplaatsings- en de belastingscomponenten zijn aangegeven in fig. 1 t/m 3. De krachten in het vlak van de schaal (normaal- en schuifkrachten per eenheid van lengte) zijn in fig. 4 gegeven; de dwarskrachten en de buigende en wringende momenten per eenheid van lengte in fig. 5.

In het middenvlak kunnen de vormveranderingsgrootheden ε_x , ε_y en γ_{xy} als volgt in de verplaatsingsgrootheden worden uitgedrukt:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \dots \dots \dots (1a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \dots \dots \dots (1b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \dots \dots \dots (1c)$$

De vergelijkingen (1a) en (1c) zijn dezelfde als bij een vlakke spannings-toestand en behoeven geen toelichting. In vergelijking (1b) treedt een extra term op. Immers de vezel dy wordt niet alleen een bedrag $\frac{\partial v}{\partial y} dy$ langer, doch door de radiale verplaatsing w (positief naar binnen) ook een bedrag $w d\varphi = w \frac{dy}{R}$ korter (zie fig. 6). De rek in deze richting bedraagt dus:

$$\varepsilon_y = \left(\frac{\partial v}{\partial y} dy - w \frac{dy}{R} \right) \cdot \frac{1}{dy}$$

Wanneer we nu de spanningskrachten met behulp van de wet van Hooke uitdrukken in de vormveranderingsgrootheden en daarbij de contractie verwaarlozen ($\nu = 0$), dan vinden we de volgende betrekkingen tussen spanningskrachten en verplaatsingen:

¹⁾ Zie ook [1], [3], [4], [7a], [7b], [8a], [10].

$$N_x = E t \frac{\partial u}{\partial x} \dots \dots \dots (2a)$$

$$N_y = E t \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) \dots \dots \dots (2b)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{1}{2} E t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (2c)$$

Hierin is E de elasticiteitsmodulus en t de dikte van de schaal.

De buigende momenten bepalen we op dezelfde wijze als in de elementaire plaattheorie gebruikelijk is. Definiëren we de buigingsstijfheid $K = \frac{1}{12} E t^3$, dan is:

$$M_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots \dots \dots (3a)$$

$$M_y = -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots \dots \dots (3b)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots \dots \dots (3c)$$

Bij de opstelling der betrekkingen (2) zijn enige verwaarlozingen ingevoerd doordat we de vormveranderingsgrootheden in radiale richting constant hebben ondersteld. Bij een dunne schaal zijn deze verwaarlozingen zeer gering (t verwaarloosd ten opzichte van R .) Ook in de formules (3) zijn enige termen verwaarloosd, omdat zij van weinig betekenis waren. Voor een nadere specificatie zij echter naar de literatuur [3] verwezen, daar zij buiten het bestek van deze verhandeling valt.

We stellen nu de vergelijkingen op, die het probleem beheersen. In de eerste plaats de evenwichtsvergelijkingen in x -, y - en z -richting.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + X = 0 \dots \dots \dots (4a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y = 0 \dots \dots \dots (4b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{N_y}{R} + Z = 0 \dots \dots \dots (4c)$$

De vergelijkingen (4a) en (4b) zijn dezelfde als bij een vlakke spannings-toestand in platen of in de membraantheorie van de schalen. In (4c) is de derde term de radiale component van N_y (zie fig. 7), die dus eigenlijk een extra belasting van het elementje vormt. Opgemerkt zij dat evenzo in (4b) nog een tangentiële component van Q_y (dus $\frac{Q_y}{R}$) zou moeten voorkomen. Een nadere

beschouwing leert echter, dat deze term een grootte-orde kleiner is dan de overige en dus te verwaarlozen is.

De momentenvoorwaarden om X - en Y -as luiden:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \dots \dots \dots (5a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \dots \dots \dots (5b)$$

Uit deze vergelijkingen volgen met behulp van de formules (3a), (3b) en (3c) de ook uit de elementaire plaattheorie bekende uitdrukkingen:

$$Q_x = -K \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \dots \dots \dots (6a)$$

$$Q_y = -K \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \dots \dots \dots (6b)$$

Hierbij is ter bekorting de operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ingevoerd.

Substitutie van de formules (6a) en (6b) voor Q_x en Q_y in de evenwichtsvergelijking (4c) levert:

$$-K \Delta \Delta w + \frac{N_y}{R} + Z = 0 \dots \dots \dots (7a)$$

De afleiding van deze formule is volkomen analoog aan die van de plaatvergelijking. Vergelijking (7a) is dus ook direct op te schrijven wanneer men bedenkt, dat aan de belastingsterm Z een extra term $\frac{N_y}{R}$ dient te worden toegevoegd.

De momentenvoorwaarde om de z -as levert een identiteit.

Substitueren we nu de uitdrukkingen (2a), (2b) en (2c) in de vergelijkingen (4a), (4b) en (7a) dan verkrijgen we een stelsel van 3 simultane differentiaalvergelijkingen:

$$Et \left(+ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + X = 0 \dots \dots \dots (8a)$$

$$Et \left(+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Y = 0 \dots \dots (8b)$$

$$Et \left(+ \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R^2} \right) - K \Delta \Delta w + Z = 0 \dots \dots \dots (8c)$$

Deze vergelijkingen zijn een vereenvoudigde weergave van de zogenaamde differentiaalvergelijkingen van FLÜGGE [11] en zijn in deze vorm het eerst opgesteld door DONNELL [12] voor de bepaling van de stabiliteit van cilinders bij wringing.

Door eliminatie van b.v. u en v kunnen we nu een differentiaalvergelijking in w opstellen. De oplossing van deze differentiaalvergelijking bestaat uit de oplossing van de gereduceerde vergelijking en een particuliere integraal. We willen nu eerst deze gereduceerde vergelijking opstellen en oplossen. Het probleem van een particuliere integraal lossen we dan later afzonderlijk op.

De gereduceerde vergelijking kunnen we vinden door in (8a), (8b) en (8c) de belastingscomponenten weg te laten, dus $X = Y = Z = 0$ te stellen.

Differentieer nu (8a) éénmaal naar x en éénmaal naar y :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (8'a)$$

Uit (8b) volgt door tweemaal naar x te differentiëren en met 2 te vermenigvuldigen:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (8'b)$$

Wordt (8b) tweemaal naar y gedifferentieerd, dan is het resultaat:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad \dots \dots \dots (8''b)$$

Trekken we nu (8'b) en (8''b) af van (8'a) dan vinden we:

$$-\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \frac{2}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0$$

of: $\Delta \Delta v = \frac{1}{R} \left(2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \dots \dots \dots (9a)$

Uit (9a) volgt door differentiatie naar y :

$$\Delta \Delta \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \dots \dots \dots (9b)$$

Uit (8c) volgt, door hierop tweemaal de operator Δ toe te passen:

$$E t \left(+ \frac{1}{R} \Delta \Delta \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R^2} \Delta \Delta w \right) - K \Delta \Delta \Delta \Delta w = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

Substitueren we nu (9b) in (10) en bedenken we dat

$$2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \Delta \Delta w = - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4},$$

dan houden we als differentiaalvergelijking in w over:

$$\Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{12}{R^2 t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad \dots \dots \dots (11a)$$

of $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^4 w + \frac{12}{R^2 t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad \dots \dots \dots (11b)$

Met dwarscontractie en belastingstermen luidt de vergelijking:

$$KR\Delta\Delta\Delta w + \frac{Et}{R} (1 - \nu^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^3}{\partial x^3} X - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} X + \\ + (2 + \nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} Y + \frac{\partial^3}{\partial y^3} Y - R\Delta\Delta Z = 0 \quad \dots \quad (12)$$

De eerste term stelt de „plaatwerking” voor, de tweede de „schaalwerking”. Is de straal R oneindig groot (vlakke plaat) dan gaat de vergelijking weer over in de plaatvergelijking.

Een andere wijze van afleiden van bovenstaande differentiaalvergelijking, welke reeds eerder werd beschreven [8a], zij hier nogmaals in het kort herhaald. Hiertoe bepalen we de compatibiliteitsvoorwaarde in het vlak van de schaal. We differentiëren vergelijking (2a) tweemaal naar y :

$$Et \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_x$$

differentiëren vergelijking (2b) tweemaal naar x :

$$Et \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_y + \frac{Et}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w$$

en differentiëren vergelijking (2c) eenmaal naar x en eenmaal naar y :

$$Et \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{xy}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} N_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_y - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{xy} + \frac{Et}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w = 0 \quad \dots \quad (13a)$$

Voeren we nu een spanningsfunctie F in, waarvoor geldt:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

dan is, als we de belastingstermen X en Y weer buiten beschouwing laten, aan de evenwichtsvergelijkingen (4a) en (4b) identiek voldaan. Vergelijking (13a) gaat dan over in:

$$\Delta\Delta F + \frac{Et}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w = 0 \quad \dots \quad (13b)$$

een uitgebreide vorm van de vergelijking van Airy voor vlakke platen, welke in hun vlak worden belast.

Als tweede vergelijking gebruiken we hier de reeds afgeleide „uitgebreide plaatvergelijking” (7a). We laten hierin echter de belastingsterm Z buiten

beschouwing en drukken N_y uit in de spanningsfunctie F . We vinden dan:

$$-KR\Delta w + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F = 0 \dots\dots\dots (7b)$$

De beide vergelijkingen (7b) en (13b), waarin dus slechts de twee onbekenden F en w voorkomen, beheersen het schaalprobleem.

Bij vlakke platen zijn bij kleine doorbuigingen de vlakke spanningstoestand en de buigspanningstoestand onafhankelijk van elkaar op te lossen, waarna door superpositie het totale spanningsbeeld kan worden verkregen. Bij schalen is dit niet het geval en bij bovenstaande afleiding is duidelijk te zien op welke wijze beide spanningstoestanden zijn gekoppeld.

Uit beide vergelijkingen kan men hetzij de spanningsfunctie F , hetzij de doorbuiging w elimineren, hetgeen leidt tot een differentiaalvergelijking van de achtste orde hetzij in F , hetzij in w , welke laatste dus reeds langs andere weg werd verkregen (11). We zullen ons verder bedienen van deze vergelijking (11).

III

DE OPLOSSING VAN DE GEREDUCEERDE DIFFERENTIAALVERGELIJKING

Een oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking (11) is:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} A e^{ry} \cos \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (14)$$

In deze formule wordt w dus gegeven als een reeks van cosinusfuncties in x -richting. Ook de andere verplaatsingsgrootheden worden dan evenals de spanningsgrootheden in de x -richting door een reeks van cosinus- of sinusfuncties gegeven.

Uit vergelijking (9) volgt:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v(y) \cos \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (15a)$$

Uit vergelijking (8') volgt:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u(y) \sin \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (15b)$$

Uit de vergelijkingen (2) volgt:

$$N_x = \sum_{n=0}^{\infty} N_x(y) \cos \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (16a)$$

$$N_{xy} = \sum_{n=0}^{\infty} N_{xy}(y) \sin \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (16b)$$

$$N_y = \sum_{n=0}^{\infty} N_y(y) \cos \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (16c)$$

Uit de vergelijkingen (3) volgt:

$$M_x = \sum_{n=0}^{\infty} M_x(y) \cos \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (16d)$$

$$M_{xy} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{xy}(y) \sin \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (16e)$$

$$M_y = \sum_{n=0}^{\infty} M_y(y) \cos \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (16f)$$

We beschouwen nu een schaal, die aan de twee uiteinden $x = \pm \frac{1}{2} L$ vrij is opgelegd, met als voorwaarde aldaar:

$$w = 0 \quad \dots \dots \dots (17a)$$

Hieruit volgt dan, dat α_n gegeven wordt door de betrekking:

$$\alpha_n = \frac{(2n + 1) \pi}{L} \quad (n = 0, 1, 2 \dots)$$

Bij het opstellen van de vergelijkingen (15a) en (15b) zijn de integratieconstanten gelijk nul gesteld. Dit houdt in dat bij de opleggingen ook nog aan de volgende voorwaarden moet worden voldaan:

$$v = 0 \dots \dots \dots (17b)$$

$$N_x = 0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \right) \dots \dots \dots (17c)$$

Uit vergelijking (16d) volgt dan nog dat tevens voldaan moet zijn aan:

$$M_x = 0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \right) \dots \dots \dots (17d)$$

Uit de voorwaarden (17a) en (17b) volgt, dat de betrokken eindschotten, waar de schaal op rust, in hun vlak oneindig stijf worden verondersteld.

Uit de voorwaarden (17c) en (17d) volgt, dat deze zelfde eindschotten geen krachten en momenten loodrecht op hun vlak op de schaal mogen uitoefenen; in deze richting worden zij dus oneindig slap verondersteld.

Substitutie van de oplossing (14) in de differentiaalvergelijking (11) leidt tot de karakteristieke vergelijking:

$$(r^2 - \alpha_n^2)^4 + \frac{12}{R^2 t^2} \alpha_n^4 = 0$$

We introduceren nu de grootheid β , bepaald door de betrekking:

$$4 \beta^8 = \frac{12}{R^2 t^2} \alpha_n^4$$

De karakteristieke vergelijking gaat dan over in:

$$\left(\frac{r^2}{\beta^2} - \frac{\alpha_n^2}{\beta^2} \right)^4 + 4 = 0$$

Stellen we nu $\frac{r^2}{\beta^2} = \varrho^2$ en $\frac{\alpha_n^2}{\beta^2} = \gamma$, dan gaat deze vergelijking over in:

$$(\varrho^2 - \gamma)^4 + 4 = 0 \dots \dots \dots (18)$$

De acht wortels van deze vergelijking zijn:

$$\varrho_1 = \pm (\sigma_1 \pm i \tau_1) \quad \text{en} \quad \varrho_2 = \pm (\sigma_2 \pm i \tau_2),$$

waarin:

$$\sigma_1 = \left[\frac{\{1 + (1 + \gamma)^2\}^{1/2} + (1 + \gamma)}{2} \right]^{1/2}; \quad \tau_1 = \frac{1}{2 \sigma_1}$$

$$\sigma_2 = \left[\frac{\{1 + (1 - \gamma)^2\}^{1/2} + (1 - \gamma)}{2} \right]^{1/2}; \quad \tau_2 = \frac{1}{2 \sigma_2}$$

hetgeen na een eenvoudige afleiding blijkt.

Substitutie van deze acht wortels in de oplossing (14) leidt na omwerking tot de volgende uitdrukking voor w :

$$\begin{aligned}
 w = \sum_{n=0}^{\infty} & \left\{ e^{-\beta y \sigma_1} \left(A_{1,1} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_1} + A_{1,2} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_1} \right) + \right. \\
 & + e^{+\beta y \sigma_1} \left(A_{1,3} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_1} + A_{1,4} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_1} \right) + \\
 & + e^{-\beta y \sigma_2} \left(A_{2,1} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_2} + A_{2,2} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_2} \right) + \\
 & \left. + e^{+\beta y \sigma_2} \left(A_{2,3} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_2} + A_{2,4} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_2} \right) \right\} \cos \alpha_n x \quad \quad (19)
 \end{aligned}$$

IV

MEMBRAANOPLOSSING ¹⁾)

Onderstel dat een continu verdeelde belasting van het schaaloppervlak alleen naar de opleggingen ($x = \pm \frac{1}{2} L$) wordt overgebracht door de spanningskrachten in het vlak van de schaal, hetgeen nagenoeg het geval is. Er heerst dan een membraanspanningstoestand. Bij deze membraanspanningstoestand zullen echter aan de langsranden ($\varphi = \pm \varphi_0$) spanningen en verplaatsingen ontstaan welke in het algemeen niet in overeenstemming zijn met de daar geldende randvoorwaarden. Om nu aan deze laatste randvoorwaarden te voldoen, moeten aan de langsranden lijnbelastingen worden aangebracht. In tegenstelling tot de belasting van het schaaloppervlak leveren deze lijnbelastingen wel momenten en dwarskrachten in de schaal.

We bepalen dus eerst de spanningsverdeling door een belasting van het schaaloppervlak, uitgaande van de membraanspanningstoestand. Vervolgens bepalen we de spanningen en momenten tengevolge van de lijnbelastingen langs de langsranden en superponeren deze op de membraanspanningen. Elke spanningskracht bestaat dus uit twee afzonderlijk te bepalen delen, b.v.: $N_x = N_{x_m} + N_{x_b}$. Hierin stelt N_{x_m} de membraancomponent voor en N_{x_b} de zogenaamde buigingscomponent welke door de lijnbelastingen ontstaat. Ook de verplaatsingsgrootheden zijn zo uit een membraancomponent en een buigingscomponent samengesteld.

Het oplossen van het buigingsprobleem komt neer op het oplossen van de gereduceerde differentiaalvergelijking (11). Immers we verkregen deze vergelijking door de belastingscomponenten X , Y en Z in (8) weg te laten alvorens u en v te elimineren. De oplossing van deze gereduceerde differentiaalvergelijking levert dus de buigingscomponenten van de verschillende grootheden en hieraan worden de membraancomponenten toegevoegd als particuliere integraal.

Het is ook mogelijk met behulp van de vergelijking (12) een particuliere integraal te bepalen [3]. Deze is ingewikkelder van vorm dan de membraanoplossing. De membraanoplossing is in het algemeen echter met zeer goede benadering gelijk te stellen aan de particuliere integraal en kan ook door het invoeren van enkele kleine verwaarlozingen uit deze laatste worden afgeleid. Deze verwaarlozingen houden in, dat wordt afgezien van de buiging in de schaal tengevolge van de vorm van de belasting.

Bij de oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking is gebleken, dat de buigingscomponenten van de spannings- en verplaatsingsgrootheden in x -richting worden gegeven door een reeks van cosinus- of sinusfuncties.

¹⁾ Zie o.a. ook [1] en [4].

Het is dus noodzakelijk dat de lijnbelastingen langs de langsranden, welke deze buigingscomponenten veroorzaken eveneens gegeven zijn in de vorm van reeksen van cosinus- of sinusfuncties. Mocht dit niet het geval zijn, dan moeten zij hierin ontwikkeld worden. Hetzelfde geldt ten aanzien van de spanningen en verplaatsingen, welke tengevolge van de membraanspanningstoestand aan de langsranden ontstaan. Zijn de belastingscomponenten X , Y en Z gegeven in de vorm van cosinus- of sinusfuncties, dan is dit met de membraanspanningen en -verplaatsingen ook het geval. Zijn de belastingscomponenten niet in deze vorm gegeven, dan verdient het aanbeveling direct al deze belastingscomponenten in reeksen van cosinus- en sinusfuncties te ontwikkelen en wel aldus:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X(y) \sin \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (20a)$$

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y(y) \cos \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (20b)$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z(y) \cos \alpha_n x \quad \dots \dots \dots (20c)$$

De evenwichtsvergelijkingen van een elementje in de membraanspanningstoestand luiden:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad \dots \dots \dots (4'a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y = 0 \quad \dots \dots \dots (4'b)$$

$$\frac{N_y}{R} + Z = 0 \quad \dots \dots \dots (4'c)$$

Deze vergelijkingen zijn dezelfde als de evenwichtsvergelijkingen (4a), (4b) en (4c), met dien verstande, dat thans is afgezien van de buiging in de schaal, waardoor de termen met de dwarskrachten Q_x en Q_y in vergelijking (4c) kunnen vervallen.

Zijn de belastingscomponenten ontwikkeld in reeksen volgens vergelijking (20), dan volgt uit bovenstaande vergelijkingen, dat ook de membraanspanningskrachten N_x , N_{xy} en N_y reeksen zijn van de gedaante als reeds in vergelijking (16) is weergegeven.

Uit de vergelijkingen (2a), (2b) en (2c) volgt dan dat de verplaatsingsgrootheden u , v en w eveneens reeksen zijn van de gedaante als in de vergelijkingen (15) en (14) reeds is weergegeven. Zowel voor de spannings- als voor de verplaatsingsgrootheden zijn ook hier de integratieconstanten gelijk nul gesteld.

Voor een waarde $\alpha = \frac{(2n+1)\pi}{L}$ houdt dit in, dat ook in de membraanspanningstoestand voldaan is aan de randvoorwaarden (17) nabij de opleggingen van de schaal.

In de navolgende tabel I (zie p. 52 en 53) zijn voor verschillende belastingsgevallen de membraancomponenten gegeven. Deze belastingsgevallen zijn:

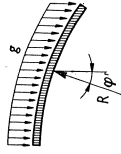
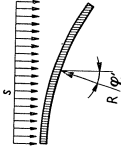
1. een constante verticale belasting per vierkante centimeter schaaloppervlak, b.v. het eigen gewicht van de schaal g ;
2. een constante verticale belasting per vierkante centimeter grondoppervlak, b.v. een sneeuwbelasting s .
3. een radiale belasting $p_1 \sin \bar{\varphi}$, waarin $\bar{\varphi} = \lambda \varphi + A$ (λ en A willekeurige constanten);
4. een constante radiale belasting p_2 .

Deze tabel verschaft de mogelijkheid alle praktisch voorkomende belastingsgevallen in rekening te brengen.

De in de tabel aangeduide hoek φ' is de hoek, die de normaal van het schaaloppervlak in een willekeurig punt maakt met de verticaal in dat punt.

Tabel I. Membrancomponenten bij verschillende belastingstypen (n^e term)

Groot- heid	Algemene formule	1 Verticale belasting b.v. eigen gewicht g	2 Verticale belasting b.v. sneeuwbelasting s
X	—	0	0
Y	—	$+ \frac{4g}{\pi} \sin \varphi' \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$	$+ \frac{2s}{\pi} \sin 2\varphi' \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$
Z	—	$+ \frac{4g}{\pi} \cos \varphi' \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$	$+ \frac{2s}{\pi} (1 + \cos 2\varphi') \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$
N_{ym}	$-RZ$ (4'c)	$- \frac{4gR}{\pi} \cos \varphi' \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$	$- \frac{2sR}{\pi} (1 + \cos 2\varphi') \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$
$N_{xy m}$	$- \int \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + Y \right) dx$ (4'b)	$- \frac{8g}{\pi} \sin \varphi' \frac{\sin \alpha_n x}{(2n+1)\alpha_n}$	$- \frac{6s}{\pi} \sin 2\varphi' \frac{\sin \alpha_n x}{(2n+1)\alpha_n}$
$S_{x m}$	$- \int_{\frac{1}{2}L}^L N_{xy} dx$ 2)	$+ \frac{8g}{\pi} \sin \varphi' \frac{\cos \alpha_n x}{(2n+1)\alpha_n^2}$	$+ \frac{6s}{\pi} \sin 2\varphi' \frac{\cos \alpha_n x}{(2n+1)\alpha_n^2}$
$N_{x m}$	$- \int \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X \right) dx$ (4'a)	$- \frac{8g}{\pi R} \cos \varphi' \frac{\cos \alpha_n x}{(2n+1)\alpha_n^2}$	$- \frac{12s}{\pi R} \cos 2\varphi' \frac{\cos \alpha_n x}{(2n+1)\alpha_n^2}$
u_m	$\frac{1}{Et} \int N_x dx$ (2a)	$- \frac{8g}{\pi Et R} \cos \varphi' \frac{\sin \alpha_n x}{(2n+1)\alpha_n^2}$	$- \frac{12s}{\pi Et R} \cos 2\varphi' \frac{\sin \alpha_n x}{(2n+1)\alpha_n^2}$
v_m	$\int \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2N_{xy}}{Et} \right) dx$ (2c)	$+ \frac{4g}{\pi Et} \sin \varphi' \left(\frac{2}{R^2 \alpha_n^2} + \frac{4}{\alpha_n^2} \right) \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$	$+ \frac{s}{\pi Et} \sin 2\varphi' \left(\frac{24}{R^2 \alpha_n^4} + \frac{12}{\alpha_n^2} \right) \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$
w_m	$R \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{N_y}{Et} \right)$ (2b)	$+ \frac{4g}{\pi Et} \cos \varphi' \left(\frac{2}{R^2 \alpha_n^4} + \frac{4}{\alpha_n^2} + R^2 \right) \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$	$+ \frac{2s}{\pi Et} \left\{ \cos 2\varphi' \left(\frac{R^2 \alpha_n^4}{24} + \frac{12}{\alpha_n^2} + R^2 \right) + R^2 \right\} \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$
χ_m	$\frac{\partial w}{\partial y}$	$- \frac{4g}{\pi Et R} \sin \varphi' \left(\frac{2}{R^2 \alpha_n^4} + \frac{4}{\alpha_n^2} + R^2 \right) \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$	$- \frac{4s}{\pi Et R} \sin 2\varphi' \left(\frac{24}{R^2 \alpha_n^4} + \frac{12}{\alpha_n^2} + R^2 \right) \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$



Grootheid	Algemene formule	3 Radiale belasting $p_1 \sin \bar{\varphi}$ $\bar{\varphi} = \lambda \varphi + A$ (λ en A willekeurig) ¹⁾	4 Radiale belasting p_2 ¹⁾
X	—	0	0
Y	—	0	0
Z	—	$+ \frac{4 p_1}{\pi} \sin \bar{\varphi} \frac{\cos \alpha_n x}{2 n + 1}$	$+ \frac{4 p_2}{\pi} \frac{\cos \alpha_n x}{2 n + 1}$
$N_{y m}$	$-RZ$ (4'c)	$- \frac{4 p_1 R}{\pi} \sin \bar{\varphi} \frac{\cos \alpha_n x}{2 n + 1}$	$- \frac{4 p_2 R}{\pi} \frac{\cos \alpha_n x}{2 n + 1}$
$N_{xy m}$	$- \int \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + Y \right) dx$ (4'b)	$+ \frac{4 p_1}{\lambda \pi} \cos \bar{\varphi} \frac{\sin \alpha_n x}{(2 n + 1) \alpha_n}$	0
$S_{x m}$	$- \int_{\frac{1}{2} L}^L N_{xy} dx$ ²⁾	$- \frac{4 p_1}{\lambda \pi} \cos \bar{\varphi} \frac{\cos \alpha_n x}{(2 n + 1) \alpha_n^2}$	0
$N_{x m}$	$- \int \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X \right) dx$ (4'a)	$- \frac{4 p_1}{\lambda^2 \pi R} \sin \bar{\varphi} \frac{\cos \alpha_n x}{(2 n + 1) \alpha_n^2}$	0
u_m	$\frac{1}{Et} \int N_x dx$ (2a)	$- \frac{4 p_1}{\lambda^2 \pi Et R} \sin \bar{\varphi} \frac{\sin \alpha_n x}{(2 n + 1) \alpha_n^2}$	0
v_m	$\int \left(- \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2 N_{xy}}{Et} \right) dx$ (2c)	$- \frac{4 \lambda p_1}{\pi Et} \cos \bar{\varphi} \left(\frac{1}{\lambda^4 R^2 \alpha_n^4} + \frac{2}{\lambda^2 \alpha_n^2} \right) \frac{\cos \alpha_n x}{2 n + 1}$	0
w_m	$R \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{N_y}{Et} \right)$ (2b)	$+ \frac{4 p_1}{\pi Et} \sin \bar{\varphi} \left(\frac{1}{\lambda^4 R^2 \alpha_n^4} + \frac{2}{\lambda^2 \alpha_n^2} + R^2 \right) \frac{\cos \alpha_n x}{2 n + 1}$	$+ \frac{4 p_2 R^2}{\pi Et} \frac{\cos \alpha_n x}{2 n + 1}$
χ_m	$\frac{\partial w}{\partial y}$	$+ \frac{4 p_1}{\lambda \pi Et R} \cos \bar{\varphi} \left(\frac{1}{\lambda^4 R^2 \alpha_n^4} + \frac{2}{\lambda^2 \alpha_n^2} + R^2 \right) \frac{\cos \alpha_n x}{2 n + 1}$	0

¹⁾ Opmerking: Met behulp van 3 en 4 kan elke in Fourierreeksen ontwikkelbare radiale belasting worden ingevoerd, b.v. een windbelasting = $p_1 \sin \bar{\varphi} + p_2$.

²⁾ Bij het opstellen der randvoorwaarden verdient $S_x = - \int_{\frac{1}{2} L}^L N_{xy} dx$ dikwijls de voorkeur boven N_{xy} (zie b.v. hoofdstuk VI en IX A).

BUIGINGSCOMPONENTEN

Reeds werd als oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking (11) de buigingscomponent van w (19) gevonden. De overige buigingscomponenten kunnen nu gevonden worden door de verschillende grootheden in w uit te drukken.

Bij het buigingsprobleem blijft de belasting van het schaaloppervlak buiten beschouwing, m.a.w. de belastingscomponenten X , Y en Z kunnen weggelaten worden. Uit (7a) volgt dan:

$$N_y = KR\Delta\Delta w \dots \dots \dots (21a)$$

Volgens (4b) is:

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial N_y}{\partial y}, \text{ dus:}$$

$$N_{xy} = -\int \frac{\partial N_y}{\partial y} dx = -KR \int \frac{\partial}{\partial y} \Delta\Delta w dx \dots \dots \dots (21b)$$

Daar we veronderstelden dat

$$N_{xy} = N_{yx} \text{ (zie 2c), is volgens (4a):}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}, \text{ dus:}$$

$$N_x = -\int \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dx = KR \iint \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta\Delta w dx^2 \dots \dots \dots (21c)$$

De momenten M_x , M_y en $M_{xy} = M_{yx}$ zijn reeds onder (3a), (3b) en (3c) in w uitgedrukt. Evenzo is dit met Q_x en Q_y onder (6) reeds geschied.

Zoals gebruikelijk is, vervangen we voor de randen $\varphi = \pm \varphi_0$ de momenten $M_{yx} = M_{xy}$ door dwarskrachten $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$ per eenheid van lengte en voegen deze bij Q_y . Immers over een lengte dx werkt een wringend moment $M_{yx}dx$. In het aangrenzende elementje dx werkt echter $M_{yx}dx + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$. Vervangen we beide momenten door koppels bestaande uit twee verticale krachtjes met arm dx dan is onmiddellijk in te zien dat ter plaatse van de begrenzing een verticaal krachtje $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$ overblijft. We verkrijgen zo de radiale kracht per eenheid van lengte aan de rand $\varphi = \pm \varphi_0$:

$$\begin{aligned}
R_y &= Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -K \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - K \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \\
&= -K \left(+ 2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) w \dots \dots \dots (21d)
\end{aligned}$$

Op overeenkomstige wijze kunnen ook bij Q_x en N_{xy} dergelijke termen (respectievelijk $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ en $-\frac{1}{R} M_{xy}$) worden gevoegd voor het bepalen van de resulterende dwarskracht en schuifspanningskracht in het vlak van de schaal langs de gebogen randen nabij de opleggingen van de schaal. Deze extra termen zijn in het algemeen echter van gering belang.

Uit (2a) volgt dat:

$$u = \frac{1}{Et} \int N_x dx = \frac{Rt^2}{12} \iiint \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta \Delta w dx^3 \dots \dots \dots (21e)$$

We kunnen nu b.v. uit (2c) vinden dat:

$$\begin{aligned}
v &= \int \left(+ \frac{2 N_{xy}}{Et} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx = - \frac{Rt^2}{12} 2 \iint \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Delta w dx^2 - \\
&- \frac{Rt^2}{12} \iiiii \frac{\partial^3}{\partial y^3} \Delta \Delta w dx^4 = - \frac{Rt^2}{12} \iiiii \left(+ 2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) \Delta \Delta w dx^4 \quad (21f)
\end{aligned}$$

Hierbij komt dus evenals bij (21d) de operator $\left(2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right)$ voor. De uitdrukking (21f) is ook direct uit (9) af te leiden.

We differentiëren hiertoe vergelijking (9a) viermaal naar x :

$$\Delta \Delta \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{1}{R} \left(2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^4} w.$$

Volgens de differentiaalvergelijking (11) is:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{-R^2 t^2}{12} \Delta \Delta \Delta w.$$

Substitutie hiervan in bovenstaande vergelijking leidt tot:

$$\begin{aligned}
\Delta \Delta \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} &= \frac{1}{R} \left(2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) \cdot \frac{-R^2 t^2}{12} \Delta \Delta \Delta w = \\
&= \frac{-1}{R} \cdot \frac{R^2 t^2}{12} \cdot \Delta \Delta \Delta \Delta \left(2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) w.
\end{aligned}$$

Dus
$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = - \frac{Rt^2}{12} \Delta \Delta \left(2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) w,$$

hetgeen dus bij integratie (21f) oplevert.

In dit verband kan ook nog opgemerkt worden dat de differentiaalvergelijking (11) voor alle spannings- en verplaatsingsgrootheden geldt. Uit de laatste vergelijking volgt b.v. door substitutie van vergelijking (9a):

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\frac{R^2 t^2}{12} \Delta \Delta \Delta v.$$

Tenslotte is nog de hoekverdraaiing:

$$\chi = \frac{\partial w}{\partial y} \dots \dots \dots (21g)$$

Uit oplossing (19) volgt door differentiatie naar y :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^k w}{\partial y^k} = \sum_{n=0}^{\infty} & \left\{ e^{-\beta y \sigma_1} \left(A_{1,1}^{(k)} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_1} + A_{1,2}^{(k)} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_1} \right) + \right. \\ & + e^{+\beta y \sigma_1} \left(A_{1,3}^{(k)} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_1} + A_{1,4}^{(k)} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_1} \right) + \\ & + e^{-\beta y \sigma_2} \left(A_{2,1}^{(k)} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_2} + A_{2,2}^{(k)} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_2} \right) + \\ & \left. + e^{+\beta y \sigma_2} \left(A_{2,3}^{(k)} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_2} + A_{2,4}^{(k)} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_2} \right) \right\} \cos \alpha_n x \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

waarin:

$$\begin{aligned} A_{j,1}^{(k)} &= -\beta \sigma_j A_{j,1}^{(k-1)} + \frac{\beta}{2 \sigma_j} A_{j,2}^{(k-1)} \\ A_{j,2}^{(k)} &= -\beta \sigma_j A_{j,2}^{(k-1)} - \frac{\beta}{2 \sigma_j} A_{j,1}^{(k-1)} \\ A_{j,3}^{(k)} &= +\beta \sigma_j A_{j,3}^{(k-1)} + \frac{\beta}{2 \sigma_j} A_{j,4}^{(k-1)} \\ A_{j,4}^{(k)} &= +\beta \sigma_j A_{j,4}^{(k-1)} - \frac{\beta}{2 \sigma_j} A_{j,3}^{(k-1)} \text{ met } j = 1, 2 \end{aligned}$$

Desgewenst kunnen in (22) de constanten $A_{j,1}^{(k)}$, $A_{j,2}^{(k)}$, enz. rechtstreeks worden uitgedrukt in de oorspronkelijke constanten $A_{j,1}$, $A_{j,2}$ enz., doch dit is uiteraard ook mogelijk door herhaalde toepassing van de in (22) gegeven betrekkingen (zie b.v. [7a]).

Het is aanbevelenswaardig behalve de invloed van de operator $\frac{\partial}{\partial y}$ ook de invloed van de operator $\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ op de constanten na te gaan:

$$\Delta \Delta w = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-\beta y \sigma_1} \left(\bar{A}_{1,1} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_1} + \bar{A}_{1,2} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_1} \right) + \right. \\ \left. + e^{+\beta y \sigma_1} \left(\bar{A}_{1,3} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_1} + \bar{A}_{1,4} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_1} \right) + \right. \\ \left. + e^{-\beta y \sigma_2} \left(\bar{A}_{2,1} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_2} + \bar{A}_{2,2} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_2} \right) + \right. \\ \left. + e^{+\beta y \sigma_2} \left(\bar{A}_{2,3} \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_2} + \bar{A}_{2,4} \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_2} \right) \right\} \cos \alpha_n x \quad \cdot \cdot \quad (23)$$

Hierin is:

$$\begin{array}{ll} \bar{A}_{1,1} = -2 \beta^4 A_{1,2} & \bar{A}_{2,1} = +2 \beta^4 A_{2,2} \\ \bar{A}_{1,2} = +2 \beta^4 A_{1,1} & \bar{A}_{2,2} = -2 \beta^4 A_{2,1} \\ \bar{A}_{1,3} = +2 \beta^4 A_{1,4} & \bar{A}_{2,3} = -2 \beta^4 A_{2,4} \\ \bar{A}_{1,4} = -2 \beta^4 A_{1,3} & \bar{A}_{2,4} = +2 \beta^4 A_{2,3} \end{array}$$

De uitdrukkingen voor $\bar{A}_{j,1}$ uit (23) zijn met behulp van de betrekkingen uit (22) te vinden, bedenkende dat:

$$\sigma_1^2 - \frac{1}{4 \sigma_1^2} = +1 + \gamma = +1 + \frac{\alpha_n^2}{\beta^2}$$

$$\text{en} \quad \sigma_2^2 - \frac{1}{4 \sigma_2^2} = -1 + \gamma = -1 + \frac{\alpha_n^2}{\beta^2},$$

zoals valt af te leiden uit de betrokken uitdrukkingen voor de wortels.

Door toepassing van (22) en (23) op de uitdrukkingen (21a) t/m (21g) is het nu mogelijk al deze grootheden in de constanten van w , dus $A_{1,1}$ t/m $A_{2,4}$ uit te drukken. Het resultaat is weergegeven in de tabel II. Hierbij is in het bijzonder profijt getrokken van de eenvoudige betrekkingen der constanten uit (23) en de relaties:

$$\left. \begin{array}{l} N_y = KR \Delta \Delta w; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = -KR \Delta \Delta \chi; \quad \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = -R \Delta \Delta M_y; \\ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{R}{Et} \Delta \Delta R_y \end{array} \right\} \quad (24a)$$

welke voor de betrekkingen (21a) t/m (21g) gelden.

Wordt voor de spanningen in het vlak van de schaal weer een spanningsfunctie F ingevoerd (zie blz. 44), dan luiden deze betrekkingen:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = KR \Delta \Delta w; \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = KR \Delta \Delta \chi; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -R \Delta \Delta M_y \\ \text{en} \quad \left(2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -R \Delta \Delta R_y \end{array} \right\} \quad (24b)$$

Zoals reeds in hoofdstuk III is aangetoond, zijn de integratieconstanten bij de in (21b), (21c), (21e) en (21f) uitgevoerde integraties naar x , alle gelijk nul indien de schaal aan de beide uiteinden $x = \pm \frac{1}{2} L$ vrij is opgelegd.

Hebben we te maken met een schaal, welke bovendien symmetrisch is ten opzichte van de x -as, dus een symmetrische tonschaal, dan is w een even functie van y , dus:

$$A_{1,1} = + A_{1,3}; \quad A_{1,2} = - A_{1,4}; \quad A_{2,1} = + A_{2,3}; \quad A_{2,2} = - A_{2,4} \quad \dots \quad (25)$$

$$w = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(+ A_{1,3} \cosh \beta y \sigma_1 \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_1} + A_{1,4} \sinh \beta y \sigma_1 \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_1} + \right. \\ \left. + A_{2,3} \cosh \beta y \sigma_2 \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_2} + A_{2,4} \sinh \beta y \sigma_2 \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_2} \right) \cos \alpha_n x \quad . \quad (26)$$

Tabel II. Buigingscomponenten — algemeen geval

Grootheid	Multiplicator	$c_1 e^{-k_1}$	$s_1 e^{-k_1}$	$c_1 e^{+k_1}$
w_b	$+ \cos \alpha_n x$	$+ A_{1,1}$	$+ A_{1,2}$	$+ A_{1,3}$
N_{y_b}	$+ 2 KR\beta^4 \cos \alpha_n x$	$- A_{1,2}$	$+ A_{1,1}$	$+ A_{1,4}$
N_{xy_b}	$-\frac{KR\beta^5}{\alpha_n} \sin \alpha_n x$	$\left. \begin{array}{l} + \frac{1}{\sigma_1} A_{1,1} + 2 \sigma_1 A_{1,2} \\ + \frac{1}{\sigma_1} A_{1,2} - 2 \sigma_1 A_{1,1} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} + \frac{1}{\sigma_1} A_{1,2} - 2 \sigma_1 A_{1,1} \\ + \frac{1}{\sigma_1} A_{1,1} - 2 \sigma_1 A_{1,2} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} - \frac{1}{\sigma_1} A_{1,3} + 2 \sigma_1 A_{1,4} \\ + \frac{1}{\sigma_1} A_{1,4} + 2 \sigma_1 A_{1,3} \end{array} \right\}$
S_{x_b}	$+\frac{KR\beta^5}{\alpha_n^2} \cos \alpha_n x$			
χ_b	$+ \frac{1}{2} \beta \cos \alpha_n x$	$+ \frac{1}{\sigma_1} A_{1,2} - 2 \sigma_1 A_{1,1}$	$-\frac{1}{\sigma_1} A_{1,1} - 2 \sigma_1 A_{1,2}$	$+ \frac{1}{\sigma_1} A_{1,4} + 2 \sigma_1 A_{1,3}$
N_{x_b}	$-\frac{2 KR\beta^6}{\alpha_n^2} \cos \alpha_n x$	$\left. \begin{array}{l} - (\gamma+1) A_{1,2} - A_{1,1} \\ - \frac{2 KR\beta^6}{\alpha_n^3 Et} \sin \alpha_n x \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} + (\gamma+1) A_{1,1} - A_{1,2} \\ + (\gamma+1) A_{1,1} - A_{1,2} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} + (\gamma+1) A_{1,4} - A_{1,3} \\ + (\gamma+1) A_{1,4} - A_{1,3} \end{array} \right\}$
u_b				
M_{y_b}	$- K\beta^2 \cos \alpha_n x$	$+ (\gamma+1) A_{1,1} - A_{1,2}$	$+ (\gamma+1) A_{1,2} + A_{1,1}$	$+ (\gamma+1) A_{1,3} + A_{1,4}$
R_{y_b}	$- K\beta^3 \cos \alpha_n x$	$+ P_1 A_{1,1} + Q_1 A_{1,2}$	$+ P_1 A_{1,2} - Q_1 A_{1,1}$	$- P_1 A_{1,3} + Q_1 A_{1,4}$
v_b	$-\frac{Rt^2\beta^7}{6 \alpha_n^3} \cos \alpha_n x$	$- P_1 A_{1,2} + Q_1 A_{1,1}$	$+ P_1 A_{1,1} + Q_1 A_{1,2}$	$- P_1 A_{1,4} - Q_1 A_{1,3}$

Buigingscomponenten bij een symmetrische tonschaal (de bovenstaande constanten

De even functies w, N_y, N_x, u en M_y	Multiplicator Zie boven	Vervalt	Vervalt	$2 C_1 c_1$
De oneven functies N_{xy}, S_x, χ, R_y en v	Multiplicator Zie boven	Vervalt	Vervalt	$2 S_1 c_1$

Hieruit volgen dan soortgelijke functies voor de overige grootheden, welke eveneens zijn weergegeven in dezelfde tabel II.

Gebruik werd gemaakt van de volgende afkortingen

$$k_i = \beta y \sigma_i, \quad c_i = \cos \frac{\beta y}{2 \sigma_i}, \quad s_i = \sin \frac{\beta y}{2 \sigma_i},$$

$$C_i = \cosh \beta y \sigma_i \quad \text{en} \quad S_i = \sinh \beta y \sigma_i \quad (i = 1, 2)$$

$$P_1 = + \sigma_1^3 - 2 \sigma_1 + \frac{1}{4 \sigma_1}; \quad P_2 = + \sigma_2^3 + 2 \sigma_2 + \frac{1}{4 \sigma_2};$$

$$Q_1 = + \frac{1}{2} \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{8 \sigma_1^3}; \quad Q_2 = + \frac{1}{2} \sigma_2 - \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{8 \sigma_2^3}.$$

$s_1 e^{+k_1}$	$c_2 e^{-k_2}$	$s_2 e^{-k_2}$	$c_2 e^{+k_2}$	$s_2 e^{+k_2}$
$+ A_{1,4}$	$+ A_{2,1}$	$+ A_{2,2}$	$+ A_{2,3}$	$+ A_{2,4}$
$- A_{1,3}$	$+ A_{2,2}$	$- A_{2,1}$	$- A_{2,4}$	$+ A_{2,3}$
$-\frac{1}{\sigma_1} A_{1,4} - 2 \sigma_1 A_{1,3}$	$-\frac{1}{\sigma_2} A_{2,1} - 2 \sigma_2 A_{2,2}$	$-\frac{1}{\sigma_2} A_{2,2} + 2 \sigma_2 A_{2,1}$	$+\frac{1}{\sigma_2} A_{2,3} - 2 \sigma_2 A_{2,4}$	$+\frac{1}{\sigma_2} A_{2,4} + 2 \sigma_2 A_{2,3}$
$-\frac{1}{\sigma_1} A_{1,3} + 2 \sigma_1 A_{1,4}$	$+\frac{1}{\sigma_2} A_{2,2} - 2 \sigma_2 A_{2,1}$	$-\frac{1}{\sigma_2} A_{2,1} - 2 \sigma_2 A_{2,2}$	$+\frac{1}{\sigma_2} A_{2,4} + 2 \sigma_2 A_{2,3}$	$-\frac{1}{\sigma_2} A_{2,3} + 2 \sigma_2 A_{2,4}$
$-(\gamma+1) A_{1,3} - A_{1,4}$	$+(\gamma-1) A_{2,2} + A_{2,1}$	$-(\gamma-1) A_{2,1} + A_{2,2}$	$-(\gamma-1) A_{2,4} + A_{2,3}$	$+(\gamma-1) A_{2,3} + A_{2,4}$
$+(\gamma+1) A_{1,4} - A_{1,3}$	$-(\gamma-1) A_{2,1} - A_{2,2}$	$-(\gamma-1) A_{2,2} + A_{2,1}$	$-(\gamma-1) A_{2,3} + A_{2,4}$	$-(\gamma-1) A_{2,4} - A_{2,3}$
$- P_1 A_{1,4} - Q_1 A_{1,3}$	$+ P_2 A_{2,1} + Q_2 A_{2,2}$	$+ P_2 A_{2,2} - Q_2 A_{2,1}$	$- P_2 A_{2,3} + Q_2 A_{2,4}$	$- P_2 A_{2,4} - Q_2 A_{2,3}$
$+ P_1 A_{1,3} - Q_1 A_{1,4}$	$- P_2 A_{2,2} + Q_2 A_{2,1}$	$+ P_2 A_{2,1} + Q_2 A_{2,2}$	$- P_2 A_{2,4} - Q_2 A_{2,3}$	$+ P_2 A_{2,3} - Q_2 A_{2,4}$

worden in dit geval gecombineerd met onderstaande grootheden)

$2 S_1 s_1$	Vervalt	Vervalt	$2 C_2 c_2$	$2 S_2 s_2$
$2 C_1 s_1$	Vervalt	Vervalt	$2 S_2 c_2$	$2 C_2 s_2$

VI

RANDVOORWAARDEN

Om de acht constanten $A_{1,1}$ t/m $A_{2,4}$ in de n^e term te bepalen, maken we gebruik van de acht randvoorwaarden welke we op kunnen stellen, vier voor elke rand $\varphi = \pm \varphi_0$. Uiteraard is het aantal mogelijkheden, dat zich hierbij voor kan doen, ongelimiteerd, doch wij willen ons bepalen tot enige belangrijke gevallen.

Duiden we de grootheden aan de rand $\varphi = \varphi_0$ aan met een index 0 , dan is het bij een geheel vrije rand zonder meer duidelijk, dat voldaan moet zijn aan (zie ook fig. 8a):

$$R_{y_0} = 0; \quad N_{y_0} = 0; \quad M_{y_0} = 0; \quad N_{xy_0} = 0 \quad \dots \quad (27)$$

Uiteraard zijn deze grootheden samengesteld uit een buigingscomponent en een membraancomponent.

De horizontale ontbondene van R_{y_0} en N_{y_0} noemen we H_0 , de verticale ontbondene V_0 (zie fig. 8b). Evenzo zij δ_{h_0} de horizontale ontbondene van v_0 en w_0 , δ_{v_0} de verticale ontbondene (zie fig. 8c).

Ter plaatse van de goot van een vlinderschaal of tussen twee binnenschalen (dus waar de randen samenkomen van twee schalen, welke elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. het verticale vlak door deze goot) moet, als er geen balk is, (zie fig. 9) worden voldaan aan:

$$V_0 = 0; \quad N_{xy_0} = 0; \quad \delta_{h_0} = 0; \quad \chi_0 = 0 \quad \dots \quad (28)$$

Fig. 8a. Krachten en momenten, werkend op een rand van de schaal

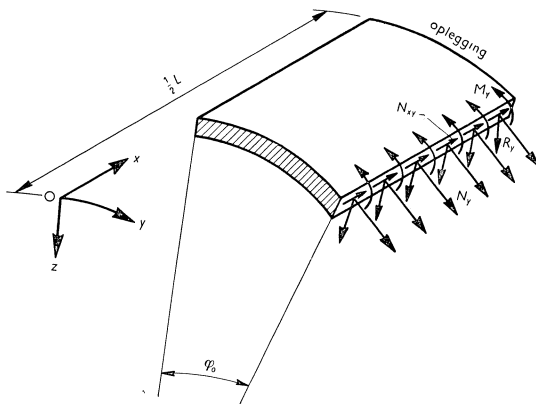


Fig. 8b. De radiale en tangentiale krachtcomponenten R_{y_0} en N_{y_0} en de hieruit afgeleide horizontale en verticale krachtcomponenten H_0 en V_0 , welke werken op de schaalrand

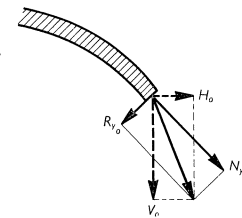
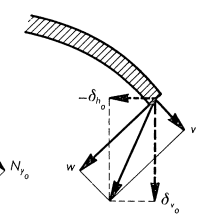


Fig. 8c. De radiale en tangentiale verplaatsingscomponenten w en v en de hieruit afgeleide horizontale en verticale verplaatsingscomponenten δ_{h_0} en δ_{v_0} van de schaalrand



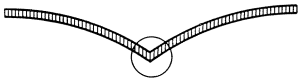


Fig. 9

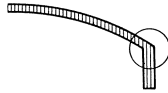


Fig. 10

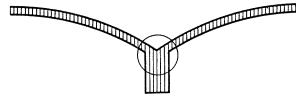


Fig. 11

In de meeste gevallen zal echter de schaalrand aansluiten op een balk. Deze randbalk wordt behalve door eigen gewicht, etc. belast door de schaalrandgrootheden: N_{y_0} , R_{y_0} (subsidiar H_0 en V_0), N_{xy_0} en M_{y_0} . Deze grootheden zijn dan uitgedrukt in de acht onbekende integratieconstanten $A_{1,1}$ t/m $A_{2,4}$. Het is nu mogelijk de verplaatsingen van de randbalk ten gevolge van de vermelde belasting te berekenen, d.w.z. deze uit te drukken in $A_{1,1}$ t/m $A_{2,4}$. De verplaatsingen van de balk ter plaatse van de aansluiting met de schaalrand moeten echter juist gelijk zijn aan de verplaatsingsgrootheden van de schaalrand. Duiden we de betrokken verplaatsingsgrootheden van de randbalk aan met een index r en gebruiken we verder notaties overeenkomstig met die, welke bij de schaalrand behoren, dan moet dus voldaan worden aan:

$$\delta_{h_0} = \delta_{h_r}; \quad \delta_{v_0} = \delta_{v_r}; \quad \chi_0 = \chi_r; \quad u_0 = u_r \quad (\text{bij } v = 0 \text{ ook } \sigma_{x_0} = \sigma_{x_r}) \quad (29)$$

Voor elk van de twee randen $\varphi = \pm\varphi_0$ vinden we zo vier aansluitingsvergelijkingen. Uit de acht verkregen vergelijkingen is het mogelijk de acht onbekende integratieconstanten op te lossen. Bij een symmetrische tonschaal worden de aantallen vergelijkingen en onbekenden tot vier gereduceerd, zie (25) en (26).

Dikwijls is het mogelijk door enige kleine verwaarlozingen de opstelling der aansluitingsvergelijkingen te vergemakkelijken. Willen we b.v. de schaalrand aansluiten op een verticale balk waarvan de dikte gering is ten opzichte van de hoogte (zie fig. 10), dan kunnen we dikwijls de horizontale buigingsstijfheid en torsiestijfheid verwaarlozen. De aansluitingsvergelijkingen gaan dan over in:

$$H_0 = 0; \quad \delta_{v_0} = \delta_{v_r}; \quad M_{y_0} = 0; \quad \sigma_{x_0} = \sigma_{x_r} \dots \dots \dots (30)$$

In het bijzonder is het gebruikelijk de vormveranderingen van de randbalk door dwarskracht te verwaarlozen.

Tenslotte geven we nog de voorwaarden voor de aansluiting ter plaatse van de goot van een binnenschaal of van een vlinderschaal met een randbalk (zie fig. 11):

$$\delta_{v_0} = \delta_{v_r}; \quad \delta_{h_0} = 0; \quad \sigma_{x_0} = \sigma_{x_r}; \quad \chi_0 = 0 \dots \dots \dots (31)$$

In de twee rekenvoorbeelden die volgen, zijn de aansluitingsproblemen (30) en (31) tot in de details uitgewerkt.

Voor het opstellen van de aansluitingsvergelijkingen is het noodzakelijk de randgrootheden uit te drukken in de integratieconstanten. Een tabellarisch overzicht hiervan is gegeven in de rekenschema's.

VII SCHAALSYSTEMEN

Is q_{tot} de gelijkmatig verdeelde verticale belasting per strekkende lengte-eenheid van de schaal, dan is bij een aan twee zijden vrij opgelegde schaal het statisch moment in de middendoorsnede van de schaal $0,125 q_{\text{tot}} L^2$. Wordt evenwel q_{tot} in een cosinusreeks ontwikkeld: $\frac{4}{\pi} q_{\text{tot}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$ en nemen we slechts de eerste term van deze reeks, dus $\frac{4}{\pi} q_{\text{tot}} \cos \alpha_0 x$, dan is het statisch moment in de middendoorsnede $0,127 q_{\text{tot}} L^2$. Hieruit blijkt wel, dat de hogere termen voor de berekening van de normaalspanningen σ_x van weinig belang zijn. Dikwijls wordt dan ook met de berekening van de eerste harmonische ($n=0$) volstaan. De normaalspanning σ_y is namelijk een lage drukspanning en het dwarsmoment M_y vertoont o.a. door temperatuursverschillen variaties, ten opzichte waarvan de correcties door hogere harmonischen weinig zin hebben. Voor de schuifspanningen τ_{xy} worden ter plaatse van de opleggingen te lage waarden ($\sim 8/\pi^2$) gevonden. Deze zouden door een hogere harmonische ($n=1$) gecorrigeerd kunnen worden. Echter wordt ook dan geen geheel juist beeld verkregen i.v.m. de verstoring van de geïdealiseerde theoretische randvoorwaarden voor $x = \pm \frac{1}{2} L$ door de werkelijkheid.

Hebben we nu de oplossing voor een schaaldak, dat aan 2 zijden vrij is opgelegd aangegeven, het bepalen van de spanningsverdeling in een schaalstelsel over meer „steunpunten” is van minstens even groot belang. Een vrij goede benadering kan als volgt gevonden worden. Bereken eerst de schaal als vrij opgelegd op twee steunpunten zoals reeds is aangegeven. Bij een schaal over meer steunpunten zal dan tussen de steunpunten het verloop van σ_y en M_y in grote lijnen hetzelfde zijn. De normaalspanningen σ_x zullen echter veranderen en wel evenredig met het statisch moment in de schaal, terwijl het statisch moment in de schaal weer een verloop heeft, dat gelijkvormig is met de momentenlijn van een balk over een gelijk aantal steunpunten. Zo is bij een schaalstelsel rustend op vier steunpunten en met gelijke veldlengten het statisch moment in de middendoorsnede van de middelste schaal overeenkomstig de liggertheorie $\frac{1}{40} q_{\text{tot}} L^2$. Om nu de spanningsverdeling voor σ_x daar te vinden, vermenigvuldigen we dus alle voor σ_x gevonden waarden in de middendoorsnede van de reeds berekende schaal met $\frac{1/40}{1/8} = 0,2$. Boven de middelste twee steunpunten wordt deze factor $\frac{-1/10}{1/8} = -0,8$ enz. Op dezelfde wijze onderstellen we de schuifspanningen τ_{xy} evenredig met de dwarskracht.

Voor andere minder elementaire benaderingsmethoden voor de berekening van deze schaalsystemen zij naar de literatuur verwezen [1], [9].

VIII

WEDERZIJDSE BEÏNVLOEDING VAN DE STORINGEN, WELKE UITGAAN VAN DE LANGSRANDEN VAN DE SCHAAL

De n^e term van elke buigingscomponent bestaat uit 2 gedeelten, b.v. w_b uit:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \{e^{-k_1} (A_{1,1} c_1 + A_{1,2} s_1) + e^{-k_2} (A_{2,1} c_2 + A_{2,2} s_2)\} \cos \alpha_n x \\ \text{en } & \text{b) } \{e^{+k_1} (A_{1,3} c_1 + A_{1,4} s_1) + e^{+k_2} (A_{2,3} c_2 + A_{2,4} s_2)\} \cos \alpha_n x \quad (k_i = f y \sigma_i) \end{aligned}$$

Het a-gedeelte neemt bij toenemende y ($= R\varphi$), het b-gedeelte bij afnemende y in betekenis af. Aan de rand $\varphi = +\varphi_0$ worden de waarden der buigingscomponenten vooral bepaald door het b-gedeelte, aan de rand $\varphi = -\varphi_0$ door het a-gedeelte. Bijzonder sterk komt dit tot uiting bij betrekkelijk korte en brede schalen. We verwaarlozen dan b.v. aan de rand $\varphi = -\varphi_0$ het deel b ten opzichte van a. We kunnen het zo opvatten, dat van elke rand een golf uitgaat welke aan de andere rand is uitgedempt.

Veronderstellen we dus dat de beide rechte randen elkaar niet beïnvloeden, dat er dus geen wisselwerking of „interaction” tussen beide randen bestaat, dan voeren we dus voor elke van de beide golven de berekening afzonderlijk uit.

Het is dan eenvoudiger de oorsprong op deze rand aan te nemen, zodat φ loopt van 0 tot $2\varphi_0$. De buigingscomponenten van de beschouwde golf bezitten nu alle slechts vier constanten, b.v.

$$w_b = \{e^{-k_1} (A_{1,1} c_1 + A_{1,2} s_1) + e^{-k_2} (A_{2,1} c_1 + A_{2,2} s_2)\} \cos \alpha_n x.$$

Met behulp van de voor de beschouwde rand geldende vier randvoorwaarden kunnen nu vier vergelijkingen worden opgesteld, waaruit de vier onbekende constanten worden opgelost. We vinden dan een daarbij behorende spanningsverdeling.

Zo vinden we dus voor elke rand een spanningsverdeling voor de buigingscomponenten. Superponeren we de som hiervan op de membraanspanningen, dan is de berekening voltooid.

De acht vergelijkingen met acht onbekenden bij de gewone werkwijze voor een asymmetrische schaal zijn nu dus vervangen door 2×4 vergelijkingen met 2×4 onbekenden. Deze vereenvoudiging is slechts verantwoord bij betrekkelijk korte en brede schalen. In de overige gevallen is het ook mogelijk op dezelfde grondslagen door een iteratieproces tot bevredigende resultaten te komen.

Bij de berekening van de shedschaal volgens het rekenschema is de methode gevolgd, waarbij acht vergelijkingen met acht onbekenden zijn opgesteld en is dus de wederzijdse beïnvloeding van de langsranden rechtstreeks in rekening gebracht.

Bij een schaal, die symmetrisch is in vorm en belasting behoeven, ook wanneer de wisselwerking tussen beide langsranden in rekening wordt gebracht, slechts vier vergelijkingen te worden opgesteld. Het verwaarlozen van deze wisselwerking levert hier dus geen voordeel op.

IX

SCHEMA VOOR DE BEREKENING VAN EEN ENKELVOUDIGE TONSCHAAL OF EEN BINNENSCHAAL MET VERTICALE RAND- LIGGERS, AAN 2 ZIJDEN VRIJ OPGELEGD EN BELAST DOOR EIGEN GEWICHT (Fig. 12 en 13)

(met getallenvoorbeeld)

A Toelichting

Het schema is alleen opgesteld voor de eerste harmonische ($n = 0$), daar zoals reeds eerder werd opgemerkt, hiermee gewoonlijk kan worden volstaan. Een getallenvoorbeeld is toegevoegd, waarbij als eenheden de kg en de cm zijn gebruikt.

§ 1 bevat een overzicht van de bij de berekening benodigde gegevens. In § 2 volgt dan de berekening van de belangrijkste parameters. In de hulptabel III zijn de waarden bepaald van de goniometrische en hyperbolische functies, welke nodig zijn om de waarden der verschillende grootheden in een aantal punten van de schaal te kunnen berekenen. In het bijzonder de waarden voor de rand $\varphi = \varphi_0$ zijn van belang, deze worden gebruikt om de membraan- en buigingscomponenten aan de rand respectievelijk in tabel IV en V te bepalen. Uit tabel IV en V worden nu de overeenkomstige componenten (b.v. $w = w_m + w_b$) tezamen genomen en gesubstitueerd in de vereenvoudigde randvoorwaarden (30) en (31) voor de rechte randen, hetgeen gebeurd is in tabel VI.

We zullen nu eerst deze randvoorwaarden nader beschouwen. Op de randliggers werken de krachten (zie fig. 8a, 8b en 14) N_{y_0} , R_{y_0} en (ten gevolge van N_{xy_0}) $S_{x_0} = - \int_x^{\frac{1}{2}L} N_{xy_0} dx$. In de randligger werkt dus in een doorsnede x een verticaal buigend moment M (positief indien dit aan de onderzijde van de balk trekspanningen veroorzaakt):

$$M = - \frac{1}{2} h S_{x_0} - \iint (q - R_{y_0} \cos \varphi_0 - N_{y_0} \sin \varphi_0) dx^2,$$

waarin q nog ontwikkeld dient te worden in een reeks, dus $q = \frac{4q}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1}$ waarvan in dit geval alleen de 1e term wordt gebruikt.

Aanvullende lijst van notaties

d	dikte van de randligger (zie fig. 12 en 13)
h	hoogte van de randligger (zie fig. 12 en 13)
M	moment werkend in het vlak van de randligger
$N_{x_{0z}}, \sigma_{x_{0z}}$	de normaalkracht, resp. -spanning aan de onderzijde van de randligger
q	eigen gewicht van de randligger per eenheid van lengte

Voor een enkelvoudige tonschaal met verticale randliggers (geval A) zijn de randvoorwaarden (30) nader uitgewerkt (zie ook fig. 8a, 8b, 8c, 12 en 14):

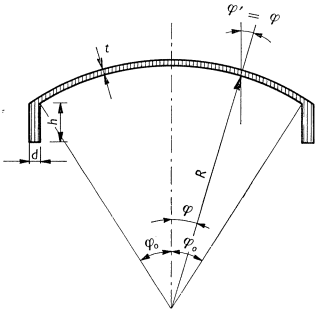


Fig. 12. Doornede van een enkelvoudige tonschaal

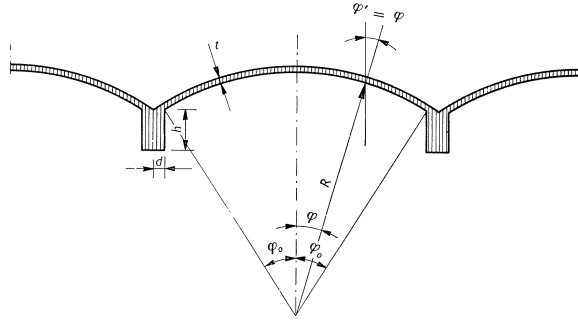


Fig. 13. Doornede van een binnentschaal

$$M_{y_0} = 0 \quad \dots \dots \dots (A I)$$

$$\sigma_{w_r} - \sigma_{x_0} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{-6}{dh^2} M + \frac{1}{dh} S_{x_0} - \frac{1}{t} N_{x_0} = 0 \quad \dots \dots \dots (A II)$$

$$H_0 = 0 \quad \text{of} \quad -R_{y_0} \sin \varphi_0 + N_{y_0} \cos \varphi_0 = 0 \quad \dots \dots \dots (A III)$$

$$\delta_{v_0} - \delta_{v_r} = 0 \quad \text{of} \quad w_0 \cos \varphi_0 + v_0 \sin \varphi_0 + \frac{12}{Edh^3} \iint M dx^2 = 0 \quad (A IV)$$

Voor een binnenschaal gelden eveneens de voorwaarden

$$A II \quad (= B II)$$

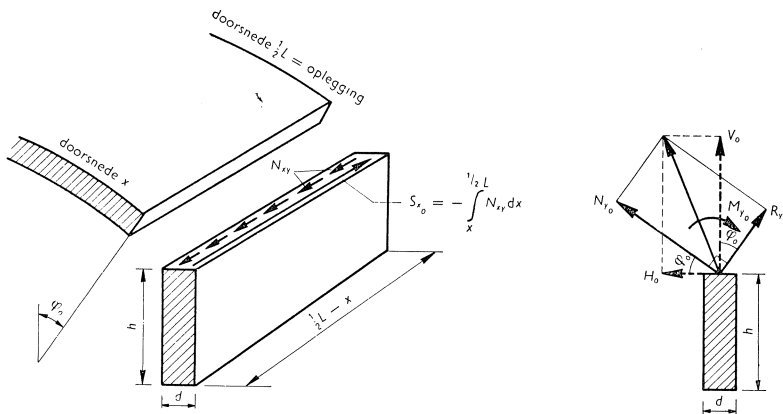
en $A IV \quad (= B IV)$

Voorts gelden hier als nadere uitwerking van de randvoorwaarden (31) de voorwaarden:

$$\chi_0 = 0 \quad \dots \dots \dots (B I)$$

en $\delta_{h_0} = 0 \quad \text{of:} \quad -w_0 \sin \varphi_0 + v_0 \cos \varphi_0 = 0 \quad \dots \dots \dots (B III)$

Fig. 14. Krachten en momenten werkend op de randbalk



Uit de aldus in tabel VI opgestelde vier vergelijkingen kunnen de vier onbekende constanten $A_{i,j}$ worden opgelost. Dit oplossen geschiedt het meest overzichtelijk en systematisch met behulp van de methode ontwikkeld door Gauss. Zie b.v. [14].

Zijn de constanten $A_{i,j}$ bekend, dan kunnen we de spannings- en verplaatsingsgrootheden, welke wij wenschen te kennen, bepalen als functies van x en y op de wijze zoals in tabel VII is geschied. Door in deze uitdrukkingen de in de hulptabel III berekende waarden van C_1c_1 , S_1s_1 , enz. te substitueren, kunnen we voor verschillende punten van de doorsnede van de schaal deze grootheden berekenen. Deze berekening is uitgevoerd in tabel VIII.

Van bijzonder belang is nog de normaalspanning $\sigma_{x_{0z}}$ aan de onderzijde van de randbalk. Deze laat zich bepalen uit de betrekking:

$$\sigma_{x_{0z}} = + \frac{6}{dh^2} M + \frac{1}{dh} \cdot S_{x_0}$$

Deze uitdrukking laat zich eenvoudig berekenen door in de in tabel VI onder de voorwaarde A II gegeven uitdrukkingen voor de beide bovengenoemde termen de waarden van de constanten $A_{i,j}$ te substitueren.

De resultaten van de berekeningen zijn grafisch weergegeven in fig. 15 (p. 77).

B Rekenschema ¹⁾

§ 1. *Gegevens* (zie ook fig. 12 en 13)

a. van de schaal: $L = 1800$, $R = 1156$, $\varphi_0 = 0,597$ rad., $t = 7$, $g = 0,019$.

b. van de randligger: $h = 100$, $d = 15$, $q = 3,82$.

(In het geval van een binnenschaal betreffen de beide laatste grootheden de helft van de waarden voor de gehele balk).

c. van het materiaal: $E = 2 \cdot 10^8$ (ν verwaarloosd)

§ 2. *Parameters* ($n = 0$)

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\pi}{L} = 1,745\ 33 \cdot 10^{-3} & \beta^4 &= \frac{\alpha_0^2 \sqrt{3}}{Rt} = 0,065\ 201\ 8 \cdot 10^{-8} & \gamma &= \frac{\alpha_0^2}{\beta^2} = 0,119\ 296 \\ \alpha_0^2 &= 3,046\ 17 \cdot 10^{-6} & \beta^2 &= 0,255\ 346 \cdot 10^{-4} & \gamma + 1 &= +1,119\ 296 \\ \alpha_0^4 &= 9,279\ 18 \cdot 10^{-12} & \beta &= 0,505\ 318 \cdot 10^{-2} & \gamma - 1 &= -0,880\ 704 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{1}{2} [(\gamma + 1) + \{1 + (\gamma + 1)^2\}^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} \{+1,119\ 296 + (2,252\ 823)^{\frac{1}{2}}\} = \\ &= \frac{1}{2} (+1,119\ 296 + 1,500\ 941) = +1,310\ 118 \\ \sigma_2^2 &= \frac{1}{2} [(\gamma - 1) + \{1 + (\gamma - 1)^2\}^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} \{-0,880\ 704 + (1,775\ 640)^{\frac{1}{2}}\} = \\ &= \frac{1}{2} (-0,880\ 704 + 1,332\ 531) = +0,225\ 914 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = 1,144\ 604 & \sigma_2 = 0,475\ 304 \\ + \sigma_1^3 = +1,499\ 57 & + \frac{1}{2} \sigma_1 = +0,572\ 30 \\ - 2 \sigma_1 = -2,289\ 21 & + \frac{1}{\sigma_1} = +0,873\ 66 \\ + \frac{1}{4 \sigma_1} = +0,218\ 42 & + \frac{1}{8 \sigma_1^3} = +0,083\ 36 \\ \frac{P_1}{P_1} = -0,571\ 22 & \frac{Q_1}{Q_1} = +1,529\ 32 \\ + \sigma_2^3 = +0,107\ 38 & + \frac{1}{2} \sigma_2 = +0,237\ 65 \\ + 2 \sigma_2 = +0,950\ 61 & - \frac{1}{\sigma_2} = -2,103\ 92 \\ + \frac{1}{4 \sigma_2} = +0,525\ 93 & + \frac{1}{8 \sigma_2^3} = +1,164\ 12 \\ \frac{P_2}{P_2} = +1,583\ 97 & \frac{Q_2}{Q_2} = -0,702\ 15 \end{array}$$

$$K = \frac{1}{12} Et^3 = 5,716\ 67 \cdot 10^6 \quad \frac{1}{6} \beta R \varphi_0 = 0,581\ 227$$

¹⁾ In het navolgende is het rekenschema voor een gegeven geval uitgewerkt. De numerieke waarden, die hierop betrekking hebben, zijn met kleine cijfers gedrukt. De eenheden zijn kg en cm.

§ 3. Hulptabel III

φ	$\cos \varphi$	$\beta y \sigma_1$	$\frac{\beta y}{2 \sigma_1}$	C_1	c_1	$C_1 c_1$	$S_1 c_1$	$C_1 s_1$	$S_1 s_1$
	$\sin \varphi$	$\beta y \sigma_2$	$\frac{\beta y}{2 \sigma_2}$	C_2	c_2	$C_2 c_2$	$S_2 c_2$	$C_2 s_2$	$S_2 s_2$
0	+1	0	0	1	+1	+1	0	0	0
	0	0	0	0	0	+1	0	0	0
$1/6 \varphi_0$	+0,99505	0,6653 ¹⁾	0,2539 ¹⁾	1,230 0,715	+0,9679 +0,2512	+1,191	+0,692	+ 0,309	+ 0,180
	+0,09934	0,2763 ¹⁾	0,6114 ¹⁾	1,038 0,280	+0,8188 +0,5740	+0,850	+0,229	+ 0,596	+ 0,161
$2/6 \varphi_0$	+0,98026	1,3305	0,5078	2,024 1,759	+0,8738 +0,4863	+1,769	+1,537	+ 0,984	+ 0,855
	+0,19769	0,5525	1,2229	1,157 0,581	+0,3410 +0,9401	+0,395	+0,198	+ 1,088	+ 0,546
$3/6 \varphi_0$	+0,95578	1,9958	0,7617	3,747 3,611	+0,7237 +0,6901	+2,712	+2,613	+ 2,586	+ 2,492
	+0,29409	0,8288	1,8343	1,364 0,927	-0,2604 +0,9655	-0,355	-0,241	+ 1,317	+ 0,895
$4/6 \varphi_0$	+0,92184	2,6611	1,0156	7,191 7,121	+0,5271 +0,8498	+3,790	+3,753	+ 6,111	+ 6,051
	+0,38758	1,1050	2,4457	1,675 1,344	-0,7675 +0,6411	-1,286	-1,032	+ 1,074	+ 0,862
$5/6 \varphi_0$	+0,87878	3,3264	1,2695	13,937 13,901	+0,2968 +0,9550	+4,137	+4,126	+13,310	+13,275
	+0,47723	1,3813	3,0571	2,116 1,864	-0,9964 +0,0844	-2,108	-1,857	+ 0,179	+ 0,157
φ_0	+0,82703	3,9916	1,5234	27,080 27,062	+0,0474 +0,9989	+1,283	+1,283	+27,050	+27,032
	+0,56216	1,6576	3,6686	2,719 2,528	-0,8643 -0,5029	-2,350	-2,185	- 1,367	- 1,271

¹⁾ $\beta y = 1/6 \beta R \varphi_0$ is berekend onder § 2.

§ 4. Tabel IV Membraancomponenten voor eigen gewicht

Groot- heid	Bepaling als functie van x en φ			voor $x=0$ en $\varphi=\varphi_0$ ²⁾
N_{y_m}	$-\frac{4gR}{\pi} \cos \varphi \cos \alpha_0 x$	$= -27,965$	$\cos \varphi \cos \alpha_0 x$	$-23,128$
N_{xy_m}	$-\frac{8g}{\pi \alpha_0} \sin \varphi \sin \alpha_0 x$	$= -27,721$	$\sin \varphi \sin \alpha_0 x$	$-$
S_{x_m}	$+\frac{8g}{\pi \alpha_0^2} \sin \varphi \cos \alpha_0 x$	$= +15,883$	$\sin \varphi \cos \alpha_0 x$	$+8,929$
N_{x_m}	$-\frac{8g}{\pi R \alpha_0^2} \cos \varphi \cos \alpha_0 x$	$= -13,740$	$\cos \varphi \cos \alpha_0 x$	$-11,363$
v_m	$+\frac{4g}{\pi Et} \left\{ \frac{2}{R^2 \alpha_0^4} + \frac{4}{\alpha_0^2} \right\} \sin \varphi \cos \alpha_0 x$	$^1) = +0,02548$	$\sin \varphi \cos \alpha_0 x$	$+0,01432$
w_m	$+\frac{4g}{\pi Et} \left\{ \frac{2}{R^2 \alpha_0^4} + \frac{4}{\alpha_0^2} + R^2 \right\} \cos \varphi \cos \alpha_0 x$	$^1) = +0,04857$	$\cos \varphi \cos \alpha_0 x$	$+0,04017$
χ_m	$-\frac{4g}{\pi Et R} \left\{ \frac{2}{R^2 \alpha_0^4} + \frac{4}{\alpha_0^2} + R^2 \right\} \sin \varphi \cos \alpha_0 x$	$^1) = -0,000042$	$\sin \varphi \cos \alpha_0 x$	$-0,000024$

¹⁾ $\frac{4g}{\pi Et} = 0,017280 \cdot 10^{-6}$, $R^2 = 1,33634 \cdot 10^6$, $\frac{4}{\alpha_0^2} = 1,31312 \cdot 10^8$, $\frac{2}{R^2 \alpha_0^4} = 0,16129 \cdot 10^6$.

²⁾ $\cos \varphi_0$ en $\sin \varphi_0$ worden in hulptabel III gevonden.

§ 5. Tabel V Buigingscomponenten aan de rand, uitgedrukt in de constanten (ontleend aan tabel II)

Grootheid	Multiplicator (zonder $\cos \alpha_0 x$)	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$
w_{b_0}	2 = 2	$+ C_1 c_1^1$	$+ S_1 s_1$	$+ C_2 c_2$	$+ S_2 s_2$
$N_{\eta_{b_0}}$	$+ 4 KR\beta^4 = + 17,2354$	$- S_1 s_1$	$+ C_1 c_1$	$+ S_2 s_2$	$- C_2 c_2$
		$- 2 \sigma_1 C_1 s_1$	$+ 2 \sigma_1 S_1 c_1$	$+ 2 \sigma_2 C_2 s_2$	$- 2 \sigma_2 S_2 c_2$
		$- \frac{1}{\sigma_1} S_1 c_1$	$- \frac{1}{\sigma_1} C_1 s_1$	$+ \frac{1}{\sigma_2} S_2 c_2$	$+ \frac{1}{\sigma_2} C_2 s_2$
$S_{\eta_{b_0}}$	$+ \frac{2 KR\beta^5}{\alpha_0^2} = + 14,295,5$	$+ \frac{1}{\sigma_1} S_1 c_1$	$+ \frac{1}{\sigma_1} C_1 s_1$	$+ \frac{1}{\sigma_2} S_2 c_2$	$+ \frac{1}{\sigma_2} C_2 s_2$
		$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$
χ_{b_0}	$+ \beta = + 0,505318 \cdot 10^{-8}$	$+ a_{1,4}$	$- a_{1,3}$	$- a_{2,4}$	$+ a_{2,3}$
		$- P_1 S_1 c_1$	$- P_1 C_1 s_1$	$- P_2 S_2 c_2$	$- P_2 C_2 s_2$
		$- Q_1 C_1 s_1$	$+ Q_1 S_1 c_1$	$- Q_2 C_2 s_2$	$+ Q_2 S_2 c_2$
$R_{\eta_{b_0}}$	$- 2 K\beta^3 = - 1,47526$	$b_{1,3}$	$b_{1,4}$	$b_{2,3}$	$b_{2,4}$
		$- b_{1,4}$	$+ b_{1,3}$	$+ b_{2,4}$	$- b_{2,3}$
v_{b_0}	$\frac{Rt^2\beta^7}{3 \alpha_0^4} = - 0,171190$	$- C_1 c_1$	$- S_1 s_1$	$+ C_2 c_2$	$+ S_2 s_2$
		$- (\gamma+1) S_1 s_1$	$+ (\gamma+1) C_1 c_1$	$+ (\gamma-1) S_2 s_2$	$- (\gamma-1) C_2 c_2$
$N_{\eta_{b_0}}$	$\frac{4 KR\beta^6}{\alpha_0^2} = - 144,476$	$c_{1,3}$	$c_{1,4}$	$c_{2,3}$	$c_{2,4}$
		$+ c_{1,4}$	$- c_{1,3}$	$- c_{2,4}$	$+ c_{2,3}$
$M_{\eta_{b_0}}$	$- 2 K\beta^2 = - 291,946$	$+ c_{1,4}$	$- c_{1,3}$	$- c_{2,4}$	$+ c_{2,3}$

¹⁾ $C_i c_i, S_i s_i, C_i s_i$ en $S_i c_i$ worden in hulptabel III voor $\varphi = \varphi_0$ gevonden.

§ 6. Tabel VI Opstelling aansluitingsvergelijkingen ¹⁾

De aansluitingsvergelijkingen zijn opgesteld voor de volgende gevallen:

A. enkelvoudige tonschaal (de vergelijkingen: AI, AII, AIII en AIV)

B. binnenschaal (de vergelijkingen: BI, BII, BIII en BIV)

De gevonden vergelijkingen zijn door *dubbele onderstreping* aangegeven.

	Coëfficiënten afkomstig uit tabel V				Bekende termen afkomstig uit tabel IV
	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	
(AI) $0 = \frac{-1}{2K\beta^2} M_{y_0} =$	-25,596	+31,540	+3,341	-1,231	0
(BI) $0 = \frac{+1}{\beta} \chi_0 =$	-20,696	+63,044	+0,799	-5,896	$\frac{+1}{\beta} \chi_{m_0} = -0,0047$
$-\frac{1}{2} h\alpha_0^2 S_{x_0}$	+137,27	+45,06	+12,84	+1,74	$-\frac{1}{2} h\alpha_0^2 S_{x_{m_0}} = -1,360$
$+\frac{4}{\pi} q$	—	—	—	—	+4,864
$-R_{y_0} \cos \varphi_0$	-49,58	+21,25	+3,05	+4,51	0
$-N_{y_0} \sin \varphi_0$	+261,91	-12,43	+12,31	-22,77	$-N_{y_{m_0}} \sin \varphi_0 = +13,002$
$-\frac{d^2 M}{dx^2} = +\alpha_0^2 M =$	+349,60	+53,88	+28,20	-16,52	+16,506
$-\frac{6}{dh^2} M$	-4590,7	-707,5	-370,3	+216,9	-216,75
$+\frac{1}{dh} S_{x_0}$	-600,8	-197,2	-56,2	-7,6	$\frac{+1}{dh} S_{x_{m_0}} = +5,95$
$-\frac{1}{t} N_{x_0}$	-651,0	-528,3	-25,4	-69,0	$\frac{-1}{t} N_{x_{m_0}} = +1,62$
(AII, BII) $0 =$	-5842,5	-1433,0	-452,0	+140,3	-209,18
$-R_{y_0} \sin \varphi_0$	-33,70	+14,44	+2,07	+3,07	0
$+N_{y_0} \cos \varphi_0$	-385,32	+18,29	-18,12	+33,50	$+N_{y_{m_0}} \cos \varphi_0 = -19,128$
(AIII) $0 =$	-419,02	+32,73	-16,05	+36,57	-19,128

¹⁾ $\cos \alpha_0 x$ en $\sin \alpha_0 x$ zijn weggelaten.

(vervolg van tabel VI op p. 72)

Tabel VI Opstelling aansluitingsvergelijkingen (vervolg)

	Coëfficiënten afkomstig uit tabel V				Bekende termen afkomstig uit tabel IV
	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	
$+ w_0 \cos \varphi_0$	+ 2,12	+ 44,71	- 3,89	- 2,10	$+ w_{m_0} \cos \varphi_0 = + 0,033$
$+ v_0 \sin \varphi_0$	+ 1,68	+ 3,91	- 0,36	+ 0,24	$+ v_{m_0} \sin \varphi_0 = + 0,008$
$\frac{-12}{Ed h^3 \alpha_0^2} M$	-150,70	- 23,23	-12,16	+ 7,12	- 7,115
$(AIV, BIV) 0$	$=$ -146,90	$+ 25,39$	$-16,41$	$+ 5,26$	$-7,074$
$- w_0 \sin \varphi_0$	- 1,443	-30,393	-2,642	+1,429	$- w_{m_0} \sin \varphi_0 = -0,0226$
$+ v_0 \cos \varphi_0$	+ 2,465	+ 5,753	-0,542	+0,354	$+ v_{m_0} \cos \varphi_0 = +0,0118$
$(B III) 0$	$=$ + 1,022	$-24,640$	$+2,118$	$+1,783$	$-0,0108$

§ 7 Oplossing van de onbekende constanten $A_{i,j}$ uit de aansluitingsvergelijkingen

Geval A: $A_{1,3} = -0,020 10$
 (vergelijkingen $A_{1,4} = +0,009 76$
 A I t/m A IV) $A_{2,3} = -0,168 76$
 $A_{2,4} = +0,209 96$

Geval B: $A_{1,3} = -0,031 50$
 (vergelijkingen $A_{1,4} = +0,019 15$
 B I t/m B IV) $A_{2,3} = -0,019 49$
 $A_{2,4} = +0,311 87$

§ 8 Tabel VIII Opstelling der uitdrukkingen voor w , N_x , N_y , N_{xy} en M_y (geval A)

Groot- heid	Buiingscomponent ¹⁾ (nadere uitwerking van tabel II)				Membraan- component ¹⁾ ontleend aan tabel IV
	C_1c_1	S_1s_1	C_2c_2	S_2s_2	
w	$+ 2 A_{1,3} = -0,040 2$	$+ 2 A_{1,4} = +0,019 5$	$+ 2 A_{2,3} = -0,337 5$	$+ 2 A_{2,4} = +0,419 9$	$\cos \varphi = + 0,0486$
N_y	$+ 4 KR\beta^4 A_{1,4} = +0,168$	$- 4 KR\beta^4 A_{1,3} = +0,346$	$- 4 KR\beta^4 A_{2,4} = -3,619$	$+ 4 KR\beta^4 A_{2,3} = -2,909$	$-27,965$
$+ \frac{\alpha_0^2}{4 KR\beta^6} N_{xyb}$	$- (\gamma + 1) A_{1,4} = -0,010 92$	$+ (\gamma + 1) A_{1,3} = -0,022 50$	$+ (\gamma - 1) A_{2,4} = -0,184 91$	$- (\gamma - 1) A_{2,3} = -0,148 63$	
	$+ A_{1,3} = -0,020 10$	$+ A_{1,4} = +0,009 76$	$- A_{2,3} = +0,168 76$	$- A_{2,4} = -0,209 96$	
N_x	$+ \frac{\alpha_0^2}{4 KR\beta^6} p_1 = -0,031 02$	$+ q_1 = -0,012 74$	$+ p_2 = -0,016 15$	$+ q_2 = -0,358 59$	$-$
	$+ \frac{\alpha_0^2}{4 KR\beta^6} p_1 = -4,482$	$+ \frac{\alpha_0^2}{4 KR\beta^6} q_1 = -1,841$	$+ \frac{\alpha_0^2}{4 KR\beta^6} p_2 = -2,333$	$+ \frac{\alpha_0^2}{4 KR\beta^6} q_2 = -51,808$	$-13,740$
M_y	$- 2 K\beta^2 q_1 = +3,72$	$+ 2 K\beta^2 p_1 = -9,06$	$+ 2 K\beta^2 q_2 = -104,69$	$- 2 K\beta^2 p_2 = +4,71$	0
	S_1s_1	C_1c_1	S_2s_2	C_2c_2	$\sin \varphi$
$+ \frac{\alpha_0}{2 KR\beta^5} N_{xyb}$	$+ \frac{1}{\sigma_1} A_{1,3} = -0,017 55$	$+ \frac{1}{\sigma_1} A_{1,4} = +0,008 52$	$- \frac{1}{\sigma_2} A_{2,3} = +0,355 06$	$- \frac{1}{\sigma_2} A_{2,4} = -0,441 74$	
	$- 2 \sigma_1 A_{1,4} = -0,022 34$	$+ 2 \sigma_1 A_{1,3} = -0,046 01$	$+ 2 \sigma_2 A_{2,4} = +0,199 59$	$- 2 \sigma_2 A_{2,3} = +0,160 42$	
N_{xy}	$t_1 = -0,039 89$	$u_1 = -0,037 49$	$t_2 = +0,554 65$	$u_2 = -0,281 32$	$-$
	$+ \frac{\alpha_0}{2 KR\beta^5} t_1 = -0,995$	$+ \frac{\alpha_0}{2 KR\beta^5} u_1 = -0,935$	$+ \frac{\alpha_0}{2 KR\beta^5} t_2 = +13,839$	$+ \frac{\alpha_0}{2 KR\beta^5} u_2 = -7,019$	$-27,721$

¹⁾ $\cos \alpha_0 x$ en $\sin \alpha_0 x$ zijn weggelaten.

§ 9 Tabel VIII A Berekening van w , N_x , N_y , N_{xy} en M_y (geval A)

(ontleend aan tabel VII A m.b.v. hulptabel III)

	φ_0 (rand)	$5/6\varphi_0$	$4/6\varphi_0$	$3/6\varphi_0$	$2/6\varphi_0$	$1/6\varphi_0$	0 (midden)
$(N_x)_{x=0}$	+ - 5,75 -49,77 + 5,48 +65,85 -11,36	+ -18,54 -24,44 + 4,92 - 8,13 -12,07	+ -16,99 -11,14 + 3,00 -44,66 -12,67	+ -12,16 - 4,59 + 0,83 -46,37 -13,13	+ - 7,93 - 1,57 - 0,92 -28,29 -13,47	+ - 5,34 - 0,33 - 1,98 - 8,34 -13,67	+ - 4,48 0 - 2,33 0 -13,74
	=	+ 4,5	-58,3	-82,5	-75,4	-52,2	-29,7
$(N_{xy})_{x=\frac{1}{2}L}$	+ - 1,28 -25,29 -30,24 + 9,59 -15,58	+ - 4,11 -12,44 -25,70 - 1,26 -13,23	+ - 3,73 - 5,71 -14,28 - 7,54 -10,74	+ - 2,60 - 2,42 -14,28 - 9,24 - 8,15	+ - 1,53 - 0,92 + 2,74 - 7,64 - 5,48	+ - 0,69 - 0,29 + 3,17 - 4,18 - 2,75	+ 0 0 0 0 0
	=	-62,8	-56,7	-42,0	-25,8	-12,8	- 4,7
$(N_y)_{x=0}$	+ + 0,22 + 9,35 + 8,50 + 3,70 -23,13	+ + 0,70 + 4,59 + 7,63 - 0,46 -24,58	+ + 0,64 + 2,09 + 4,65 - 2,51 -25,78	+ + 0,46 + 0,86 + 1,28 - 2,60 -26,73	+ + 0,30 + 0,30 - 1,43 - 1,59 -27,41	+ + 0,20 + 0,06 + 3,08 - 0,47 -27,83	+ + 0,17 0 - 3,62 0 -27,97
	=	- 1,4	-12,1	-20,9	-26,7	-29,8	-31,1
$(M_y)_{x=0}$	+ + 4,8 -244,9 +246,0 - 6,0	+ +15,4 -120,3 +220,7 + 0,7	+ +14,1 -54,8 +134,6 + 4,1	+ +10,1 -22,6 +37,2 + 4,2	+ + 6,6 - 7,7 -41,4 + 2,6	+ + 4,4 - 1,6 -89,0 + 0,8	+ + 3,7 0 -104,7 0
	=	0	+117	+98	+29	-40	-85
$w_{x=0}$	+ - 0,05 + 0,53 + 0,79 - 0,53 + 0,04	+ - 0,17 + 0,26 + 0,71 + 0,07 + 0,04	+ - 0,15 + 0,12 + 0,43 + 0,36 + 0,04	+ - 0,11 + 0,05 + 0,12 + 0,38 + 0,05	+ - 0,07 + 0,02 - 0,13 + 0,23 + 0,05	+ - 0,05 0 - 0,29 + 0,07 + 0,05	+ - 0,04 0 - 0,34 0 + 0,05
	=	+ 0,78	+ 0,91	+ 0,80	+ 0,49	+ 0,10	- 0,22

Ten slotte bepalen we nog:

$$\sigma_{x_{0z}} = + \frac{6}{dh^2} M + \frac{1}{dh} S_{x_0} = + 23,35 + 23,99 = + 47,34$$

$\left(\frac{6}{dh^2} M \text{ en } \frac{1}{dh} S_{x_0} \text{ te bepalen door substitutie der constanten in tabel VI} \right)$

$$N_{x_{0z}} = + 710$$

§ 10 *Tabel VII B. Opstelling der uitdrukkingen voor w , N_x , N_y , N_{xy} en M_y (geval B)*

In deze tabel zijn uitsluitend de getalwaarden gegeven.

Voor de formules zij verwezen naar de overeenkomstige tabel VII A.

Groot- heid	Buigingscomponent ¹⁾				Mem- braan- compo- nent ¹⁾
	C_1c_1	S_1s_1	C_2c_2	S_2s_2	$\cos \varphi$
w	-0,063 0	+0,038 3	-0,039 0	+0,623 7	+ 0,048 6
N_y	+0,330	+0,543	-5,375	-0,336	-27,965
$\frac{+\alpha_0^2}{4KR\beta^6} N_{x_b}$	-0,021 43	-0,035 26	-0,274 67	-0,017 16	—
	-0,031 50	+0,019 15	+0,019 49	-0,311 87	
	-0,052 93	-0,016 11	-0,255 18	-0,329 03	
N_x	-7,647	-2,328	-36,867	-47,537	-13,740
M_y	+4,70	-15,45	-96,06	+74,50	0

	S_1c_1	C_1s_1	S_2c_2	C_2s_2	$\sin \varphi$
$\frac{+\alpha_0}{2KR\beta^5} N_{xy_b}$	-0,027 51	+0,016 72	+0,041 01	-0,656 15	—
	-0,043 84	-0,072 11	+0,296 47	+0,018 53	
	-0,071 35	-0,055 39	+0,337 48	-0,637 62	
N_{xy}	-1,780	-1,382	+8,420	-15,909	-27,721

¹⁾ $\cos \alpha_0 x$ en $\sin \alpha_0 x$ zijn weggelaten.

§ 11 *Tabel VIII B Berekening van w , N_x , N_y , N_{xy} en M_y (geval B)*

(ontleend aan tabel VII B m.b.v. hulptabel III)

	φ_0 (rand)	$\frac{5}{6}\varphi_0$	$\frac{4}{6}\varphi_0$	$\frac{3}{6}\varphi_0$	$\frac{2}{6}\varphi_0$	$\frac{1}{6}\varphi_0$	0 (midden)
$(N_x)_{x=0}$	+ $\begin{matrix} -9,81 \\ -62,93 \\ +86,64 \\ +60,42 \\ -11,36 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -31,64 \\ -30,90 \\ +77,72 \\ -7,46 \\ -12,07 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -28,98 \\ -14,09 \\ +47,41 \\ -40,98 \\ -12,67 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -20,74 \\ -5,80 \\ +13,09 \\ -42,55 \\ -13,13 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -13,53 \\ -1,99 \\ -14,56 \\ -25,96 \\ -13,47 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -9,11 \\ -0,42 \\ -31,34 \\ -7,65 \\ -13,67 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -7,65 \\ 0 \\ -36,87 \\ 0 \\ -13,74 \end{matrix}$
	= +63,0	- 4,4	-49,3	-69,1	-69,5	-62,2	-58,3
$(N_{xy})_{x=\frac{1}{2}L}$	+ $\begin{matrix} -2,28 \\ -37,38 \\ -18,40 \\ +21,75 \\ -15,58 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -7,34 \\ -18,39 \\ -15,64 \\ -2,85 \\ -13,23 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -6,68 \\ -8,45 \\ -8,69 \\ -17,09 \\ -10,74 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -4,65 \\ -3,57 \\ -2,03 \\ -20,95 \\ -8,15 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -2,74 \\ -1,36 \\ +1,67 \\ -17,31 \\ -5,48 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} -1,23 \\ -0,43 \\ +1,93 \\ -9,48 \\ -2,75 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$
	= -51,9	-57,5	-51,7	-39,4	-25,2	-12,0	0
$(N_y)_{x=0}$	+ $\begin{matrix} +0,42 \\ +14,68 \\ +12,63 \\ +0,43 \\ -23,13 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +1,37 \\ +7,21 \\ +11,33 \\ -0,05 \\ -24,58 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +1,25 \\ +3,29 \\ +6,91 \\ -0,29 \\ -25,78 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +0,89 \\ +1,35 \\ +1,91 \\ -0,30 \\ -26,73 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +0,58 \\ +0,46 \\ -2,12 \\ -0,18 \\ -27,41 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +0,39 \\ +0,10 \\ -4,57 \\ -0,05 \\ -27,83 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +0,33 \\ 0 \\ -5,38 \\ 0 \\ -27,97 \end{matrix}$
	= + 5,0	- 4,7	-14,6	-22,9	-28,7	-32,0	-33,0
$(M_y)_{x=0}$	+ $\begin{matrix} +6,0 \\ -417,6 \\ +225,7 \\ -94,7 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +19,4 \\ -205,1 \\ +202,5 \\ +11,7 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +17,8 \\ -93,5 \\ +123,5 \\ +64,2 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +12,7 \\ -38,5 \\ +34,1 \\ +66,7 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +8,3 \\ -13,2 \\ -37,9 \\ +40,7 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +5,6 \\ -2,8 \\ -81,7 \\ +12,0 \end{matrix}$	+ $\begin{matrix} +4,7 \\ 0 \\ -96,1 \\ 0 \end{matrix}$
	= -281	+29	+112	+75	- 2	-67	-91
$w_{x=0}$	- $\begin{matrix} -0,08 \\ +1,04 \\ +0,09 \\ -0,79 \\ +0,04 \end{matrix}$	- $\begin{matrix} -0,26 \\ +0,51 \\ +0,08 \\ +0,10 \\ +0,04 \end{matrix}$	- $\begin{matrix} -0,24 \\ +0,23 \\ +0,05 \\ +0,54 \\ +0,04 \end{matrix}$	- $\begin{matrix} -0,17 \\ +0,10 \\ +0,01 \\ +0,56 \\ +0,05 \end{matrix}$	- $\begin{matrix} -0,11 \\ +0,03 \\ -0,02 \\ +0,34 \\ +0,05 \end{matrix}$	- $\begin{matrix} -0,08 \\ +0,01 \\ -0,03 \\ +0,10 \\ +0,05 \end{matrix}$	- $\begin{matrix} -0,06 \\ 0 \\ -0,04 \\ 0 \\ +0,05 \end{matrix}$
	= + 0,30	+ 0,47	+ 0,62	+ 0,55	+ 0,29	+ 0,05	- 0,05

Ten slotte bepalen we nog:

$$\sigma_{x_{oz}} = + \frac{6}{dh^2} M + \frac{1}{dh} S_{x_0} = + 10,83 + 19,82 = + 30,65$$

$\left(\frac{6}{dh^2} M \text{ en } \frac{1}{dh} S_{x_0} \text{ te bepalen door substitutie der constanten in tabel VI} \right)$

$$N_{x_{oz}} = + 460$$

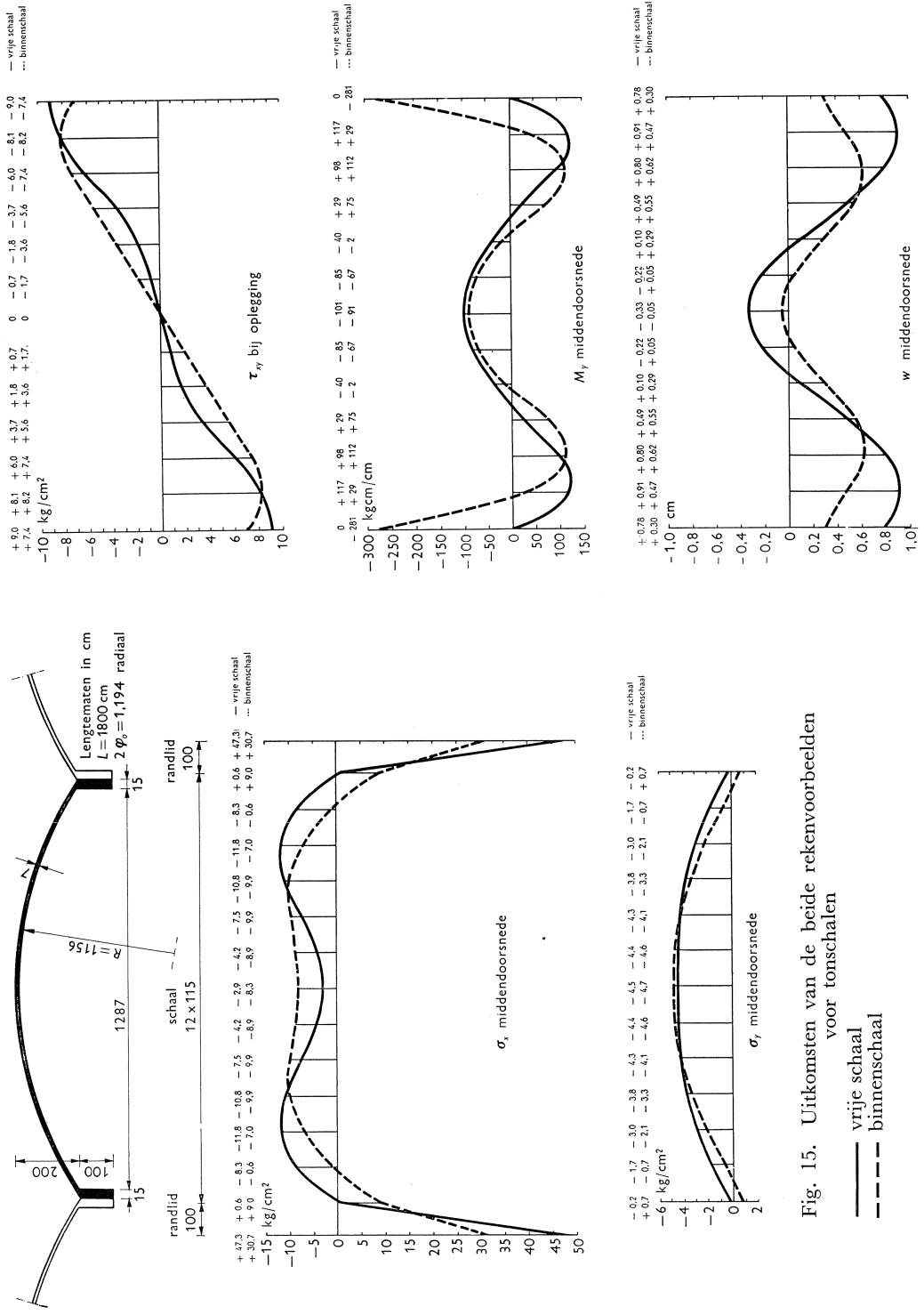


Fig. 15. Uitkomsten van de beide rekenvoorbeelden voor tonschalen
 — vrije schaal
 --- binnenschaal

SCHEMA VOOR DE BEREKENING VAN EEN SHEDSCHAAL,
WELKE AAN TWEE ZIJDEN VRIJ IS OPGELEGD (fig. 16)

(met getallenvoorbeeld)

A Toelichting

In opbouw verschilt dit schema niet van het vorige, zodat we ons kunnen bepalen tot een nadere beschouwing van de randvoorwaarden. De randgrootheden aan de onderrand van de schaal ($\varphi = +\varphi_0$) zijn weer met een index o aangegeven en die van de gootligger met een index r . Om verwarring te voorkomen zijn de randgrootheden aan de bovenrand ($\varphi = -\varphi_0$, top) met een index t aangegeven.

Aanvullende lijst van notaties

a_h	$\frac{-h_1 - \xi_c}{I'_h} - \frac{-\eta_c}{I'_{h,v}}$	M_h	buigend moment in het horizontale vlak van de gootligger
a_v	$\frac{-\eta_c}{I'_v} - \frac{-h_1 - \xi_c}{I'_{h,v}}$	M_v	buigend moment in het verticale vlak van de gootligger
C	het zwaartepunt van de doorsnede van de gootligger (fig. 18)	M_w	wringend moment in een doorsnede van de gootligger
C_w	torsiestijfheid van de gootligger	$N=N_1+N_2$	ontbondene loodrecht op het raamvlak van de resultante van R_{y_t} en N_{y_t} (fig. 17a)
d_1, d_2	dikte van het horizontale resp. opstaande deel van de gootligger (fig. 18)	o	deze index duidt hier de onderrand van de schaal aan
D	dwarskracht- (torsie-)centrum (fig. 18)	$P=P_1+P_2$	ontbondene volgens het raamvlak van de resultante van R_{y_t} en N_{y_t} (fig. 17a en 18b)
e	excentriciteit van Q ten opzichte van D (fig. 18)	q	eigen gewicht van de gootligger per lengte-eenheid
F	totale oppervlak van de doorsnede van de gootligger	Q	verticale belasting van de gootligger door eigen gewicht (q), ramen (r), sneeuw (s) etc. per lengte-eenheid
G	glijdingsmodulus = $\frac{1}{2} E$ bij verwaarlozing van de contractie	r	gewicht van de ramen c.a. per lengte-eenheid
h_1, h_2	breedte van het horizontale deel resp. hoogte van het opstaande deel van de gootligger (fig. 18)	t	deze index duidt de bovenrand van de schaal aan
I_h	traagheidsmoment om de verticale as door C, van de gootligger	δ_ψ	verplaatsing volgens de richting der raamstijlen
I_v	traagheidsmoment om de horizontale as door C, van de gootligger	ξ, η	coördinaten van het assenstelsel als aangegeven in fig. 18
$I_{h,v}$	traagheidsproduct van de gootligger t.o.v. C	θ	hoek van het vlak door de cilinders en de onderrand van de schaal met het horizontale vlak
I'_h	$\frac{I_h I_v - I_{h,v}^2}{I_v}$	σ_{xF}	σ_x aan de bovenzijde van de gootligger (punt F, fig. 18)
I'_v	$\frac{I_h I_v - I_{h,v}^2}{I_h}$	σ_{xD}	σ_x ter plaatse van het dwarskrachtcentrum D
$I'_{h,v}$	$\frac{I_h I_v - I_{h,v}^2}{I_{h,v}}$	ψ	hoek van de raamvlakken met de verticaal (fig. 16 en 18)

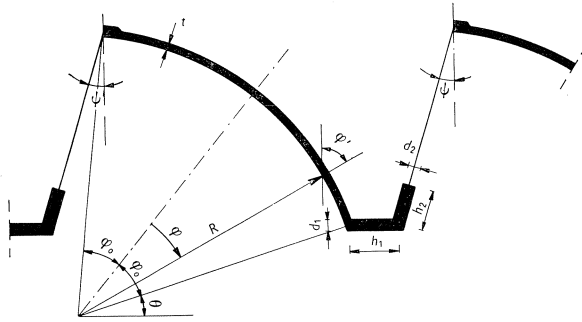


Fig. 16. Doorsnede van een shedschaal

Een eventuele verzwaring van de bovenrand is niet in aanmerking genomen als verstijving. In het algemeen is dit voor de berekening niet nodig, ook al zal dit om constructieve redenen bij de uitvoering wel worden gedaan.

De resultante van N_{yt} en R_{yt} wordt ontbonden in een component N loodrecht op het raamvlak en een component P in het raamvlak (zie fig. 17a). Het raamvlak maakt een hoek ψ met de verticaal. De hoek tussen het vlak door de cilinderas en de onderrand van de schaal en het horizontale vlak noemen we θ . We vinden dan dat:

$$N = N_1 + N_2 = -R_{yt} \cos(2\varphi_0 + \psi + \theta) + N_{yt} \sin(2\varphi_0 + \psi + \theta) \dots \dots \dots (32a)$$

$$P = P_1 + P_2 = +R_{yt} \sin(2\varphi_0 + \psi + \theta) + N_{yt} \cos(2\varphi_0 + \psi + \theta) \dots \dots \dots (32b)$$

De verplaatsing van de bovenrand in de richting der raamstijlen is (δ naar beneden positief, evenals w) (zie fig. 17b):

$$\delta_{\psi t} = +w_t \sin(2\varphi_0 + \psi + \theta) + v_t \cos(2\varphi_0 + \psi + \theta) \dots \dots \dots (33)$$

De bovenrand van de schaal wordt in het algemeen afgestut op de gootligger. De verplaatsingen van de bovenrand van de schaal en de bovenrand van de gootligger (punt F) in de richting van de raamstijlen $\delta_{\psi t}$ en $\delta_{\psi F}$ zijn dan dus gelijk. De verplaatsing $\delta_{\psi F}$ wordt later nader bepaald (47b).

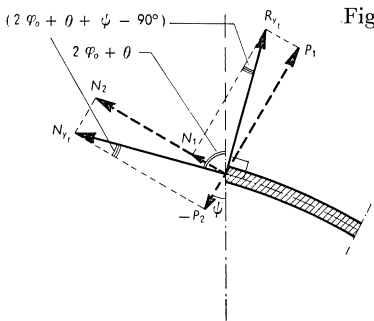


Fig. 17a. Krachten, werkend op de bovenrand van de shedschaal

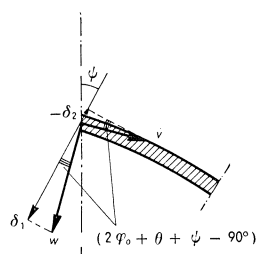


Fig. 17b. Verplaatsingen van de bovenrand van de shedschaal

De randvoorwaarden voor de bovenrand van de schaal luiden dus:

$$\delta_{\psi_t} = \delta_{\psi_F} \dots \dots \dots (34a)$$

$$\mathcal{N} = 0 \dots \dots \dots (34b)$$

$$S_{x_t} = 0 \dots \dots \dots (34c)$$

$$M_{y_t} = 0 \dots \dots \dots (34d)$$

De gootligger bestaat in het algemeen uit een horizontaal en een opstaand gedeelte, het laatste onder een hoek ψ met de verticaal. De wringingsas is gelegen op de plaats waar deze beide delen samenkomen, in de doorsnede aangeduid met D (zie fig. 18b). We nemen een assenkruis aan met D als oorsprong, zoals aangeduid in fig. 18b. Het zwaartepunt van de doorsnede C heeft de coördinaten ξ_C en η_C .

De belasting van de gootligger door eigen gewicht (q), sneeuw (s), raamstijlen (r) etc. kan worden samengesteld tot een resultante Q met excentriciteit e ten opzichte van het punt D (zie fig. 18b).

Verder worden op de gootligger door de onderrand van de schaal de volgende krachten en momenten uitgeoefend: H_0, V_0, S_{x_0} en M_{y_0} (zie ook fig. 18).

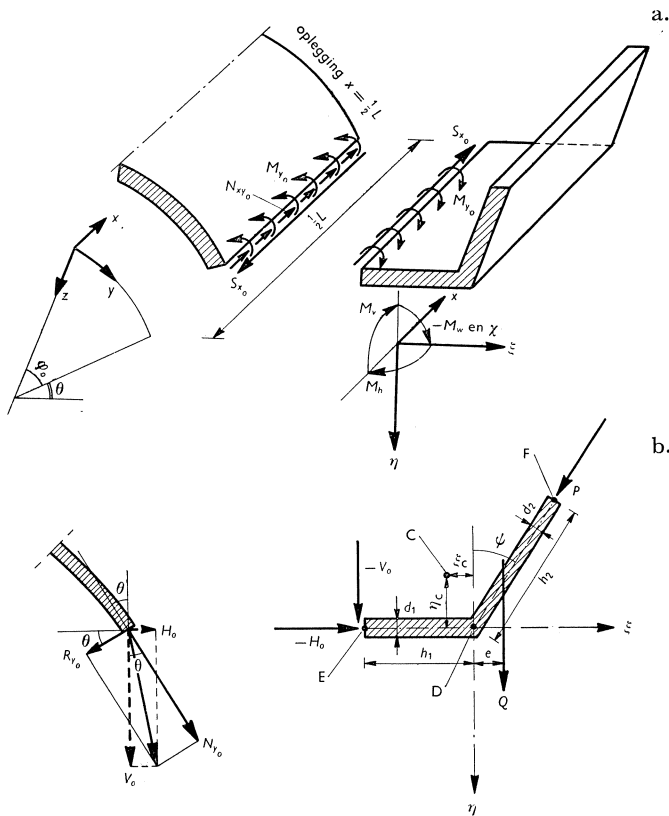


Fig. 18. Onderrand van de schaal en de gootligger met daarop werkende krachten en momenten

Door de raamstijlen wordt nog een kracht P overgebracht, afkomstig van de bovenrand van de schaal.

Bedenken we dat θ de hoek is tussen het raakvlak aan de schaal in de onder-rand met het verticale vlak, dan is (zie fig. 18b)

$$- H_0 = + R_{y_0} \cos \theta - N_{y_0} \sin \theta \quad \dots \dots \dots (35a)$$

$$- V_0 = - R_{y_0} \sin \theta - N_{y_0} \cos \theta \quad \dots \dots \dots (35b)$$

Het horizontale en verticale buigende moment, respectievelijk M_h en M_v in een doorsnede x van de gootligger zijn nu te bepalen (zie ook fig. 18)

$$M_h = - S_{x_0} (h_1 + \xi_C) - \iint \{ - H_0 - P \sin \psi \} dx^2 \quad \dots \dots \dots (36a)$$

$$M_v = - S_{x_0} \cdot \eta_C - \iint \left\{ - V_0 + P \cos \psi + \frac{4}{\pi} Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1} \right\} dx^2 \quad (36b)$$

De positieve richtingen van de momenten M_h en M_v zijn in figuur 18a aangegeven, zoals zij op de gearceerde doorsnede werken. Hierbij veroorzaakt M_v in het algemeen aan de bovenzijde van de gootligger drukspanningen, terwijl M_h bij de aansluiting met de schaalrand drukspanningen veroorzaakt.

De buigende momenten M_h en M_v veroorzaken elk samengestelde buiging in de gootligger. Voor het bepalen van de doorbuigingen en de extreme spanningen wordt in het volgende het gootliggerprofiel als één geheel beschouwd en worden de formules voor samengestelde buiging toegepast, welke zijn afgeleid door TIMOSHENKO [6a] p. 203 en [6b] p. 559.

Zij:

$$I_h = \int (\xi - \xi_C)^2 dF, \text{ het traagheidsmoment om de verticale as door het zwaartepunt C,}$$

$$I_v = \int (\eta - \eta_C)^2 dF, \text{ het traagheidsmoment om de horizontale as door C,}$$

$$I_{h,v} = \int (\xi - \xi_C) (\eta - \eta_C) dF, \text{ het traagheidsprodukt ten opzichte van C.}$$

We kunnen nu de volgende traagheidsgrootheden definiëren:

$$\left. \begin{aligned} I'_h &= \frac{I_h I_v - I_{h,v}^2}{I_v} \dots \dots \dots \\ I'_v &= \frac{I_h I_v - I_{h,v}^2}{I_h} \dots \dots \dots \\ I'_{h,v} &= \frac{I_h I_v - I_{h,v}^2}{I_{h,v}} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (37)$$

Deze traagheidsgrootheden zijn in paragraaf 5, gootliggercoëfficiënten, nader uitgewerkt.

Met behulp van deze laatste traagheidsgrootheden zijn de doorbuigingen

en de extreme spanningen op eenvoudige wijze te bepalen. We vinden voor de doorbuigingen ten gevolge van de momenten M_h en M_v :

$$\delta_{h_C} = -\frac{1}{EI'_h} \iint M_h dx^2 + \frac{1}{EI'_{h,v}} \iint M_v dx^2 \quad \dots \quad (38a)$$

$$\delta_{v_C} = -\frac{1}{EI'} \iint M_v dx^2 + \frac{1}{EI'_{h,v}} \iint M_h dx^2 \quad \dots \quad (38b)$$

De doorbuigingen δ_{h_C} en δ_{v_C} van het zwaartepunt C zijn hierbij positief aangenomen in respectievelijk de ξ - en de η -richting.

De normaalspanningen in langsricting *ten gevolge van de buigende momenten* M_h en M_v bedragen in een punt met coördinaten ξ en η :

$$\sigma_{x(\xi, \eta)} = + M_h \left(\frac{\xi - \xi_C}{I'_h} - \frac{\eta - \eta_C}{I'_{h,v}} \right) + M_v \left(\frac{\eta - \eta_C}{I'_v} - \frac{\xi - \xi_C}{I'_{h,v}} \right) \quad \dots \quad (39)$$

Voor het punt E, de aansluiting tussen gootbodern en schaalrand, bedraagt dus deze spanning

$$\sigma_{xE} = + M_h \left(\frac{-h_1 - \xi_C}{I'_h} - \frac{-\eta_C}{I'_{h,v}} \right) + M_v \left(\frac{-\eta_C}{I'_v} - \frac{-h_1 - \xi_C}{I'_{h,v}} \right) \quad \dots \quad (40)$$

Schrijven we ter bekorting:

$$a_h = \frac{-h_1 - \xi_C}{I'_h} - \frac{-\eta_C}{I'_{h,v}} \quad \text{en} \quad a_v = \frac{-\eta_C}{I'_v} - \frac{-h_1 - \xi_C}{I'_{h,v}} \quad \dots \quad (41)$$

dan gaat dit over in:

$$\sigma_{xE} = a_h \cdot M_h + a_v M_v \quad \dots \quad (42)$$

Op de gootligger werkt voorts een wringend moment m_w per lengte-eenheid:

$$m_w = + V_0 h_1 + e Q \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x}{2n+1} + M_{v_0} \quad \dots \quad (43)$$

Het wringende moment M_w in een doorsnede x van de gootligger bedraagt dus:

$$M_w = - \int m_w dx \quad \dots \quad (44)$$

De positieve richting van M_w is eveneens in figuur 18a aangegeven.

De specifieke hoekverdraaiing van de gootligger bedraagt:

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{M_w}{C_w}$$

als C_w de torsiestijfheid van de gootligger voorstelt.

Voor de hoekverdraaiing van een doorsnede van de gootligger vinden we dus

$$\chi = \int \frac{M_w}{C_w} dx = - \iint \frac{m_w}{C_w} dx^2 \quad \dots \quad (45)$$

De positieve richting van χ is eveneens in figuur 18a aangegeven.

Met behulp van de vergelijkingen 38, 45 en 42 zijn nu de horizontale en verticale verplaatsing, de hoekverdraaiing en de normaalspanning in het punt E van de gootbodem, ter plaatse van de aansluiting met de onderrand van de schaal, te bepalen. We vinden:

$$\delta_{h_r} = \delta_{h_C} \dots \dots \dots (46a)$$

$$\delta_{v_r} = \delta_{v_C} - h_1 \chi \dots \dots \dots (46b)$$

$$\chi_r = \chi \dots \dots \dots (46c)$$

$$\sigma_{x_r} = \frac{S_{x_0}}{F} + a_n M_h + a_v M_v \dots \dots \dots (46d)$$

We kunnen nu ook de verplaatsing in de richting van de raamstijlen van de bovenkant van het opstaande deel van de gootligger (punt F) bepalen, welke nodig is voor de opstelling van de randvoorwaarden aan de bovenrand van de schaal (34).

$$\delta_{v_F} = \delta_{v_C} \cos \psi - \delta_{h_C} \sin \psi \dots \dots \dots (47a)$$

Uitgedrukt in de randgrootheden aan de onderrand van de schaal (punt E) wordt dit:

$$\delta_{v_F} = (\delta_{v_r} + h_1 \chi) \cos \psi - \delta_{h_r} \sin \psi \dots \dots \dots (47b)$$

De horizontale en verticale verplaatsingen van de onderrand van de schaal laten zich als volgt in de radiale en tangenciale verplaatsingen w en v uitdrukken:

$$\delta_{h_0} = -w_0 \cos \theta + v_0 \sin \theta \dots \dots \dots (48a)$$

$$\delta_{v_0} = +w_0 \sin \theta + v_0 \cos \theta \dots \dots \dots (48b)$$

De randvoorwaarden voor de onderrand van de schaal luiden nu:

$$\delta_{h_0} = \delta_{h_r} \dots \dots \dots (49a)$$

$$\delta_{v_0} = \delta_{v_r} \dots \dots \dots (49b)$$

$$\chi_0 = \chi_r \dots \dots \dots (49c)$$

$$\sigma_{x_0} = \sigma_{x_r} \dots \dots \dots (49d)$$

De acht integratieconstanten $A_{i,j}$ welke voorkomen in de oplossing van de differentiaalvergelijking voor de schaal, kunnen worden bepaald door het oplossen van de acht vergelijkingen (34a—d) en (49a—d).

De berekening van een shedschaal, welke volkomen analoog verloopt met die voor een tonschaal, is in het volgende in tabelvorm weergegeven.

De normaalspanningen in de gootligger laten zich als volgt berekenen (zie ook vergelijking (39)):

$$\sigma_{x_D} = \frac{S_{x_0}}{F} + M_h \left(\frac{-\xi_C}{I'_h} - \frac{-\eta_C}{I'_{h,v}} \right) + M_v \left(\frac{-\eta_C}{I'_v} - \frac{-\xi_C}{I'_{h,v}} \right) \dots \dots \dots (50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x_F} = \frac{S_{x_0}}{F} + M_h \left(\frac{h_2 \sin \psi - \xi_C}{I'_h} - \frac{-h_2 \cos \psi - \eta_C}{I'_{h,v}} \right) + \\ + M_v \left(\frac{-h_2 \cos \psi - \eta_C}{I'_v} - \frac{h_2 \sin \psi - \xi_C}{I'_{h,v}} \right) \dots \dots \dots (51) \end{aligned}$$

De schuifspanningen laten zich uit de normaalspanningen op de gebruikelijke wijze afleiden:

$$\tau = - \int \frac{d\sigma_x}{dx} dh = - \alpha_n \int \sigma_x dh \dots \dots \dots (52)$$

Hierbij wordt geïntegreerd over de breedte van de gootbodem, respectievelijk de hoogte van het opstaande deel van de gootligger.

De resultaten van de berekeningen zijn grafisch weergegeven in fig. 19 (p. 99).

B Rekenschema ¹⁾

§ 1 Gegevens (zie fig. 16)

- a. van de schaal: $L = 1500$, $R = 823$, $2\varphi_0 = 1 \text{ rad.}$, $\theta = (\frac{1}{2}\pi - 1) \text{ rad.}$, $t = 7$,
 $g = 0,0258$.
- b. van de randligger: $h_1 = 90$, $d_1 = 12$, $h_2 = 120$, $d_2 = 12$, $\psi = 0$, $q = 6,5$,
 $r = 3$ (belasting van de ramen), $s = 1,5$ (sneeuwbelasting).
- c. van het materiaal: $E = 2 \cdot 10^5$ (ν verwaarloosd)

§ 2 Parameters ($n = 0$)

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{L} = 2,094\ 40 \cdot 10^{-3} \quad \beta^4 = \frac{\alpha_0^2 \sqrt{3}}{Rt} = 0,131\ 880 \cdot 10^{-8} \quad \gamma = \frac{\alpha_0^2}{\beta^2} = 0,120\ 789$$

$$\alpha_0^2 = 4,386\ 49 \cdot 10^{-6} \quad \beta^2 = 0,363\ 153 \cdot 10^{-4} \quad \gamma + 1 = +1,120\ 789$$

$$\alpha_0^4 = 19,241\ 3 \cdot 10^{-12} \quad \beta = 0,602\ 622 \cdot 10^{-2} \quad \gamma - 1 = -0,879\ 211$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2} [(\gamma + 1) + \{1 + (\gamma + 1)^2\}^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} \{+1,120\ 789 + (2,256\ 168)^{\frac{1}{2}}\} =$$

$$= \frac{1}{2} (+1,120\ 789 + 1,502\ 055) = +1,311\ 422$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2} [(\gamma - 1) + \{1 + (\gamma - 1)^2\}^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} \{-0,879\ 211 + (1,773\ 012)^{\frac{1}{2}}\} =$$

$$= \frac{1}{2} (-0,879\ 211 + 1,331\ 545) = +0,226\ 167$$

$$\sigma_1 = 1,145\ 173 \quad \sigma_2 = 0,475\ 570$$

$$+ \sigma_1^3 = +1,501\ 81 \quad + \frac{1}{2}\sigma_1 = +0,572\ 59$$

$$- 2\sigma_1 = -2,290\ 35 \quad + \frac{1}{\sigma_1} = +0,873\ 23$$

$$+ \frac{1}{4\sigma_1} = +0,218\ 31 \quad + \frac{1}{8\sigma_1^3} = +0,083\ 23$$

$$\frac{P_1}{\sigma_1} = -0,570\ 23 \quad + \frac{Q_1}{\sigma_1^3} = +1,529\ 05 \quad +$$

$$+ \sigma_2^3 = +0,107\ 56 \quad + \frac{1}{2}\sigma_2 = +0,237\ 79$$

$$+ 2\sigma_2 = +0,951\ 14 \quad - \frac{1}{\sigma_2} = -2,102\ 74$$

$$+ \frac{1}{4\sigma_2} = +0,525\ 69 \quad + \frac{1}{8\sigma_2^3} = +1,162\ 16$$

$$\frac{P_2}{\sigma_2} = +1,584\ 39 \quad \frac{Q_2}{\sigma_2^3} = -0,702\ 79 \quad +$$

$$K = \frac{1}{12} Et^3 = 5,716\ 67 \cdot 10^6 \quad \frac{1}{3} \beta R \varphi_0 = 0,826\ 60$$

¹⁾ In het navolgende is het rekenschema voor een gegeven geval uitgewerkt. De numerieke waarden, die hierop betrekking hebben, zijn met kleine cijfers gedrukt. De eenheden zijn g en cm.

§ 3 Hulptabel IX

$\frac{y}{R} = \varphi$	$\varphi' = \frac{\pi}{2} - \theta - \varphi_0 + \varphi$	$\sin \varphi'$	$\beta y \sigma_1 = k_1$	$\frac{\beta y}{2 \sigma_1}$	e^{-k_1} e^{+k_1}	$\cos \frac{\beta y}{2 \sigma_1} = c_1$ $\sin \frac{\beta y}{2 \sigma_1} = s_1$	$c_1 e^{-k_1}$	$s_1 e^{-k_1}$	$c_1 e^{+k_1}$	$s_1 e^{+k_1}$
		$\cos \varphi'$	$\beta y \sigma_2 = k_2$	$\frac{\beta y}{2 \sigma_2}$	e^{-k_2} e^{+k_2}	$\cos \frac{\beta y}{2 \sigma_2} = c_2$ $\sin \frac{\beta y}{2 \sigma_2} = s_2$	$c_2 e^{-k_2}$	$s_2 e^{-k_2}$	$c_2 e^{+k_2}$	$s_2 e^{+k_2}$
$+\varphi_0$	1	0,84155 ¹⁾ 0,54030	2,8398 1,1793	1,0827 2,6072	0,0584 17,1124 0,3075 3,2521	+0,46894 +0,88323 -0,86058 +0,50932	+0,0274 -0,2646	+0,0516 +0,1566	+8,0247 -2,7987	+15,1142 +16,5640
$+\frac{2}{3}\varphi_0$	0,8333	0,74015 0,67244	1,8932 0,7862	0,7218 1,7381	0,1506 6,6406 0,4556 2,1950	+0,75062 +0,66074 -0,16653 +0,98603	+0,1130 -0,0759	+0,0995 +0,4492	+4,9846 -0,3655	+ 4,3877 + 2,1643
$+\frac{1}{3}\varphi_0$	0,6667	0,61839 0,78565	0,9466 ²⁾ 0,3931	0,3609 ²⁾ 0,8691	0,3881 2,5769 0,6749 1,4816	+0,93558 +0,35312 +0,64552 +0,76375	+0,3631 +0,4357	+0,1370 +0,5155	+2,4109 +0,9564	+ 0,9100 + 1,1316
0	0,5000	0,47942 0,87758	0 0	0 0	1 1 1 1	+1 0 +1 0	+1 +1	0 0	+1 +1	0 0
$-\frac{1}{3}\varphi_0$	0,3333	0,32716 0,94497					+2,4109 ³⁾ +0,9564	-0,9100 ³⁾ -1,1316	+0,3631 ³⁾ +0,4357	- 0,1370 ³⁾ - 0,5155
$-\frac{2}{3}\varphi_0$	0,1667	0,16592 0,98614					+4,9846 -0,3655	-4,3877 -2,1643	+0,1130 -0,0759	- 0,0995 - 0,4492
$-\varphi_0$	0	0 1					+8,0247 -2,7987	-15,1142 -1,6564	+0,0274 -0,2646	- 0,0516 - 0,1566

1) 0,84155 = cos θ ; 0,54030 = sin θ .

2) Berekenen met $\frac{1}{3} \beta R \varphi_0$.

3) $(c_i e^{-k_i})_{\varphi = -\frac{1}{3}\varphi_0} = (c_i e^{+k_i})_{\varphi = +\frac{1}{3}\varphi_0}$; $(s_i e^{-k_i})_{\varphi = -\frac{1}{3}\varphi_0} = - (s_i e^{+k_i})_{\varphi = +\frac{1}{3}\varphi_0}$;
 $(c_i e^{+k_i})_{\varphi = -\frac{1}{3}\varphi_0} = (c_i e^{-k_i})_{\varphi = +\frac{1}{3}\varphi_0}$; $(s_i e^{+k_i})_{\varphi = -\frac{1}{3}\varphi_0} = - (s_i e^{-k_i})_{\varphi = +\frac{1}{3}\varphi_0}$; enz.

§ 4 Tabel X Membraancomponenten voor eigen gewicht

Groot- heid	Bepaling als functie van x en φ $\left(\varphi' = \frac{\pi}{2} - \theta - \varphi_0 + \varphi\right)$		voor $x = 0$ en $\varphi = +\varphi_0$ (index φ) ²⁾	voor $x = 0$ en $\varphi = -\varphi_0$ (index φ) ²⁾
N_{y_m}	$-\frac{4gR}{\pi} \cos \varphi' \cos \alpha_0 x$	$= -27,035 \cos \varphi' \cos \alpha_0 x$	-14,607	-27,035
N_{xy_m}	$-\frac{8g}{\pi \alpha_0} \sin \varphi' \sin \alpha_0 x$	$= -31,369 \sin \varphi' \sin \alpha_0 x$	—	—
S_{x_m}	$+\frac{8g}{\pi \alpha_0^2} \sin \varphi' \cos \alpha_0 x$	$= +14,978 \sin \varphi' \cos \alpha_0 x$	+12,605	0
N_{x_m}	$-\frac{8g}{\pi R \alpha_0^2} \cos \varphi' \cos \alpha_0 x$	$= -18,199 \cos \varphi' \cos \alpha_0 x$	-9,833	—
v_m	$+\frac{4g}{\pi Et} \left(\frac{2}{R^2 \alpha_0^4} + \frac{4}{\alpha_0^2}\right) \sin \varphi' \cos \alpha_0 x$	$^1) = +0,02500 \sin \varphi' \cos \alpha_0 x$	+0,021 04	0
w_m	$+\frac{4g}{\pi Et} \left(\frac{2}{R^2 \alpha_0^4} + \frac{4}{\alpha_0^2} + R^2\right) \cos \varphi' \cos \alpha_0 x$	$^1) = +0,040 89 \cos \varphi' \cos \alpha_0 x$	+0,022 09	+0,040 89
χ_m	$-\frac{4g}{\pi EtR} \left(\frac{2}{R^2 \alpha_0^4} + \frac{4}{\alpha_0^2} + R^2\right) \sin \varphi' \cos \alpha_0 x$	$^1) = -0,000 049 7 \sin \varphi' \cos \alpha_0 x$	-0,000 042	—

¹⁾ $\frac{4g}{\pi Et} = 0,023 464 \cdot 10^{-6}$, $R^2 = 0,677 33 \cdot 10^6$, $\frac{4}{\alpha_0^2} = 0,911 89 \cdot 10^6$, $\frac{2}{R^2 \alpha_0^4} = 0,153 46 \cdot 10^6$.

²⁾ $\cos \varphi'$ en $\sin \varphi'$ worden in hulptabel IX gevonden.

§ 5 Gootliggercoëfficiënten

cos θ	= 0,841 55	+ $h_1 d_1 = 1080$	$\xi_C = \frac{-h_1^2 d_1 + h_2^2 d_2 \sin \psi}{2 F} = -19,285 7$
sin θ	= 0,540 30	$h_2 d_2 = 1440$	
cos ψ	= 1	$F = 2520$	$\eta_C = -\frac{h_2^2 d_2 \cos \psi}{2 F} = -34,285 7$
sin ψ	= 0		
cos 2ψ	= 1	$h_1^2 = 8100$	$Q = q + r + s = 11$
sin 2ψ	= 0	$d_1^2 = 144$	
$1 - \cos 2 \psi$	= 0	$h_2^2 = 14400$	
$1 + \cos 2 \psi$	= 2	$d_2^2 = 144$	
sin φ_0	= - 2)		
cos $(\theta + \psi + 2 \varphi_0)$	= 0		
sin $(\theta + \psi + 2 \varphi_0)$	= 1		
$\frac{\sin \varphi_0 \cos (\varphi_0 + \theta)}{\cos \psi}$	= - 1) 2)		

Excentriciteit van het eigen gewicht q van de gootligger = $\xi_C = -19,285 7$

Excentriciteit van het raamgewicht r (midden van het raamvlak):

$$e' = \left\{ \frac{1}{2} h_2 + \frac{R \sin \varphi_0 \cos (\varphi_0 + \theta)}{\cos \psi} \right\} \sin \psi = 0$$

Excentriciteit van de sneeuwbelasting s (in de gootbodem): = $-\frac{1}{2} h_1 = -45$

$$e Q = \xi_C q + e' r - \frac{1}{2} h_1 s = -125,357 + 0 - 67,5 = -192,857$$

$$\begin{aligned} I_h &= \frac{1}{12} h_1^3 d_1 + (\frac{1}{2} h_1 + \xi_C)^2 h_1 d_1 + \frac{1}{24} h_2 d_2 \{ h_2^2 (1 - \cos 2 \psi) + d_2^2 (1 + \cos 2 \psi) \} + \\ &+ (-\xi_C + \frac{1}{2} h_2 \sin \psi)^2 h_2 d_2 = \\ &= 729 000 + 714 123 + 17 280 + 535 591 = 1,995 994 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_v &= \frac{1}{12} h_1 d_1^3 + \eta_C^2 h_1 d_1 + \frac{1}{24} h_2 d_2 \{ h_2^2 (1 + \cos 2 \psi) + d_2^2 (1 - \cos 2 \psi) \} + \\ &+ (-\eta_C - \frac{1}{2} h_2 \cos \psi)^2 h_2 d_2 = \\ &= 12 960 + 1 269 550 + 1 728 000 + 952 164 = 3,962 674 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{hv} &= (\frac{1}{2} h_1 + \xi_C) \eta_C h_1 d_1 + (-\xi_C + \frac{1}{2} h_2 \sin \psi) (-\eta_C - \frac{1}{2} h_2 \cos \psi) h_2 d_2 - \\ &- \frac{1}{24} h_2 d_2 (h_2^2 - d_2^2) \sin 2 \psi = \\ &= -952 163 - 714 122 - 0 = -1,666 285 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

¹⁾ $\cos (\varphi_0 + \theta)$ volgt uit tabel IX, uit $\sin \varphi'$ voor $\varphi = 0$.

²⁾ Omdat het raamvlak in dit rekenvoorbeeld verticaal is, is berekening van deze grootte overbodig.

$$I_h I_v - I_{hv}^2 = +5,132\ 968 \cdot 10^{12}$$

$$\frac{1}{I'_v} = \frac{I_h}{I_h I_v - I_{hv}^2} = +0,388\ 858 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{1}{I'_h} = \frac{I_v}{I_h I_v - I_{hv}^2} = +0,772\ 004 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{1}{I'_{hv}} = \frac{I_{hv}}{I_h I_v - I_{hv}^2} = -0,324\ 624 \cdot 10^{-6}$$

$$C_w = \frac{1}{6} E (h_1 d_1^3 + h_2 d_2^3) = 12\ 096 \cdot 10^6$$

$$a_h = \frac{-h_1 - \xi_C}{I'_h} - \frac{-\eta_C}{I'_{hv}} = (-54,591\ 7 + 11,130\ 0) \cdot 10^{-6} = -43,461\ 7 \cdot 10^{-6}$$

$$a_v = \frac{-\eta_C}{I'_v} - \frac{-h_1 - \xi_C}{I'_{hv}} = (+13,332\ 3 - 22,995\ 6) \cdot 10^{-6} = -9,623\ 3 \cdot 10^{-6}$$

Voor de bepaling van σ_{x_D} en σ_{x_F} berekenen we nog:

$$\frac{-\xi_C}{I'_h} - \frac{-\eta_C}{I'_{hv}} = +14,889 \cdot 10^{-6} + 11,130 \cdot 10^{-6} = +26,019 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{-\eta_C}{I'_v} - \frac{-\xi_C}{I'_{hv}} = +13,332 \cdot 10^{-6} + 6,261 \cdot 10^{-6} = +19,593 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{-\xi_C + h_2 \sin \psi}{I'_h} - \frac{-\eta_C - h_2 \cos \psi}{I'_{hv}} = +14,889 \cdot 10^{-6} - 27,825 \cdot 10^{-6} = -12,936 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{-\eta_C - h_2 \cos \psi}{I'_v} - \frac{-\xi_C + h_2 \sin \psi}{I'_{hv}} = -33,331 \cdot 10^{-6} + 6,261 \cdot 10^{-6} = -27,070 \cdot 10^{-6}$$

Opmerking: Dikwijls zijn I_h , I_v en I_{hv} te vinden m.b.v. tabellen voor \perp -profielen.

§ 6 Tabel XI Buigingscomponenten aan de randen, uitgedrukt in de constanten (ontleend aan tabel II)

Voor c_i , s_i en k_i worden de bij $\varphi = +\varphi_0$ behorende waarden gesubstitueerd (zie tabel IX)

	Onder- rand $\varphi = +\varphi_0$	Multiplicator zonder $\cos \alpha_0 x$	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$
Boven- rand $\varphi = -\varphi_0$			$+A_{1,3}$	$-A_{1,4}$	$+A_{1,1}$	$-A_{1,2}$
$+w_{bt}$	$+w_{b_0}$	1	$+c_1 e^{-k_1} = +0,0274$	$+s_1 e^{-k_1} = +0,0516$	$+c_1 e^{+k_1} = +8,0247$	$+s_1 e^{+k_1} = +15,1142$
$+N_{ybt}$	$+N_{yb_0}$	$2KR\beta^4 = 12,4094$	$+s_1 e^{-k_1} = +0,0516$	$-c_1 e^{-k_1} = -0,0274$	$-s_1 e^{+k_1} = -15,1142$	$+c_1 e^{+k_1} = +8,0247$
			$-2\sigma_1 s_1 e^{-k_1} = -0,1182$	$+2\sigma_1 c_1 e^{-k_1} = +0,0628$	$-2\sigma_1 s_1 e^{+k_1} = -34,6167$	$+2\sigma_1 c_1 e^{+k_1} = +18,3793$
			$+ \frac{1}{\sigma_1} c_1 e^{-k_1} = +0,0239$	$+ \frac{1}{\sigma_1} s_1 e^{-k_1} = +0,0451$	$- \frac{1}{\sigma_1} c_1 e^{+k_1} = -7,0074$	$- \frac{1}{\sigma_1} s_1 e^{+k_1} = -13,1982$
$-S_{xbt}$	$+S_{xb_0}$	$\frac{KR\beta^5}{\alpha_0^2} = 8524,12$	$+a_{1,1} = -0,0943$	$+a_{1,2} = +0,1079$	$+a_{1,3} = -41,6241$	$+a_{1,4} = +5,1811$
$-X_{bt}$	$+X_{b_0}$	$\frac{1}{2}\beta = 0,00301311$	$-a_{1,2} = -0,1079$	$+a_{1,1} = -0,0943$	$+a_{1,4} = +5,1811$	$-a_{1,3} = +41,6241$
			$+(\gamma+1)s_1 e^{-k_1} = +0,0578$	$-(\gamma+1)c_1 e^{-k_1} = -0,0307$	$-(\gamma+1)s_1 e^{+k_1} = -16,9398$	$+(\gamma+1)c_1 e^{+k_1} = +8,9940$
			$-c_1 e^{-k_1} = -0,0274$	$-s_1 e^{-k_1} = -0,0516$	$-c_1 e^{+k_1} = -8,0247$	$-s_1 e^{+k_1} = -15,1142$
$-N_{xbt}$	$-N_{xb_0}$	$\frac{2KR\beta^6}{\alpha_0^2} = 102,736$	$b_{1,1} = +0,0304$	$b_{1,2} = -0,0823$	$b_{1,3} = -24,9645$	$b_{1,4} = -6,1202$
$+M_{ybt}$	$+M_{yb_0}$	$K\beta^2 = 207,602$	$+b_{1,2} = -0,0823$	$-b_{1,1} = -0,0304$	$-b_{1,4} = +6,1202$	$+b_{1,3} = -24,9645$
			$+P_1 c_1 e^{-k_1} = -0,0156$	$+P_1 s_1 e^{-k_1} = -0,0294$	$-P_1 c_1 e^{+k_1} = +4,5759$	$-P_1 s_1 e^{+k_1} = +8,6186$
			$-Q_1 s_1 e^{-k_1} = -0,0789$	$+Q_1 c_1 e^{-k_1} = +0,0419$	$-Q_1 s_1 e^{+k_1} = -23,1104$	$+Q_1 c_1 e^{+k_1} = +12,2702$
$+R_{ybt}$	$-R_{yb_0}$	$K\beta^3 = 1,25106$	$+c_{1,1} = -0,0945$	$c_{1,2} = +0,0125$	$c_{1,3} = -18,5345$	$c_{1,4} = +20,8888$
$+v_{bt}$	$-v_{b_0}$	$\frac{Rl^2\beta^7}{6\alpha_0^4} = 0,100815$	$+c_{1,2} = +0,0125$	$-c_{1,1} = -0,0945$	$-c_{1,4} = -20,8888$	$+c_{1,3} = -18,5345$

Onder- rand $\varphi = +\varphi_0$		Multiplier zonder $\cos \alpha_0 \varphi$	$A_{2,1}$			$A_{2,2}$			$A_{2,3}$			$A_{2,4}$		
Boven- rand $\varphi = -\varphi_0$			$+A_{2,3}$			$-A_{2,4}$			$+A_{2,1}$			$-A_{2,2}$		
$+w_{b_t}$	$+w_{b_0}$	1	$+c_2 e^{-k_2}$	$= -0,2646$	$+s_2 e^{-k_2}$	$= +0,1566$	$+c_2 e^{+k_2}$	$= -2,7987$	$+s_2 e^{+k_2}$	$= +1,6564$				
$+N_{y_{b_t}}$	$+N_{y_{b_0}}$	$2 KR\beta^4$	$-s_2 e^{-k_2}$	$= -0,1566$	$+c_2 e^{-k_2}$	$= -0,2646$	$+s_2 e^{+k_2}$	$= +1,6564$	$-c_2 e^{+k_2}$	$= +2,7987$				
			$+2 \sigma_2 s_2 e^{-k_2}$	$= +0,1489$	$-2 \sigma_2 c_2 e^{-k_2}$	$= +0,2517$	$+2 \sigma_2 s_2 e^{+k_2}$	$= +1,5755$	$-2 \sigma_2 c_2 e^{+k_2}$	$= +2,6620$				
			$\frac{1}{\sigma_2} c_2 e^{-k_2}$	$= +0,5564$	$-\frac{1}{\sigma_2} s_2 e^{-k_2}$	$= -0,3293$	$+\frac{1}{\sigma_2} c_2 e^{+k_2}$	$= -5,8849$	$+\frac{1}{\sigma_2} s_2 e^{+k_2}$	$= +3,4830$				
$-S_{x_{b_t}}$	$+S_{x_{b_0}}$	$\frac{KR\beta^5}{\alpha_0^2}$	$a_{2,1}$	$= +0,7053$	$a_{2,2}$	$= -0,0776$	$a_{2,3}$	$= -4,3094$	$a_{2,4}$	$= +6,1450$				
			$+a_{2,2}$	$= -0,0776$	$-a_{2,1}$	$= -0,7053$	$-a_{2,4}$	$= -6,1450$	$+a_{2,3}$	$= -4,3094$				
$-X_{b_t}$	$+X_{b_0}$	$\frac{1}{2}\beta$	$-(\gamma-1) s_2 e^{-k_2}$	$= +0,1377$	$+(\gamma-1) c_2 e^{-k_2}$	$= +0,2326$	$+(\gamma-1) s_2 e^{+k_2}$	$= -1,4563$	$-(\gamma-1) c_2 e^{+k_2}$	$= -2,4606$				
			$+c_2 e^{-k_2}$	$= -0,2646$	$+s_2 e^{-k_2}$	$= +0,1566$	$+c_2 e^{+k_2}$	$= -2,7987$	$+s_2 e^{+k_2}$	$= +1,6564$				
$-N_{x_{b_t}}$	$-N_{x_{b_0}}$	$\frac{2 KR\beta^6}{\alpha_0^2}$	$b_{2,1}$	$= -0,1269$	$b_{2,2}$	$= +0,3892$	$b_{2,3}$	$= -4,2550$	$b_{2,4}$	$= -0,8042$				
$+M_{y_{b_t}}$	$+M_{y_{b_0}}$	$K\beta^2$	$-b_{2,2}$	$= -0,3892$	$+b_{2,1}$	$= -0,1269$	$+b_{2,4}$	$= -0,8042$	$-b_{2,3}$	$= +4,2550$				
			$+P_2 c_2 e^{-k_2}$	$= -0,4192$	$+P_2 s_2 e^{-k_2}$	$= +0,2481$	$-P_2 c_2 e^{+k_2}$	$= +4,4342$	$-P_2 s_2 e^{+k_2}$	$= -2,6244$				
$+R_{y_{b_t}}$	$-R_{y_{b_0}}$	$K\beta^3$	$-Q_2 s_2 e^{-k_2}$	$= +0,1101$	$+Q_2 c_2 e^{-k_2}$	$= +0,1860$	$-Q_2 s_2 e^{+k_2}$	$= +1,1641$	$+Q_2 c_2 e^{+k_2}$	$= +1,9669$				
			$c_{2,1}$	$= -0,3091$	$c_{2,2}$	$= +0,4341$	$c_{2,3}$	$= +5,5983$	$c_{2,4}$	$= -0,6575$				
$+v_{b_t}$	$-v_{b_0}$	$\frac{R\beta^7}{6 \alpha_0^4}$	$-c_{2,2}$	$= -0,4341$	$+c_{2,1}$	$= -0,3091$	$+c_{2,4}$	$= -0,6575$	$-c_{2,3}$	$= -5,5983$				

§ 7 Tabel XII Opstelling aansluitingsvergelijkingen ¹⁾

De verkregen vergelijkingen zijn door *dubbele onderstreping* aangegeven. De onder $\varphi = -\varphi_0$ benodigde waarden voor $\delta_{v_r} + h_1\chi_0$ en δ_{h_r} komen uit de tabel onder $\varphi = +\varphi_0$. Evenzo komt de waarde voor P onder $\varphi = +\varphi_0$ uit de tabel onder $\varphi = -\varphi_0$.

$\varphi = -\varphi_0$ (bovenrand)									
	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	Bekende term
$0 = \frac{+1}{K\beta^2} M_{y_t}$	= + 6,1202	+24,9645	-0,0823	+0,0304	-0,8042	-4,2550	-0,3892	+0,1269	0
$0 = \frac{-\alpha_0^2}{KR\beta^5} S_{x_t}$	= -41,6241	- 5,1811	-0,0943	-0,1079	-4,3094	-6,1450	+0,7053	+0,0776	
$-R_{y_t} \cos (2 \varphi_0 + \psi + \theta)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$+N_{y_t} \sin (2 \varphi_0 + \psi + \theta)$	-187,558	-99,582	+ 0,640	+ 0,340	+20,555	-34,730	- 1,943	+ 3,284	-27,035
$0 = N$	= -187,558	-99,582	+ 0,640	+ 0,340	+20,555	-34,730	- 1,943	+ 3,284	-27,035
$+R_{y_t} \cos (2 \varphi_0 + \psi + \theta)$	-23,188	-26,133	- 0,118	- 0,016	+ 7,004	+ 0,823	- 0,387	- 0,543	0
$+N_{y_t} \cos (2 \varphi_0 + \psi + \theta)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P	= -23,188	-26,133	- 0,118	- 0,016	+ 7,004	+ 0,823	- 0,387	- 0,543	0
$(\delta_{v_r} + h_1\chi_0) \cos \psi$	- 2,416	- 2,607	+28,759	-13,921	+ 0,902	+ 0,510	- 2,436	- 5,152	+3,1848
$-\delta_{h_r} \sin \psi$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-w_t \sin (2 \varphi_0 + \psi + \theta)$	- 8,025	+15,114	- 0,027	+ 0,052	+ 2,799	+ 1,656	+ 0,265	+ 0,157	-0,0221
$-v_t \cos (2 \varphi_0 + \psi + \theta)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	= -10,441	+12,507	+28,732	-13,869	+ 3,701	+ 2,166	- 2,171	- 4,995	+3,1627

¹⁾ $\cos \alpha_0 x$ en $\sin \alpha_0 x$ zijn weggelaten.

$\varphi = +\varphi_0$ (onderrand)

		A _{1,1}	A _{1,2}	A _{1,3}	A _{1,4}	A _{2,1}	A _{2,2}	A _{2,3}	A _{2,4}	Bekende term
$-R_{y_0} \sin \theta$		- 0,064	+ 0,008	-12,528	+14,120	- 0,209	+ 0,293	+ 3,784	- 0,444	0
$-N_{y_0} \cos \theta$		- 0,539	+ 0,286	+157,840	-83,803	+ 1,635	+ 2,763	-17,298	-29,227	+12,2925
	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$-V_0$	=	- 0,603	+ 0,294	+145,312	-69,683	+ 1,426	+ 3,056	-13,514	-29,671	+12,2925
$+P \cos \psi$		-23,188	-26,133	- 0,118	- 0,016	+ 7,004	+ 0,823	- 0,387	- 0,543	0
$-\alpha_0^2 \eta_C S_{x_0}$		- 0,121	+ 0,138	-53,361	+ 6,642	+ 0,904	- 0,099	- 5,525	+ 7,878	+ 1,8957
$+\frac{4}{\pi} Q$		—	—	—	—	—	—	—	—	+14,0056
	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$+\alpha_0^2 M_v$	=	-23,912	-25,701	+91,833	-63,057	+ 9,334	+ 3,780	-19,426	-22,336	+28,1938
$+R_{y_0} \cos \theta$		+ 0,099	- 0,013	+ 19,514	-21,992	+ 0,325	- 0,457	- 5,894	+ 0,692	0
$-N_{y_0} \sin \theta$		- 0,346	+ 0,184	+101,338	-53,804	+ 1,050	+ 1,774	-11,106	-18,765	+ 7,8922
$-P \sin \psi$		0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\alpha_0^2 (h_1 + \xi_C) S_{x_0}$		+ 0,249	- 0,285	+110,057	-13,699	- 1,865	+ 0,205	+11,394	-16,248	-3,9099
	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$+\alpha_0^2 M_h$	=	+ 0,002	- 0,114	+230,909	-89,495	- 0,490	+ 1,522	- 5,606	-34,321	+3,9823
$+h_1 v_0$		+54,3	-26,5	-13078,1	+6271,5	-128,3	-275,0	+1216,3	+2670,4	-1106,33
$+M_{y_0}$		-17,1	- 6,3	+ 1270,6	-5182,7	- 80,8	- 26,3	- 167,0	- 883,3	0
$+\frac{4}{\pi} e Q$		—	—	—	—	—	—	—	—	- 245,55
$-\alpha_0^2 C_w \chi_0$		+17,3	+15,1	- 828,3	-6654,6	+ 12,4	+112,8	+ 982,4	+ 689,0	+ 2,22
	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0	=	+54,5	-17,7	-12635,8	-5565,8	-196,7	-188,5	+2031,7	+4242,7	-1349,66
$+\frac{S_{x_0}}{F}$		- 0,32	+ 0,36	- 140,80	+ 17,53	+ 2,39	- 0,26	-14,58	+ 20,79	+ 5,002
$+a_h M_h$		- 0,02	+ 1,13	-2287,87	+886,72	+ 4,85	-15,08	+55,54	+340,06	-39,457
$+a_v M_v$		+52,46	+56,38	- 201,47	+138,34	-20,48	- 8,29	+42,62	+ 49,00	-61,853
$-\frac{1}{t} N_{x_0}$		+ 0,45	- 1,21	- 366,39	- 89,82	- 1,86	+ 5,71	-62,45	- 11,80	+ 1,405
	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0	=	+52,57	+56,66	-2996,53	+952,77	-15,10	-17,92	+21,13	+398,05	-94,903

(vervolg van tabel XII op p. 94).

$$\varphi = +\varphi_0 \text{ (onderrand)}$$

	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	Bekende term
$+\frac{1}{\alpha_0^2 E I_h} M_h$	+0,000	-0,023	+46,323	-17,954	-0,098	+0,305	-1,125	-6,885	+0,7989
$-\frac{1}{\alpha_0^2 E I_{h,v}} M_v$	-2,017	-2,168	+ 7,747	- 5,319	+0,787	+0,319	-1,639	-1,884	+2,3783
δ_{h_r}	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv
$+\delta_{h_r}$	-2,017	-2,191	+54,070	-23,273	+0,689	+0,624	-2,764	-8,769	+3,1772
$+w_0 \cos \theta$	+0,023	+0,043	+ 6,753	+12,719	-0,223	+0,132	-2,355	+1,394	+0,0186
$-v_0 \sin \theta$	+0,001	+0,005	- 1,138	- 1,010	-0,024	-0,017	-0,036	-0,305	-0,0114
0	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv
	-1,993	-2,143	+59,685	-11,564	+0,442	+0,739	-5,155	-7,680	+3,1844
$+\frac{1}{\alpha_0^2 E I_v} M_v$	-2,416	-2,597	+ 9,280	-6,372	+0,943	+0,382	-1,963	-2,257	+2,8489
$-\frac{1}{\alpha_0^2 E I_{h,v}} M_h$	+0,000	-0,010	+19,479	- 7,549	-0,041	+0,128	-0,473	-2,895	+0,3359
$\delta_{v_G} = \delta_{v_r} + h_1 \chi_0$	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv
$+\delta_{v_G}$	-2,416	-2,607	+28,759	-13,921	+0,902	+0,510	-2,436	-5,152	+3,1848
$-h_1 \chi_0$	+0,029	+0,026	- 1,405	-11,288	+0,021	+0,191	+1,666	+1,169	+0,0038
$-w_0 \sin \theta$	-0,015	-0,028	- 4,336	- 8,166	+0,143	-0,085	+1,512	-0,895	-0,0119
$-v_0 \cos \theta$	+0,001	+0,008	- 1,772	- 1,572	-0,037	-0,026	-0,056	-0,475	-0,0177
0	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv	\equiv
	-2,401	-2,601	+21,246	-34,947	+1,029	+0,590	+0,686	-5,353	+3,1590

§ 8 *Oplossing van de constanten $A_{i,j}$ uit de aansluitingsvergelijkingen*

$$\begin{array}{ll} A_{1,1} = +0,040\ 354 & A_{2,1} = +0,469\ 695 \\ A_{1,2} = -0,074\ 244 & A_{2,2} = -0,492\ 152 \\ A_{1,3} = +0,043\ 464 & A_{2,3} = +0,396\ 278 \\ A_{1,4} = +0,077\ 874 & A_{2,4} = +0,359\ 005 \end{array}$$

§ 9 Tabel XIII Opstelling der uitdrukkingen voor w , N_x , N_y , N_{xy} en M_y (zie ook tabel II)

Grootheid	Buigingscomponent ¹⁾			
	$c_1 e^{-k_1}$	$s_1 e^{-k_1}$	$c_1 e^{+k_1}$	$s_1 e^{+k_1}$
w	$A_{1,1} = +0,040\ 354$	$A_{1,2} = -0,074\ 244$	$A_{1,3} = +0,043\ 464$	$A_{1,4} = +0,077\ 87$
N_y	$-2\ KR\beta^4 A_{1,2} = +0,921\ 3$	$+2\ KR\beta^4 A_{1,1} = +0,500\ 8$	$+2\ KR\beta^4 A_{1,4} = +0,966\ 4$	$-2\ KR\beta^4 A_{1,3} = -0,539\ 4$
$-\frac{\alpha_0^2}{KR\beta^6} N_{x_b}$	$-(\gamma+1) A_{1,2} = +0,083\ 212$ $-A_{1,1} = -0,040\ 354$ + $p_1 = +0,042\ 858$	$+(\gamma+1) A_{1,1} = +0,045\ 228$ $-A_{1,2} = +0,074\ 244$ + $p_2 = +0,119\ 472$	$+(\gamma+1) A_{1,4} = +0,087\ 280$ $-A_{1,3} = -0,043\ 464$ + $p_3 = +0,043\ 816$	$-(\gamma+1) A_{1,3} = -0,048\ 71$ $-A_{1,4} = -0,077\ 87$ + $p_4 = -0,126\ 58$
N_x	$-\frac{2\ KR\beta^6}{\alpha_0^2} p_1 = -4,403$	$-\frac{2\ KR\beta^6}{\alpha_0^2} p_2 = -12,274$	$-\frac{2\ KR\beta^6}{\alpha_0^2} p_3 = -4,501$	$-\frac{2\ KR\beta^6}{\alpha_0^2} p_4 = +13,005$
M_y	$-K\beta^2 p_2 = -24,80$	$+K\beta^2 p_1 = +8,90$	$+K\beta^2 p_4 = -26,28$	$-K\beta^2 p_3 = -9,10$
$-\frac{\alpha_0}{KR\beta^5} N_{x_y_b}$	$+2\ \sigma_1 A_{1,2} = -0,170\ 04$ $+\frac{1}{\sigma_1} A_{1,1} = +0,035\ 24$ + $-0,134\ 80$	$-2\ \sigma_1 A_{1,1} = -0,09242$ $+\frac{1}{\sigma_1} A_{1,2} = -0,064\ 83$ + $-0,157\ 25$	$+2\ \sigma_1 A_{1,4} = +0,178\ 36$ $-\frac{1}{\sigma_1} A_{1,3} = -0,037\ 95$ + $+0,140\ 41$	$-2\ \sigma_1 A_{1,3} = -0,099\ 55$ $-\frac{1}{\sigma_1} A_{1,4} = -0,068\ 00$ + $-0,167\ 55$
N_{xy}	$+2,407$	$+2,807$	$-2,507$	$+2,991$

¹⁾ $\cos \alpha_0 x$ en $\sin \alpha_0 x$ zijn weggelaten.

Buigingscomponent ¹⁾				Membraan- component ¹⁾ ontleend aan tabel X
$c_2 e^{-k_2}$	$s_2 e^{-k_2}$	$c_2 e^{+k_2}$	$s_2 e^{+k_2}$	
$A_{2,1} = +0,469\ 695$	$A_{2,2} = -0,492\ 152$	$A_{2,3} = +0,396\ 278$	$A_{2,4} = +0,359\ 005$	$+0,040\ 89 \sin \varphi'$
$+2\ KR\beta^4 A_{2,2} = -6,107\ 3$	$-2\ KR\beta^4 A_{2,1} = -5,828\ 6$	$-2\ KR\beta^4 A_{2,4} = -4,455\ 0$	$+2\ KR\beta^4 A_{2,3} = +4,917\ 6$	$-27,035 \sin \varphi'$
$+(\gamma-1) A_{2,2} = +0,432\ 705$	$-(\gamma-1) A_{2,1} = +0,412\ 961$	$-(\gamma-1) A_{2,4} = +0,315\ 641$	$+(\gamma-1) A_{2,3} = -0,348\ 412$	
$+A_{2,1} = +0,469\ 695$	$+A_{2,2} = -0,492\ 152$	$+A_{2,3} = +0,396\ 278$	$+A_{2,4} = +0,359\ 005$	
$q_1 = +0,902\ 400$	$q_2 = -0,079\ 191$	$q_3 = +0,711\ 919$	$q_4 = +0,010\ 593$	—
$-\frac{2\ KR\beta^6}{\alpha_0^2} q_1 = -92,709$	$-\frac{2\ KR\beta^6}{\alpha_0^2} q_2 = +8,136$	$-\frac{2\ KR\beta^6}{\alpha_0^2} q_3 = -73,104$	$-\frac{2\ KR\beta^6}{\alpha_0^2} q_4 = -1,088$	$-18,199 \sin \varphi'$
$+K\beta^2 q_2 = -16,44$	$-K\beta^2 q_1 = -187,34$	$-K\beta^2 q_4 = -2,20$	$+K\beta^2 q_3 = +147,80$	0
$-2\ \sigma_2 A_{2,2} = +0,468\ 11$	$+2\ \sigma_2 A_{2,1} = +0,446\ 75$	$-2\ \sigma_2 A_{2,4} = -0,341\ 46$	$+2\ \sigma_2 A_{2,3} = +0,376\ 92$	
$-\frac{1}{\sigma_2} A_{2,1} = -0,987\ 65$	$-\frac{1}{\sigma_2} A_{2,2} = +1,034\ 87$	$+\frac{1}{\sigma_2} A_{2,3} = +0,833\ 27$	$+\frac{1}{\sigma_2} A_{2,4} = +0,754\ 89$	
$-0,519\ 54$	$+1,481\ 62$	$+0,491\ 81$	$+1,131\ 81$	—
$+9,275$	$-26,451$	$-8,780$	$-20,206$	$-31,369 \cos \varphi'$

§ 10 Berekening van w , N_x , N_y , N_{xy} en M_y

De in de hulptabel IX berekende waarden van $c_1 e^{-k_1}$ t/m $s_2 e^{+k_2}$ en $\cos \varphi'$ en $\sin \varphi'$ worden in de in tabel XIII opgestelde uitdrukkingen gesubstitueerd. Deze bewerking is uitgevoerd in tabel XIV.

Hierna komt dan nog de berekening van de normaal- en schuifspanningen in de gootligger, hetgeen kan geschieden met behulp van de formules (50), (51) en (52). De hiervoor benodigde waarden van S_{x_0} , M_h en M_v kunnen worden bepaald door substitutie van de waarden van de acht constanten $A_{i,j}$ in de betreffende uitdrukkingen, welke in tabel XII zijn te vinden.

De waarden van de benodigde gootliggercoëfficiënten zijn te vinden in de betreffende paragraaf 5.

Tabel XIV

	$+\varphi_0$ (onderrand)	$+\frac{2}{3}\varphi_0$	$+\frac{1}{3}\varphi_0$	0	$-\frac{1}{3}\varphi_0$	$-\frac{2}{3}\varphi_0$	$-\varphi_0$ (bovenrand)	
$(N_x)_{x=0}$	- 0,12	- 0,50	- 1,60	- 4,40	-10,62	-21,95	-35,33	
	- 0,63	- 1,22	- 1,68	0	+11,17	+53,85	+185,51	
	-36,12	-22,44	-10,85	- 4,50	- 1,63	- 0,51	- 0,12	
	+196,56	+57,06	+11,83	0	- 1,78	- 1,29	- 0,67	
	+24,53	+ 7,04	-40,39	-92,71	-88,67	+33,89	+259,46	
	+ 1,27	+ 3,65	+ 4,19	0	- 9,21	-17,61	-13,48	
	+204,70	+26,73	-69,95	-73,14	-31,87	+ 3,55	+19,35	
	- 1,80	- 2,35	- 1,23	0	+ 0,56	+ 0,49	+ 0,17	
	- 9,83	-12,24	-14,30	-15,97	-17,20	-17,95	-18,20	
	\equiv	+378,6	+55,7	-124,0	-190,7	-149,3	+34,5	+396,7
$(N_{xy})_{x=\frac{1}{2}L}$	+ 0,07	+ 0,27	+ 0,87	+ 2,41	+ 5,80	+12,00	+19,32	
	+ 0,14	+ 0,28	+ 0,38	0	- 2,55	-12,32	-42,43	
	-20,12	-12,50	- 6,04	- 2,51	- 0,91	- 0,28	- 0,07	
	+45,21	+13,12	+ 2,72	0	- 0,41	- 0,30	- 0,15	
	- 2,45	- 0,70	+ 4,04	+ 9,28	+ 8,87	- 3,39	-25,96	
	- 4,14	-11,88	-13,64	0	+29,93	+57,25	+43,81	
	+24,57	+ 3,21	- 8,40	- 8,78	- 3,83	+ 0,67	+ 2,32	
	-33,47	-43,73	-22,87	0	+10,42	+ 9,08	+ 3,16	
	-26,40	-23,22	-19,40	-15,04	-10,26	- 5,20	0	
	\equiv	-16,6	-75,2	-62,3	-14,6	+37,1	+57,5	0
$(N_y)_{x=0}$	+ 0,03	+ 0,10	+ 0,33	+ 0,92	+ 2,22	+ 4,59	+ 7,39	
	+ 0,03	+ 0,05	+ 0,07	0	- 0,46	- 2,20	- 7,57	
	+ 7,76	+ 4,82	+ 2,33	+ 0,97	+ 0,35	+ 0,11	+ 0,03	
	- 8,15	- 2,37	- 0,49	0	+ 0,07	+ 0,05	+ 0,03	
	+ 1,62	+ 0,46	- 2,66	- 6,11	- 5,84	+ 2,23	+17,09	
	- 0,91	- 2,62	- 3,00	0	+ 6,60	+12,61	+ 9,65	
	+12,47	+ 1,63	+ 4,26	- 4,46	- 1,94	+ 0,34	+ 1,18	
	+ 8,15	+10,64	+ 5,56	0	- 2,54	- 2,21	- 0,77	
	-14,61	-18,18	-21,24	-23,73	-25,55	-26,66	-27,04	
	\equiv	+ 6,4	- 5,5	-23,4	-32,4	-27,1	-11,1	0
$(M_y)_{x=0}$	- 0,7	- 2,8	- 9,0	- 24,8	- 59,8	-123,6	-199,0	
	+ 0,5	+ 0,9	+ 1,2	0	- 8,1	- 39,1	-134,5	
	-210,9	-131,0	- 63,4	- 26,3	- 9,5	- 3,0	- 0,7	
	-137,5	- 39,9	- 8,3	0	+ 1,2	+ 0,9	+ 0,5	
	+ 4,4	+ 1,2	- 7,2	- 16,4	- 15,7	+ 6,0	+ 46,0	
	- 29,3	- 84,2	- 96,6	0	+212,0	+405,5	+310,3	
	+ 6,2	+ 0,8	- 2,1	- 2,2	- 1,0	+ 0,2	+ 0,6	
	+244,8	+319,9	+167,3	0	- 76,2	- 66,4	- 23,1	
	\equiv	-123	+ 65	- 18	- 70	+ 43	+181	0
	$(w)_{x=0}$	+0,001	+0,005	+0,015	+0,040	+0,097	+0,201	+0,324
-0,004		-0,007	-0,010	0	+0,068	+0,326	+1,122	
+0,349		+0,217	+0,105	+0,043	+0,016	+0,005	+0,001	
+1,177		+0,342	+0,071	0	-0,011	-0,008	-0,004	
-0,124		-0,036	+0,205	+0,470	+0,449	-0,172	-1,315	
-0,077		-0,221	-0,254	0	+0,557	+1,065	+0,815	
-1,109		-0,145	+0,379	+0,396	+0,173	-0,030	-0,105	
+0,595		+0,777	+0,406	0	-0,185	-0,161	-0,056	
+0,022		+0,027	+0,032	+0,036	+0,039	+0,040	+0,041	
\equiv		+0,83	+0,96	+0,95	+0,99	+1,20	+1,27	+0,82

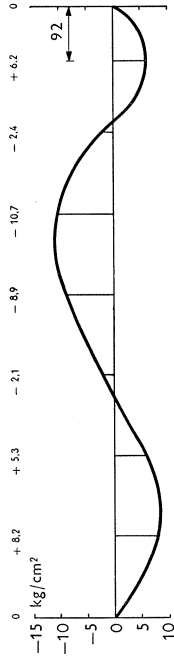
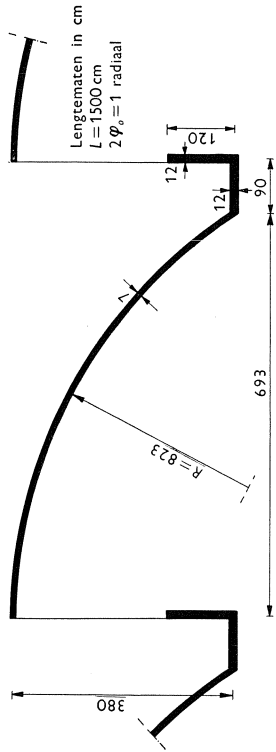
$$\sigma_{\sigma_D} = + 3,14 + (+26,019 \cdot 10^{-6}) (-1,9297 \cdot 10^6) + (+19,593 \cdot 10^{-6}) (+3,4253 \cdot 10^6) =$$

$$= + 3,14 - 50,21 + 67,11 = + 20,04$$

$$\sigma_{\sigma_F} = + 3,14 + (-12,936 \cdot 10^{-6}) (-1,9297 \cdot 10^6) + (-27,070 \cdot 10^{-6}) (+3,4253 \cdot 10^6) =$$

$$= + 3,14 + 24,96 - 92,72 = - 64,62$$

De berekende spanningen, momenten en verplaatsingen zijn grafisch weergegeven in figuur 19.



τ_{yr} bij oplegging

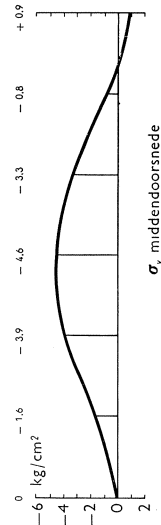
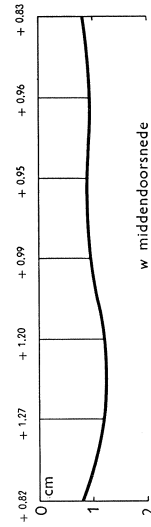
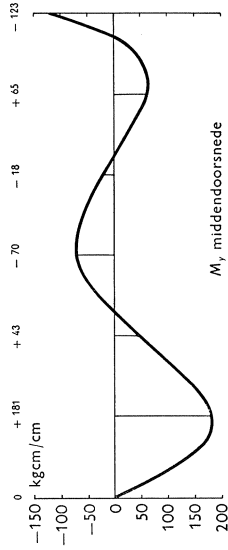
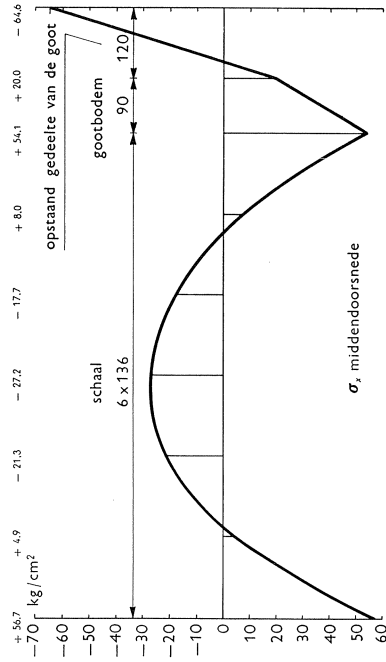


Fig. 19. Uitkomsten van het rekenvoorbeeld voor een shedschaal

Literatuur

- [1] „Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs”, Manual no. 31 of the committee on masonry and reinforced concrete of the structural division, subcommittee on thin shell design. Uitgave van de American Society of Civil Engineers, New York.
- [2] LUNDGREN, H., „Cylindrical Shells”, Vol. I, 2e druk, Kopenhagen 1951.
- [3] JENKINS, R. S., „Theory and Design of Cylindrical Shell Structures”, The O.N. Arup Group of Consulting Engineers, 1947.
- [4] GIRKMANN, K., „Flächentragwerke”, 3e druk, Wenen 1954.
- [5] McNAMEE, J. J., „Existing Methods for the Analysis of Concrete-Shell Roofs”, Symposium on Concrete Shell Roof Construction, London, 2-4 July 1952, no. 4. Uitg. Cement and Concrete Association, (C.A.C.A.), Londen.
- [6] a. TIMOSHENKO, S. P., „Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open cross section”; Journal of The Franklin Institute, **239**. (1945) p. 201, 249, 343.
b. TIMOSHENKO, S. P., Collected papers, New York, London 1953.
- [7] Rapporten van de Werkgroep Gewapend Beton- en Staalconstructies T.N.O.:
a. BE-101-2121-IIa: De berekening van schaaldaken m.b.v. de differentiaalvergelijking van DONNELL, VON KARMAN en JENKINS (de D.K.J.-vergelijking) en de differentiaalvergelijking van SCHORER, met uitgewerkte voorbeelden.
b. BE-101-2121-II d: De berekening van schaaldaken m.b.v. de D.K.J.-vergelijking indien de dwarscontractie in rekening wordt gebracht.
c. BE-101-2121-IVb: Berekening van een symmetrische tonschaal zonder randliggers met behulp van de methode Aas-Jakobsen.
d. BE-101-2121-VIb: Schaaldakmodel van staal; beschrijving, experiment en berekening.
e. BE-101-2121-VI c: Schaaldakmodel van staal; vergelijking van meetresultaten met theorie.
- [8] Artikelen in het orgaan van de Werkgroep Gewapend Beton- en Staalconstructies T.N.O., resp. van het Instituut T.N.O. voor Bouwmaterialen en -constructies.
a. De afleiding van een differentiaalvergelijking voor cirkelcilindrische schalen, W.G.S.-mededelingen **1** (1953) no. 3, p. 45.
b. Over de spanningsverdeling in cirkelcilindrische schalen, W.G.S.-mededelingen **2** (1954) no. 2, p. 45.
c. De afleiding van een stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen voor cirkelcilindrische schaaldaken bij grote doorbuigingen. I.B.C.-mededelingen **3** (1955) no. 1, p. 8.
d. Schaaldakmodel - Experimentele toetsing van enkele analytische berekeningsmethoden. I.B.C.-mededelingen **3** (1955) no. 1, p. 18.
- [9] „Berekening van cirkelcilindrische schaaldaken”. Rapport 8a en 8b van de onderzoekingscommissie A1 van het Fonds voor Experimenteel Beton Onderzoek (FEBO). Uitgave van de Commissie voor Uitvoering van Research (C.U.R.) ingesteld door de Betonvereniging.
- [10] GIBSON, J. E. en D. W. COOPER, The design of cylindrical shell roofs. Spon, London 1954.
- [11] FLÜGGE, W., Statik und Dynamik der Schalen. Springer, Berlijn 1934.
- [12] DONNELL, L. H., Stability of thin-walled tubes under torsion. National Advisory Committee for Aeronautics (N.A.C.A.) Report nr. 479, (1933).
- [13] VON KARMAN, T, en TSIEN, H. S., The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. Journal Aeronautical Sciences, **8** (1941) p. 303.
- [14] STÜSSI, F., Vorlesungen über Baustatik, Band II. Basel, Stuttgart 1954.

Summary

Starting from the so-called D.K.J.-method (DONNELL - VON KARMAN - JENKINS), which opens the possibility of a rather simple and clear method of calculation, methodics for calculation to be used in practice are given in this article. For this purpose some schemes for calculation are drawn up, viz. one for symmetrical barrel roofs and one for shed roofs. Preceding to these schemes a treatise of the theoretical bases is given.

INHOUD

Notaties (voor aanvullende lijsten notaties zie pag. 64 en 78)	38
I. Inleiding	35
II. Afleiding van de differentiaalvergelijking	40
III. De oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking	46
IV. Membraanoplossing	49
V. Buigingscomponenten	54
VI. Randvoorwaarden	60
VII. Schaalsystemen	62
VIII. Wederzijdse beïnvloeding van de storingen, welke uitgaan van de langsranden van de schaal	63
IX. Schema voor de berekening van een enkelvoudige tonschaal of een binnenschaal met verticale randliggers, aan twee zijden vrij opgelegd en belast door eigen gewicht	64
Aanvullende lijst van notaties	64
A <i>Toelichting</i>	64
B <i>Rekenschema</i>	67
1. Gegevens	67
2. Parameters	67
3. Hulptabel	68
4. Membraancomponenten voor eigen gewicht	69
5. Buigingscomponenten aan de rand, uitgedrukt in de constanten	70
6. Opstelling aansluitingsvergelijkingen	71
7. Oplossing aansluitingsvergelijkingen	72
8. Opstelling der uitdrukkingen voor w, N_x, N_y, N_{xy} en M_y (geval A)	73
9. Berekening van w, N_x, N_y, N_{xy} en M_y (geval A)	74
10. Opstelling der uitdrukkingen voor w, N_x, N_y, N_{xy} en M_y (geval B)	75
11. Berekening van w, N_x, N_y, N_{xy} en M_y (geval B)	76
X. Schema voor de berekening van een shedschaal welke aan twee zijden vrij is opgelegd	78
Aanvullende lijst van notaties	78
A <i>Toelichting</i>	78
B <i>Rekenschema</i>	85
1. Gegevens	85
2. Parameters	85
3. Hulptabel	86
4. Membraancomponenten voor eigen gewicht	87
5. Gootliggercoëfficiënten	88
6. Buigingscomponenten aan de randen, uitgedrukt in de constanten	90
7. Opstelling aansluitingsvergelijkingen	92
8. Oplossing aansluitingsvergelijkingen	95
9. Opstelling der uitdrukkingen voor w, N_x, N_y, N_{xy} en M_y	96
10. Berekening van w, N_x, N_y, N_{xy} en M_y	97
Literatuur	100
Summary	100