

DE BEREKENING VAN STATISCH ONBEPAAALDE CONSTRUCTIES DOOR HET METEN VAN GROTE VERPLAATSINGEN AAN KLEINE, EENVOUDIGE MODELLEN.

Als tweede in de reeks bijdragen van het Laboratorium voor Experimenteel Spanningsonderzoek van de afdeling der Weg- en Waterbouwkunde van de Technische Hogeschool volgt hier een artikel van de hand van de heer D. Reinders over een onderzoek verricht met steun van het Delfts Hogeschoolfonds.

Door toepassing van de wederkerigheidswet van Maxwell kan men kleine modellen gebruiken om invloedslijnen voor statisch onbepaalde constructies te bepalen. Beggs was de eerste, die dit toepaste; de kleine verplaatsingen, die hij gebruikte, leidden echter tot grote moeilijkheden bij het waarnemen daarvan.

Andere onderzoekers hebben grote verplaatsingen gebruikt, maar hun apparatuur en meettechniek was te moeilijk hanteerbaar om op ruime schaal in gebruik te komen.

In dit artikel wordt een nieuwe apparatuur en meettechniek beschreven, waarbij ook grote verplaatsingen worden toegepast en welke het grote voordeel heeft eenvoudig, nauwkeurig, snel en goedkoop te zijn. Controle achteraf is mogelijk, daar de waarnemingen rechtstreeks grafisch vastgelegd worden.

Het is waarschijnlijk, dat ontwerpbureaux met vrucht gebruik kunnen maken van deze apparatuur bij de berekening van statisch onbepaalde constructies.

Inleiding

Het berekenen van veelvuldig statisch onbepaalde constructies is altijd een vrij moeilijke en vooral tijdrovende zaak geweest. Naderhand is hierin, door de ontwikkeling van nieuwe rekenmethoden – zoals die van de Amerikaan CROSS –, wat verbetering gekomen. Vóór deze tijd was het echter in vele gevallen niet mogelijk op redelijke wijze tot een oplossing te komen. Het is dan ook wel te begrijpen, dat men getracht heeft het probleem op experimentele wijze te benaderen. Het eerst is dit gedaan door BEGGS [1]. Hij maakte hiertoe kleine modellen, van karton of celluloid; met een speciaal door hem ontworpen apparatuur bracht hij *uiterst kleine* vervormingen aan en bepaalde op grond van het wederkerigheidsprincipe van MAXWELL invloedslijnen voor de diverse grootheden. Een bezwaar van de methode BEGGS was, dat de vervormingen zo klein waren, dat ze met microscopen moesten worden afgelezen. Het bepalen van de invloedslijnen werd daardoor zeer vermoeiend en tijdrovend; verder werd de nauwkeurigheid van het resultaat sterk beïnvloed door allerlei nevenfactoren, zoals temperatuursveranderingen, die een extra vervorming van het model teweegbrachten.

Later hebben anderen (o.a. RIECKHOF [2], GOTTSCHALK [3], ENEY [5]) hetzelfde gedaan, maar nu met grotere vormveranderingen. Het bleek mogelijk ook op deze manier tot goede resultaten te komen. Men kan zelfs bewijzen,

dat dit het geval moet zijn. Het meten van deze grote verplaatsingen kan veel eenvoudiger gebeuren en bovendien valt de invloed van b.v. temperatuursvariaties nu praktisch geheel weg.

Toch hebben deze methoden geen ingang gevonden. Dit komt enerzijds door de opkomst van de nieuwe rekenmethoden, anderzijds doordat de meettechniek en de apparatuur niet zo ver uitgewerkt zijn, dat er een methode ontstaan is, die eenvoudig, goedkoop en snel tot goede resultaten leidt.

Dit is dan ook de reden, waarom met steun van het Delfts Hogeschoolfonds, een onderzoek werd ingesteld om een meettechniek te ontwikkelen, die wel in de praktijk aanvaardbaar is. De opzet van dit onderzoek is dan ook geweest:

1. Het ontwikkelen van een eenvoudige apparatuur voor het aanbrengen van de verplaatsingen en hoekverdraaiingen;
2. het ontwikkelen van een meettechniek, die eenvoudig en snel tot een goed resultaat leidt;
3. het instellen van een onderzoek naar de mogelijkheden van deze methoden, naar de meest geschikte vervormingen enz.

Theorie

Al deze methoden zijn gebaseerd op het wederkerigheidsbeginsel van MAXWELL. In de literatuur spreekt men van het MÜLLER-BRESLAU-principe.

Beschouwen we als voorbeeld een ligger op 3 steunpunten (zie fig. 1), waarvan we de invloedslinjen wensen te kennen voor de oplegreactie in A als een verticale last van 1 ton zich over de ligger beweegt.

We denken ons steunpunt A weg. Werkt nu in een willekeurig punt P de last van 1 ton, dan vinden we onder P een zakking δ_{PP} en onder A een zakking δ_{AP} . Werkt alleen in A een kracht van 1 ton, dan zijn deze zakkingen resp. δ_{PA} en δ_{AA} . In werkelijkheid werkt in A een reactiekracht X_A bij een kracht van 1 ton in P en is de zakking in A nul, dus:

$$\Delta_A = \delta_{AP} + X_A \delta_{AA} = 0.$$

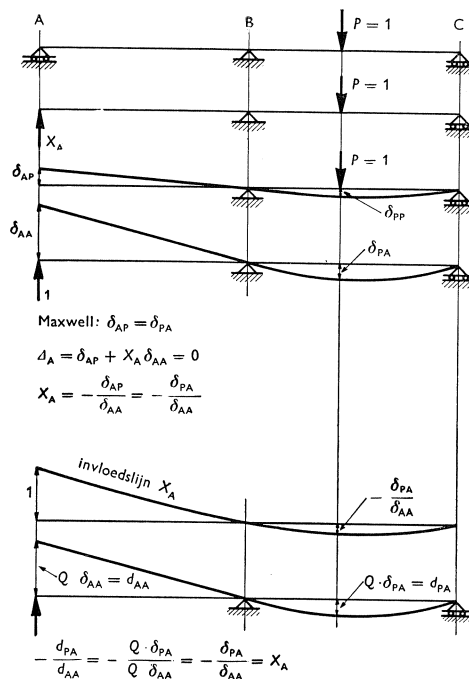
$$\text{of: } X_A = - \frac{\delta_{AP}}{\delta_{AA}}$$

Volgens MAXWELL is:

$$\delta_{AP} = \delta_{PA}.$$

$$\text{Dus is: } X_A = - \frac{\delta_{PA}}{\delta_{AA}}.$$

Fig. 1. Müller-Breslau-principe voor de bepaling van invloedslinjen.



We zien dus, dat als we alleen in A een kracht laten aangrijpen, de hierdoor ontstane uitbuigingslijn de invloedslijn voor de reactie in A op zekere schaal voorstelt.

Brengen we nu in A niet een kracht, maar een verplaatsing d_{AA} aan, dan stelt de hierdoor ontstane uitbuigingslijn eveneens de invloedslijn voor. Immers voor deze verplaatsing is een zekere kracht Q nodig. Deze geeft in A en P zakkingen van $Q \cdot \delta_{AA}$ resp. $Q \cdot \delta_{PA}$. Nu wordt dus:

$$-\frac{d_{PA}}{d_{AA}} = -\frac{Q \cdot \delta_{PA}}{Q \cdot \delta_{AA}} = -\frac{\delta_{PA}}{\delta_{AA}} = X_A.$$

We kunnen dus de invloedslijn voor de verticale reactie in A krijgen, door het steunpunt A in de richting van de reactie te verplaatsen en de hierdoor ontstane uitbuigingen, nadat ze zijn opgemeten, door de aangebrachte verplaatsing te delen.

Het eerste punt, waarop de aandacht gevestigd dient te worden, is de tekenafpraak, die zich uit het bovenstaande gemakkelijk laat afleiden. Als de richting van de aangebrachte verplaatsing of rotatie zodanig is, dat de uitbuigingslijn in een beschouwd punt tegengesteld aan de richting van de bewegende eenheidslast beweegt, dan is het teken van de gezochte grootte, als de last in het beschouwde punt staat, hetzelfde als dat van de aangebrachte verplaatsing of rotatie.

Hierbij is X_A positief, als hij werkt in dezelfde richting als de aangebrachte verplaatsing; δ_{AA} en δ_{PA} zijn positief, als ze optreden in dezelfde richting als de bewegende last. Wat hier is afgeleid voor een kracht-verplaatsing, kan evenzo opgesteld worden voor een moment-hoekverdraaiing.

Een tweede punt dat de aandacht verdient, is de invloed van de schaal van het model. Men kan hier een vrij ingewikkelde beschouwing over opzetten, die uitgaat van formules voor de in een constructie aanwezige vormveranderingsarbeid. Het resultaat hiervan is, dat bij het zoeken naar een invloedslijn voor een kracht de schaal niet van invloed is. Wenst men daarentegen de invloedslijn voor een moment te kennen, dan dienen de ordinaten met de schaal-factor vermenigvuldigd te worden. Men kan dit gemakkelijk inzien door de volgende redenering: Stel, dat de werkelijke constructie gefotografeerd wordt, zodat er een foto ontstaat op dezelfde schaal, als het model. Verplaatsingen van punten worden nu ook in dezelfde verhouding kleiner, dus ook de aangebrachte verplaatsing. De verhouding tussen deze twee blijft dus dezelfde en deze verhouding geeft ons juist de invloedslijn. Een hoekverdraaiing daarentegen zal op de oorspronkelijke grootte worden afgebeeld. De verhouding van de aangebrachte hoekverdraaiing en de uitbuigingsordinaten is dus niet dezelfde gebleven. De ordinaten dienen met de schaal-factor te worden vermenigvuldigd.

Een derde punt dat de aandacht verdient, is de invloed van de grote ver-

vormingen. De elasticiteitstheorie geldt immers slechts voor zeer kleine vormveranderingen. Men verwaarloost de termen van de tweede orde. Hier wordt echter gewerkt met zeer grote vormveranderingen; derhalve zullen hier de termen van de tweede orde een rol gaan spelen. Men kan echter bewijzen dat, door de verplaatsingen (en verdraaiingen) zowel in positieve als in negatieve richting aan te brengen, de termen van de tweede orde geëlimineerd worden. Dit bewijs – dat hier niet gegeven zal worden – gaat uit van de formules van de mathematische veerkrachtsleer, die aangevuld worden met termen van de tweede orde. Dit zijn dus kwadratische termen. Zowel bij een positieve als bij een negatieve vervorming zal de uitwerking hiervan dezelfde zijn.

In het eerste geval krijgt men dus de verplaatsing: $+ u + \Delta u$

In het tweede geval (negatief): $- u + \Delta u$

Aftrekken geeft derhalve $2u$ waarmee de termen van de tweede orde dus geëlimineerd zijn.

Experimenten met modellen

Als materiaal voor de modellen werd gebruikt: bandstaal (verenstaal) en perspex. De methode met de bandstaalmodellen is een variant op de door RIECKHOF [2] ontworpen methode. Zijn apparatuur doet echter nogal primitief aan. De staven komen nogal ver van het vlak, waarop de modellen gemonteerd worden, te liggen; dit bemoeilijkt het nauwkeurig opmeten van de invloedsordinaten ten zeerste. Derhalve is bij het hier beschreven onderzoek een aanzienlijk verbeterde apparatuur ontwikkeld.

Voor de verbinding van de staven in rechthoekige knooppunten wordt een kubusvormig blokje gebruikt, dat voorzien is van sleuven. Voor de verbinding in niet-rechthoekige knooppunten wordt een kommetje gebruikt; met behulp van een klemmetje kan men de staven hierop bevestigen (zie fig. 2).

Als inklemming wordt gebruikt een apparaat, bestaande uit 2 onderdelen, die ten opzichte van elkaar draaibaar en verschuifbaar zijn (zie fig. 3).

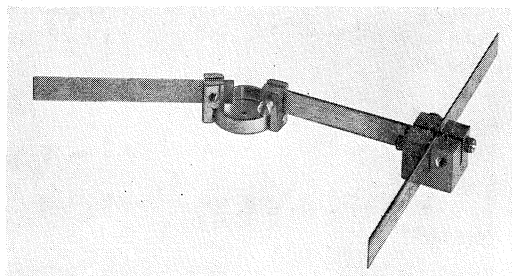


Fig. 2. Verbindingsdelen voor bandstaalmodellen.

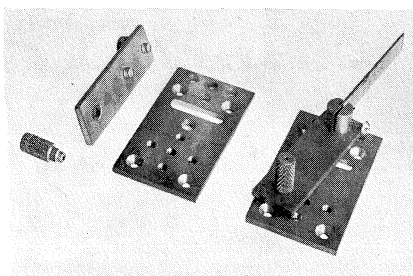


Fig. 3. Inklemmingsapparatuur voor bandstaalmodellen.

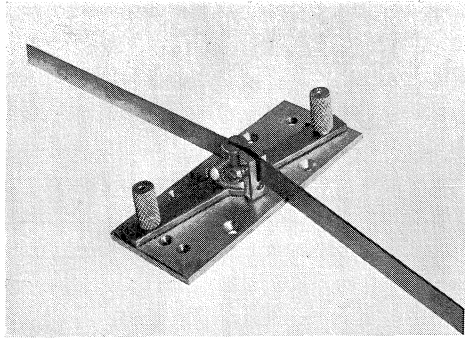


Fig. 4. Verdraaiingsklem voor middens van staven en voor hoekpunten.

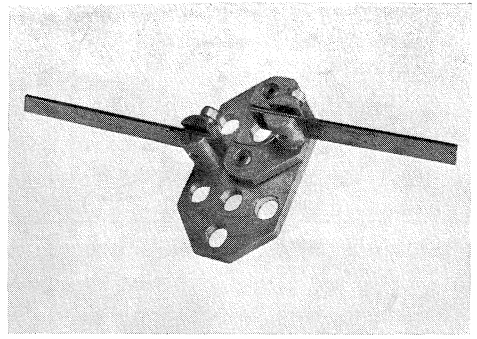


Fig. 5. Klemmen voor horizontale en verticale verschuiving in middens van staven.

Voor de bepaling van momenten in middens van staven en in hoekpunten wordt het apparaatje van fig. 4 gebruikt. Het bestaat uit een onderplaat met een nokje en diverse gaten, verder een kommetje met twee armen; op dit kommetje kunnen de staven bandstaal gemonteerd worden. De foto geeft een indruk, hoe het apparaatje in een hoekpunt van een model is gemonteerd.

Voor de verplaatsing van twee gedeelten van een staaf, dus voor de bepaling van dwars- en normaalkrachten, wordt een apparaatje gebruikt, bestaande uit een onder- en een bovenplaat, beide voorzien van een nokje met sleuf voor de bevestiging van de staven (zie fig. 5). Hiermede zijn dan verplaatsingen van 1 cm te verwezenlijken. Bovenvermelde onderdelen zijn uit messing vervaardigd.

Wenst men nu een bepaalde invloedslijn te kennen, b.v. voor een inklemmingsmoment of een oplegreactie, dan brengt men met het apparaatje van fig. 3 een verdraaiing (ter grootte van 0,2 rad.) of een verplaatsing (van 1 cm) aan. De nu ontstane uitbuigingslijn stelt dan de invloedslijn voor de gezochte grootte op een zekere schaal voor.

Na enig proberen is voor het opmeten van de ordinaten van de invloedslijnen de volgende methode gevonden. Op het model worden op de plaatsen waar men de ordinaten van de invloedslijnen wenst te weten, krasjes aangebracht. In de uitgebogen toestand wordt nu een kubusje met één ribbe tegen dit krasje aangeschoven. In het voetpunt van deze ribbe wordt nu met een zeer fijn pennetje een klein gaatje in het papier geprikt. De foto van fig. 6 geeft een indruk van deze meetmethode. Het doorprikken geschiedt in $+u + \Delta u$ en in $-u + \Delta u$ stand. De afstand tus-

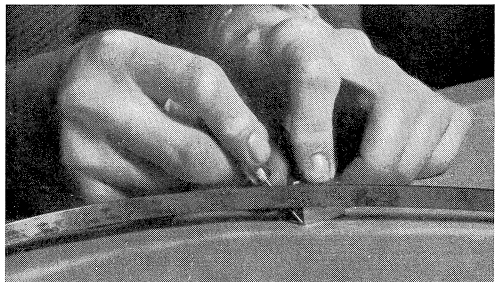


Fig. 6. Meettechniek bij bandstaalmodellen.

sen de twee op deze manier ontstane punten wordt nu opgemeten. Dit opmeten geschiedt met een reductiepasser. Men stelt de vermenigvuldigingsfactor (die dus bepaald wordt door de schaal van het model, de grootte van de aanbrechte vervorming en de schaal van de invloedslijn) in, zet de passer met de punten aan de ene zijde in de geprikte gaatjes en met de punten aan de andere zijde kan men de invloedsoordinaat op de grafiek overbrengen.

Bij de *perspexmodellen* is voor de inklemmingen een soortgelijk apparaatje ontwikkeld als bij de bandstaalmodellen (zie fig. 7); ook hier een onder- en een bovenplaat, die ten opzichte van elkaar draaibaar en verschuifbaar zijn. De diverse gaten in de onderplaat maken verschuivingen (horizontaal en verticaal) en een verdraaiing van 0,1 rad. mogelijk. De bevestiging van de perspexstaven kan niet met behulp van een nokje met sleufje geschieden. Hiervoor is nu het volgende bedacht: Het bovenste plaatje van de inklemming bevat 3 pennetjes; in het perspex worden 3 corresponderende gaten geboord. Hier overheen gaat weer een plaatje, eveneens met 3 gaten waarna het geheel wordt vastgezet met 3 moertjes. De vorm van deze klem is langer dan die voor de bandstaalmodellen. De aan te brengen hoekverdraaiing is hier bepaald op 0,1 rad. (bij het bandstaal was dit 0,2 rad.). Aanvankelijk is namelijk gewerkt met een zeer ingewikkelde klem (zie fig. 11: foto van het perspexmodel), die diverse verplaatsingen en verdraaiingen toeliet. De grootste nauwkeurigheid werd nu bereikt bij de grootste verdraaiing, die met deze klem mogelijk was (0,2 rad.). Deze verdraaiing bleek echter wel eens te groot, waardoor breuk of kip optrad. Daar een verdraaiing van 0,1 rad. ook goede resultaten gaf, is de eenvoudige klem vervaardigd voor een „standaard-hoekverdraaiing” van 0,1 rad.

Voor de bepaling van grootheden in middens van staven en in hoekpunten kan men óók een verdraaiingsklem ontwikkelen; het bezwaar hiervan is echter, dat dan voor elke bepaling het model moet worden doorgesneden. Daarom is

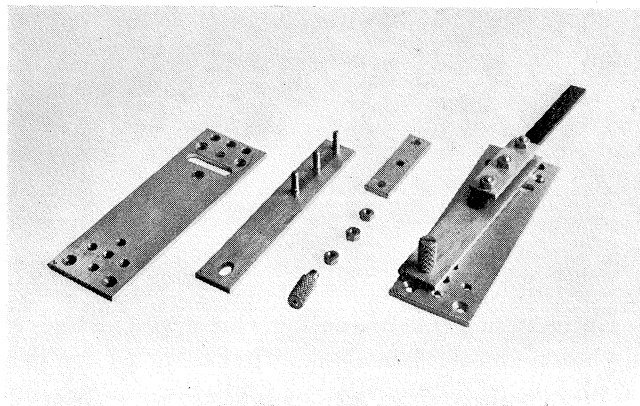


Fig. 7. Inklemmingsapparaat voor de perspexmodellen.

hiervoor een andere weg gevolgd en is gebruik gemaakt van „stijfheidsvervangers” (zie fig. 8, 9 en 11); in de Engelse literatuur bekend als „internal joints”. Hierbij wordt een staaf I uit een model onderbroken over de lengte λ en vervangen door een stijfheidsvervanger II. Als nu over de lengte λ een constant moment M werkt, ontstaat in de staaf I een hoekverdraaiing:

$$\varphi = \frac{M\lambda}{EI}$$

In de stijfheidsvervanger II ontstaan in de hoekpunten 4 gelijke krachtjes, waardoor een doorbuiging ontstaat ter grootte van

$$\delta = \frac{P \left(\frac{b-d}{2} \right)^3}{3EI'}$$

hierdoor ontstaat een hoekverdraaiing

$$\varphi = \frac{4\delta}{b} = \frac{4P \left(\frac{b-d}{2} \right)^3}{3EI'b}$$

Als de hoekverdraaiing in beide gevallen hetzelfde is, moet dus gelden:

$$\frac{M\lambda}{EI} = \frac{4P \left(\frac{b-d}{2} \right)^3}{3EI'b};$$

waarbij $M = Pb$

$$\text{of: } \frac{Pb\lambda}{\frac{1}{12}d^3E} = \frac{4P \left(\frac{b-d}{2} \right)^3}{3 \cdot \frac{1}{12}d'^3bE}$$

waaruit na herleiding volgt:

$$\frac{1}{b^2} \left(\frac{b-d}{d'} \right)^3 = \frac{6\lambda}{d^3}$$

Deze vergelijking bevat 3 variabelen, te weten b , λ en d' . Twee hiervan kan men dus willekeurig kiezen. Het is het handigst om b en λ te kiezen en d' hier dan bij uit te rekenen.

De constructieve uitvoering van deze stijfheidsvervangers is zo, dat in de uiteinden van de dwarsbalkjes (ter dikte d') een gaatje wordt geboord; dunne messingplaatjes, voorzien van gaatjes op dezelfde afstanden (zie fig. 9),

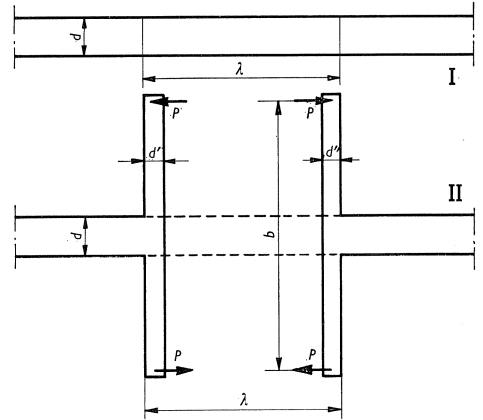


Fig. 8. Principe stijfheidsvervangers.

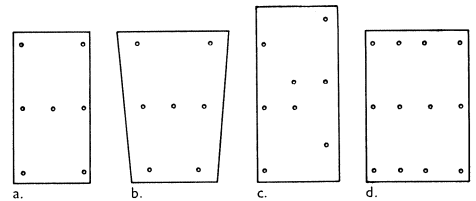


Fig. 9. Plaatjes voor stijfheidsvervangers.

- a: normale plaatjes
- b: plaatjes voor hoekverdraaiing (moment)
- c: plaatjes voor dwarsverplaatsing (dwarskracht)
- d: plaatjes voor langsverplaatsing (normaalkracht)

kunnen dan met behulp van boutjes de constructie bij elkaar houden. Het is gewenst gebleken, ringetjes tussen de messingplaatjes en het perspex aan te brengen om wrijvingskrachten te vermijden.

Bij het onderzoek zijn deze stijfheidsvervangers ook toegepast in hoekpunten. Ze bestaan dan feitelijk uit twee halve stijfheidsvervangers, daar de twee aankomende staven meestal een verschillende EI hebben. Ook halve stijfheidsvervangers zijn toegepast. De stijfheidsvervangers in hoekpunten bleken niet tot bijzonder goede resultaten te leiden. De halve, die dan gewoon met een paar boutjes aan de staaf zitten, gaven behoorlijke resultaten.

Om nu een hoekverdraaiing (knik in de staaf) aan te brengen, gebruikt men een wigvormig plaatje, zodanig, dat de knik in de staaf $0,1$ rad bedraagt (zie fig. 9b). Voor het bepalen van invloedslijnen voor dwarskrachten gebruikt men plaatjes, waarvan de gaatjes verspringen (zie fig. 9c). Voor normaalkrachten plaatjes, waarvan de gaatjes dichter bij elkaar resp. verder van elkaar af staan (zie fig. 9d). De verbinding van de staven in hoekpunten geschiedt, door ze met een klein stukje perspex aan elkaar te lijmen.

Toepassingen

Bij het uitgevoerde onderzoek is de besproken methode gebruikt om van twee spanten een aantal invloedslijnen te bepalen, welke vergeleken werden met invloedslijnen die bepaald waren met behulp van de rekenmethode Cross. Zoals uit de resultaten blijkt, is de bereikte nauwkeurigheid heel goed. Van elk te onderzoeken spant zijn steeds 3 modellen gemaakt, te weten: een bandstaalmodel (zie fig. 10), een perspexmodel met stijfheidsvervangers (zie fig. 11) en een perspexmodel zonder stijfheidsvervangers. In de figuren 12, 13 en 14 zijn de resultaten grafisch weergegeven.

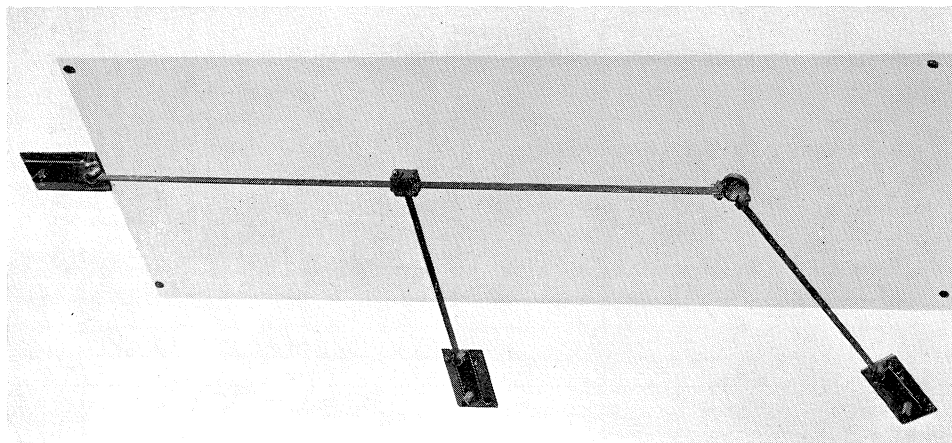


Fig. 10. Bandstaalmodel.

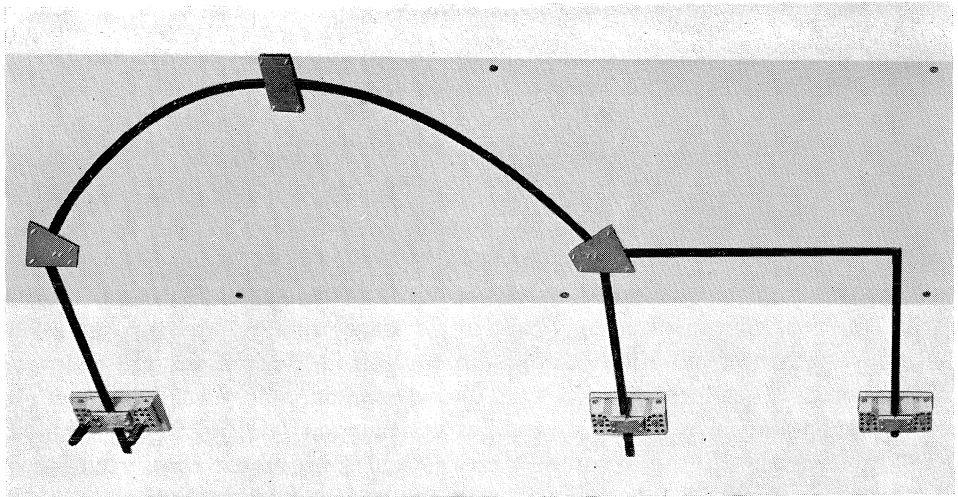


Fig. 11. Perspexmodel met stijfheidsvervangers.

Fig. 12 geeft de invloedslijnen voor de oplegreacties. De afwijkingen tussen berekening en experiment zijn in het algemeen vrij klein. De grootste fouten zijn in de orde van 5%. Vooral bij de invloedslijnen voor horizontale en verticale reacties zijn afwijkingen bijna niet aan te wijzen. De aangebrachte verplaatsingen bedroegen +1 en -1 cm, de aangebrachte verdraaiing +0,2 en -0,2 rad. voor het bandstaalmodel en +0,1 en -0,1 rad. voor het perspexmodel. Bij onderlinge vergelijking van de perspexmodellen (het eerste met stijfheidsvervangers, het tweede zonder) zijn geen grote verschillen aan te

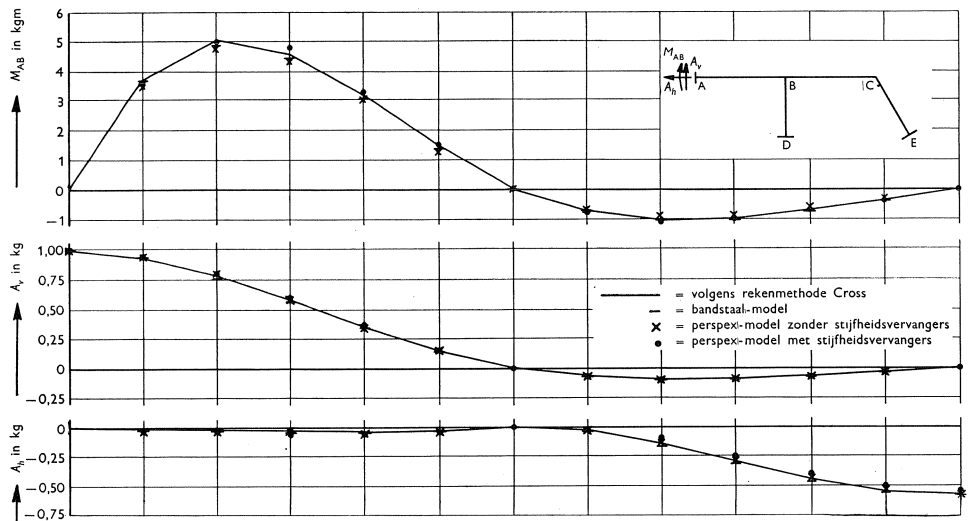


Fig. 12. Invloedslijnen voor reacties in punt A.

wijzen. In het algemeen slaat de balans iets ten gunste van de modellen zonder stijfheidsvervangers uit.

Fig. 13 geeft de invloedslijnen voor de oplegreacties in de inklemming A van het boogspant. Ook hier stemmen berekening en experiment goed overeen. De meettechniek voor de bandstaalmodellen was hier verbeterd; de resultaten zijn daardoor voor deze modellen nog beter dan in het vorige geval. Ook bij dit spant is weer een vergelijking gemaakt tussen het model met en dat zonder stijfheidsvervangers. Ook hier waren de verschillen niet groot; ze vielen eveneens iets ten gunste van het model zonder stijfheidsvervangers uit.

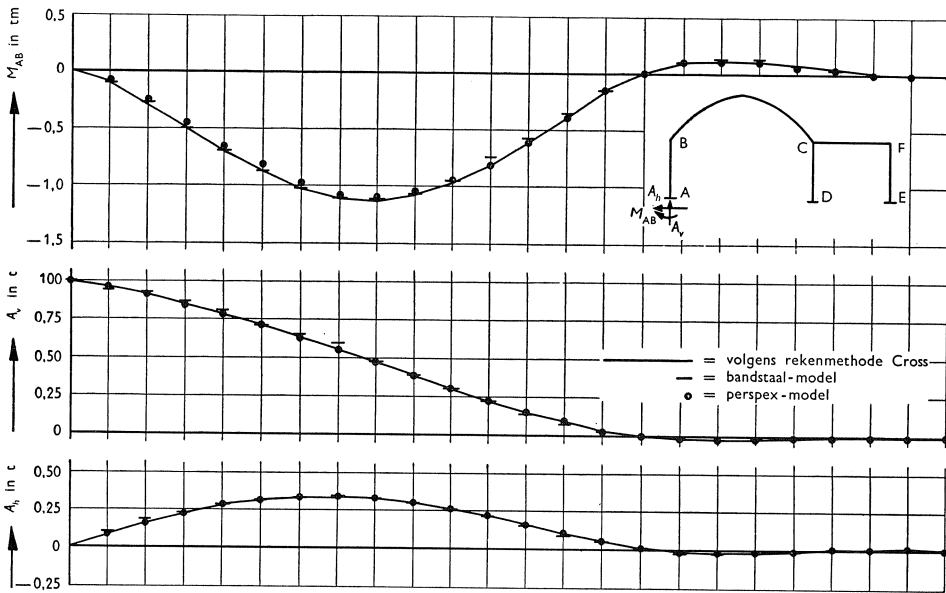


Fig. 13. Invloedslijnen voor reacties in punt A.

Fig. 14 tenslotte geeft de invloedslijnen voor de momenten in enkele knooppunten van het boogspant. Met het bandstaalmodel zijn hierbij uitstekende resultaten bereikt. De invloedslijnen van het perspexmodel zijn bepaald met behulp van stijfheidsvervangers. Vermoedelijk heeft de zeer ingewikkelde vorm van de hier gebruikte stijfheidsvervangers de resultaten beïnvloed. Ook de omstandigheid, dat in hoekpunten altijd een momentenpiek optreedt, terwijl een stijfheidsvervanger wordt berekend onder aanname van een constant moment, kan hier het resultaat beïnvloed hebben.

Aankankelijk waren de resultaten van het bandstaalmodel ook vrij slecht; dit bleek te liggen aan een klein oneindig stijf stukje van de verdraaiingsklem. Een berekening wees uit, dat een oneindig stijf stukje van 1,5 cm op een lengte van de staaf van 30 cm aanleiding gaf tot fouten van 24%. Het is dus zaak de oneindig stijve stukjes zo klein mogelijk te houden. In hoekpunten komen ook

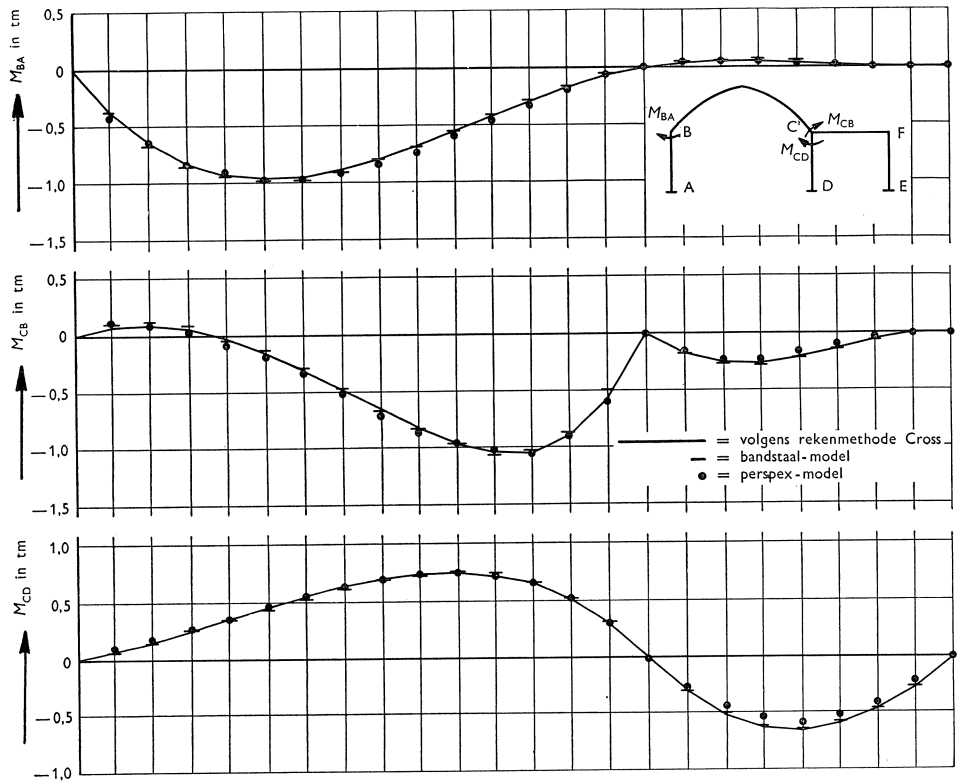


Fig. 14. Invloedslijnen voor de momenten in de punten B en C.

oneindige stijve stukjes voor. Zijn de samenkomende staven even lang, dan blijkt de fout juist te worden geëlimineerd. Bij ongelijke lengten vindt echter ook een belangrijke nivellering plaats, zodat de hierdoor ontstane fouten slechts van geringe betekenis zijn.

Het bepalen van een invloedslijn duurt ongeveer een half uur. Dat is de tijd vanaf het onderschuiven van het papier tot en met het overbrengen op een grafiek. Beschouwt men nu het behandelde boogspant. Het is 6-voudig statisch onbepaald. In twee dagen zou men experimenteel het spant geheel kunnen berekenen. Het is ook berekend met de methode Cross. Dit heeft aanmerkelijk langer geduurd. Deze tijden mogen echter niet zonder meer met elkaar vergeleken worden. Zou men namelijk een dergelijk spant willen berekenen, dan gaat men uit van de belasting zoals die er is en zal men geen invloedslijnen bepalen, doch rechtstreeks de momenten berekenen. Op deze manier zou het spant aanzienlijk vlugger uitgerekend kunnen worden. Toch zou dit nog vele malen langer duren dan een berekening via het experiment. Een grote tijdswinst is met deze experimentele methode dus te boeken.

Deze tijdsbesparing is speciaal van belang als men zoekt naar de meest

economische stijfheidsverhouding. Bij de berekening toch, gaat men uit van een bepaalde stijfheidsverhouding en bepaalt hierbij de momenten. De verhouding van deze momenten zal in het algemeen niet in overeenstemming zijn met de gekozen stijfheidsverhouding. Men zal dus meer gevallen moeten onderzoeken, alvorens men de juiste stijfheidsverhouding heeft gevonden. Bij een praktisch geval, dat werd onderzocht, bleek men 5 keer te moeten "Crossen". Rekenenderwijs is dit haast niet te doen. Experimenteel zou het met weinig moeite gedaan kunnen worden.

Het is niet nodig alle invloedslijnen te bepalen. Volstaan zou kunnen worden met de bepaling van de invloedslijnen voor de statisch onbepaalden. Het is echter gewenst om ter controle nog enkele grootheden extra te bepalen.

Voor controle-berekeningen kan de methode zeer goed gebruikt worden. Gemaakte fouten kunnen er mee worden opgespoord, hetgeen bij het onderzoek enkele malen is voorgekomen.

Conclusies

1. Wat de modellen betreft, verdient het aanbeveling, de modellen niet te klein te maken. Bij bandstaalmodellen is 30 cm een goede maat voor de meest gangbare staven. Als minimum lengte kan b.v. 20 cm aangehouden worden. Oneindig stijve stukjes houde men zo klein mogelijk. De breedte der staven kan op 1 cm voor de meest gangbare staaf gesteld worden.
2. Wat de verdraaiingen en verplaatsingen betreft, is gebleken, dat voor de bandstaalmodellen een hoekverdraaiing van 0,2 rad. tot prima resultaten leidde. Bij de perspexmodellen is een verdraaiing van 0,1 rad. het meest aan te bevelen. Een grotere verdraaiing (b.v. 0,2 radiaal) gaf nog iets nauwkeuriger resultaten, doch hierbij was het gevaar, dat er storingen in het model optraden vrij groot. De verdraaiing van 0,1 radiaal gaf echter zeer goede resultaten. Voor horizontale en verticale verplaatsingen is in beide gevallen een verplaatsing van 1 cm naar beide zijden het beste.
3. Over de nauwkeurigheid kan gezegd worden, dat de meest nauwkeurige resultaten bereikt werden met een perspexmodel zonder stijfheidsvervangers. Daarna volgt het bandstaalmodel, terwijl het model van perspex met stijfheidsvervangers tot de minst goede resultaten leidde. Deze waren echter nog zeker aanvaardbaar. Stijfheidsvervangers in hoekpunten leidden tot minder goede resultaten. Het is aan te bevelen, het aanbrengen van stijfheidsvervangers te beperken tot middens van staven. De grootste fouten waren in de orde van 5%. Slechts in enkele gevallen werden wat grotere fouten geconstateerd. Boven 10% kwamen ze in het algemeen echter niet uit, wat voor statisch onbepaalde constructies zeer zeker voldoende is.
4. De met deze methoden te maken tijdwinst is zeer groot. Vooral bij het opsporen van de meest economische constructie is de methode zeer aan te bevelen.

Literatuur

- [1] BEGGS, G. E., The use of models in the solution of indeterminate structures. Journal Franklin Institute **203** (1927) no. 3, p. 375-386.
- [2] RIECKHOF, CHR., Experimentelle Statik. Darmstadt, Selbstverlag Rieckhof, 1927.
- [3] GOTTSCHALK, O., Mechanical calculation of elastic systems. Journal Franklin Institute **202** (1926) no. 1, p. 61-87 en —, The experiment in statics. Journal Franklin Institute **207** (1929) no. 2, p. 245-260.
- [4] MASSONNET, CH., L'étude des constructions sur modèles réduits sans emploi de microscopes. L'influenciomètre du Professeur ENEY. Bulletin CERES (Centre d'Etudes de Recherches et d'Essais Scientifique-Université de Liège) Tome VI (1953) p. 405-453.
- [5] ENEY, W. J., A large displacement deformeter apparatus for stress analysis with elastic models. Proceedings Society Experimental Stress Analysis, vol. VI, no. II, p. 84-93.
- [6] NORRIS, C. H., Model analysis of structures. Proceedings Society Experimental Stress Analysis, vol. I, no. I, p. 18-42.
- [7] CHARLTON, T. M., Model analysis of structures. London, Spon, 1954.

Summary

Maxwells' reciprocal law gives a possibility for determining influence lines of statically indeterminate structures with the help of small models. Beggs [1] was the first to apply this principle, however he used very small deformations, which give rise to serious measuring difficulties.

Other investigators have used large displacements, but their apparatus and measuring technique was much too complicated to come into general use. In this article a new apparatus and measuring technique are described, using large displacements, which have the advantage of being at the same time simple, accurate, fast and cheap. Moreover a permanent record of the readings is obtained for checking results later on.

Probably many design offices may have a great help of this apparatus in computing statically indeterminate structures.