

RANDSTORINGEN BIJ AXIAAL-SYMMETRISCH BELASTE OMWENTELINGSSCHALEN

In dit artikel wordt allereerst de theorie van de axiaal-symmetrisch belaste cilinderschaal, die analoog is met de theorie van de elastisch ondersteunde ligger, kort gememoreerd. Voor een serie basisgevallen worden eenvoudige formules afgeleid. Het begrip meewerkende breedte wordt ingevoerd, hetgeen in veel gevallen tot een snelle oplossing leidt.

De toepassing van deze formules wordt geïllustreerd aan de hand van een aantal voorbeelden: buizen onder overdruk of voorspanning, reservoirs of silo's en ook cilindrische ton- of shedschalen, waarbij geen axiale symmetrie aanwezig is.

Het toepassingsgebied van de afgeleide formules behoeft echter niet beperkt te blijven tot cilindrische schalen. Zoals bekend past men b.v. bij het berekenen van de randstoringen in bolschalen de benaderingsmethode van Geckeler toe. Deze gaat uit van een vereenvoudigde differentiaalvergelijking, die in feite de differentiaalvergelijking is van een axiaal-symmetrisch belaste cilinder. De rechtvaardiging van deze benaderingsmethode ligt in het feit, dat de randstoringen zich slechts over een smalle zone nabij de rand uitstrekken. De afgeleide formules kunnen daarom ook bij bolschalen worden gebruikt.

De toepassing op bolschalen wordt aan de hand van de volgende voorbeelden toegelicht: een bolschaal bij temperatuursverhoging en een bolschaal onder eigen gewicht, waarbij over de wringingsstijfheid van de randbalk verschillende onderstellingen worden gedaan.

Toepassing van deze benaderingsmethode op andere omwentelingsschalen zoals kegels, hyperboloïden enz. zal in veel gevallen mogelijk zijn.

I THEORIE

De theorie van de axiaal-symmetrisch belaste cilinderschaal is analoog met die van de elastisch ondersteunde ligger.

Wordt een ligger met constant traagheidsmoment I , belast door een verdeelde belasting $q(x)$, over zijn gehele lengte, elastisch ondersteund, waarbij

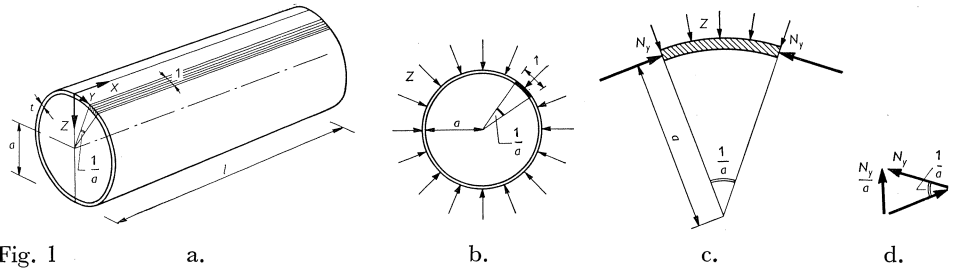


Fig. 1

de tegendruk evenredig is met de doorbuiging van de ligger, dan luidt, zoals bekend, de differentiaalvergelijking voor de doorbuiging w :

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q \quad \dots \dots \dots (1)$$

waarin: EI = de buigingsstijfheid van de ligger
 k = de beddingconstante

Bij een cilindrische schaal met straal a en constante wanddikte t , axiaal-symmetrisch belast door een verdeelde belasting Z per eenheid van oppervlak (zie fig. 1), heeft een radiale verplaatsing w naar binnen een rek ϵ_y in omtreksrichting tengevolge, welke gelijk is aan de rek in radiale richting $\epsilon_z = -\frac{w}{a}$.

Hierdoor ontstaat een kracht in omtreksrichting N_y , in het vervolg ringkracht genoemd, welke gelijk is aan:

$$N_y = \sigma_y t = E \epsilon_y t = -Et \frac{w}{a} \quad \dots \dots \dots (2)$$

Wordt uit de cilinderschaal een ligger met breedte 1 gesneden (zie fig. 1), dan werken op de zijvlakken de krachten N_y (zie fig. 1c) volgens (2). Deze krachten N_y hebben een radiale component (zie fig. 1d):

$$\frac{N_y}{a} = -Et \frac{w}{a^2} \quad \dots \dots \dots (3)$$

De beschouwde ligger wordt als het ware elastisch ondersteund door de rest van de cilinderschaal, waarbij de tegendruk evenredig is met de radiale verplaatsing. Deze tegendruk vermindert dus de radiale belasting Z en in analogie met vergelijking (1) luidt dus de vergelijking voor de axiaal-symmetrisch belaste cilinderschaal:

$$K \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Et}{a^2} w = Z \quad \dots \dots \dots (4)$$

waarbij: K = de buigingsstijfheid van de cilinderschaal = $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$
 ν = de dwarscontractiecoëfficiënt.

Deze vergelijking laat zich ook schrijven als:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 t^2} w = \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} Z \dots \dots \dots (5)$$

Wordt in vgl. (1) $\frac{k}{EI}$ en in vgl. (4) $\frac{Et/a^2}{K}$ of in vgl. (5) $\frac{12(1-\nu^2)}{a^2 t^2}$ gelijk gesteld aan $4\lambda^4$, dan gaan de gereduceerde vergelijkingen voor beide gevallen over in:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = 0 \dots \dots \dots (6)$$

waarvan de oplossing luidt:

$$w = e^{-\lambda x} \{c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x\} + e^{+\lambda x} \{c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x\} \dots \dots (7)$$

Voor de particuliere integraal kan, indien de vierde afgeleide naar x van de belastingsterm gelijk nul is, wat bij praktische toepassingen in het algemeen het geval zal zijn, gesteld worden:

bij de elastisch ondersteunde ligger:

$$w = \frac{q}{k} \dots \dots \dots (8)$$

bij de cilinderschaal:

$$w = \frac{a^2}{Et} Z \text{ of } N_y = -aZ \dots \dots \dots (9)$$

hetgeen de oplossing voor de membraanspanningstoestand is, waarbij geen buiging van het schaaloppervlak voorkomt.

De oplossing (7), die de invloed van de randvoorwaarden weergeeft en daarmee bij de cilinderschaal de storingen van de membraanspanningstoestand, bestaat uit twee gedempte golven, waarbij de amplitude van de eerste afneemt in positieve x -richting, terwijl de amplitude van de tweede afneemt in negatieve x -richting, dus aangroeit in positieve x -richting. Is de cilinder in positieve x -richting oneindig lang, dan zouden de beide laatste termen in (7) aanleiding geven tot oneindig grote verplaatsingen op oneindig grote afstand, hetgeen bij eindige belastingen niet in overeenstemming met de werkelijkheid zou zijn. De in deze termen voorkomende constanten c_3 en c_4 zijn dus nul. De beide eerste termen geven op oneindig grote afstand een verplaatsing gelijk nul. De constanten c_3 en c_4 zijn dus bepaald met behulp van de randvoorwaarden op oneindig grote afstand, de constanten c_1 en c_2 moeten nog worden bepaald met behulp van de randvoorwaarden voor de nader te beschouwen rand.

Nu is bij cilinderschalen de „beddingconstante” $\frac{Et}{a^2}$ zeer groot. De elas-

tische ondersteuning is dus zeer stijf, zodat de golven snel worden gedempt. Dit houdt in, dat cilinderschalen in de praktijk meestal als oneindig lang mogen worden beschouwd en dat voor het onderzoek van de storingen in de schaal kan worden volstaan met het in rekening brengen van de beide eerste termen uit vergelijking (7), welke dus een gedempte golf voorstellen die van de beschouwde rand uitgaat.

Dikwijls heeft het voordelen deze uitdrukking te schrijven in de volgende vorm, waarbij een faseverschuiving ω wordt ingevoerd:

$$w = A e^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \omega) \quad (10)$$

welke uitdrukking uit (7) is afgeleid door te stellen: $c_1 = A \sin \omega$, $c_2 = A \cos \omega$. De oplossing van de differentiaalvergelijking (4) c.q. (5) voor de axiaal-symmetrisch belaste cilinderschaal, waarvan in het volgende zal worden uitgegaan, luidt dan:

$$w = \frac{a^2}{Et} Z + A e^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \omega) \quad (11)$$

De ringkracht N_y kan hieruit worden afgeleid met behulp van vergelijking (2).

Door differentiëren wordt achtereenvolgens gevonden:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{a^2}{Et} \frac{d}{dx} Z - \lambda A \sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \omega - \pi/4) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} M_x &= -K \frac{d^2 w}{dx^2} = \\ &= -K \frac{a^2}{Et} \frac{d^2}{dx^2} Z - K 2\lambda^2 A e^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \omega - \pi/2) \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= -K \frac{d^3 w}{dx^3} = \\ &= -K \frac{a^2}{Et} \frac{d^3}{dx^3} Z + K 2\lambda^3 \sqrt{2} A e^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \omega - 3\pi/4) \quad . . . (14) \end{aligned}$$

Wordt de particuliere integraal buiten beschouwing gelaten, dan blijkt het verloop van w , $\frac{dw}{dx}$, M_x en Q_x gelijkvormig te zijn, waarbij een opvolgende grootte steeds een faseverschuiving van $\pi/4$ vertoont.

Gezien de analogie tussen de vergelijking voor de elastisch ondersteunde ligger en de axiaal-symmetrisch belaste cilinderschaal kunnen voor de cilinderschaal tal van oplossingen worden ontleend aan overeenkomstige bekende gevallen voor de elastisch ondersteunde ligger.

De volgende basisgevallen a t/m d zijn nader onderzocht.

Basisgeval a

De oneindig lange cilinder, belast door een constante radiaal gerichte lijnlast $2P$ in omtreksrichting (zie fig. 2, pag. 35)

Dit geval is uit symmetrie-overwegingen gelijk aan dat van:

De naar één zijde oneindig lange cilinder, aan het uiteinde zodanig ingeklemd, dat geen verdraaiingen doch wel verplaatsingen kunnen optreden en daar belast door een constante radiaal gerichte lijnlast P in omtreksrichting (zie fig. 2).

De belastingsterm $Z = 0$. De constanten A en ω volgen uit de randvoorwaarden:

$$(12): \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{4} \dots \dots \dots (15)$$

$$(14): \quad (Q_x)_{x=0} = -P \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{4K\lambda^3} P\sqrt{2} = P\lambda\sqrt{2} \frac{a^2}{Et} \dots \dots \dots (16)$$

Substitutie hiervan in de uitdrukkingen (11) t/m (14) geeft voor dit geval de verplaatsing w , de helling $\frac{dw}{dx}$, het buigend moment M_x en de dwarskracht Q_x :

$$w = + P\lambda\sqrt{2} \frac{a^2}{Et} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right) \dots \dots \dots (17)$$

$$\frac{dw}{dx} = - 2P\lambda^2 \frac{a^2}{Et} e^{-\lambda x} \sin \lambda x \dots \dots \dots (18)$$

$$M_x = - \frac{P}{2\lambda} \sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right) \dots \dots \dots (19)$$

$$Q_x = + P e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{2}\right) \dots \dots \dots (20)$$

Voor het verloop van de verschillende grootheden zij verwezen naar fig. 2.

De maximum-verplaatsing treedt op onder de last en bedraagt:

$$w_{x=0} = \frac{P\lambda a^2}{Et} \dots \dots \dots (21)$$

Het maximum-moment, dat eveneens onder de last optreedt, bedraagt:

$$(M_x)_{x=0} = + \frac{P}{2\lambda} \dots \dots \dots (22)$$

Wordt ingevoerd een „karakteristieke lengte“:

$$b = \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{at}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \dots \dots \dots (23a)$$

dan kan voor uitdrukking (22) ook worden geschreven:

$$(M_x)_{x=0} = + \frac{1}{4}(2P)b \dots \dots \dots (24)$$

dat is het maximum-moment in een aan beide einden vrij opgelegde ligger met overspanning b , belast door een puntlast $2P$ in het midden.

Voor $\nu = 0$ wordt $b = 0,76 \sqrt{at}$ (23b)

De ringkracht N_y verloopt evenredig met w - zie vgl. (2). De belasting P wordt in evenwicht gehouden door de radiale componenten N_y/a van deze ringkrachten over de totale lengte van de cilinder. Daar de dwarskracht $Q_x = 0$ is voor $\lambda x = \pm \frac{\pi}{2}$, wordt de belasting $2P$ ook in evenwicht gehouden door de radiale componenten N_y/a van de ringkrachten over het gebied $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$. Het gebied buiten deze grenzen tot het eerstkomende nulpunt in het verloop van N_y/a levert dus een teveel aan tegendruk, wat weer gecompenseerd wordt door een neerwaartse druk over een gebied van $3 \times \frac{\pi}{4}$ na dit nulpunt. Een daaropvolgend gebied ter lengte $\frac{\pi}{4}$ levert weer een teveel enz., waaruit het gedempte karakter van het verloop blijkt. Wordt nu de ringkracht N_y over een zekere breedte c aan weerszijden van de belasting $2P$ constant ondersteld en wel gelijk aan de maximale waarde hiervoor bij $x = 0$, dan kan deze breedte c zodanig worden bepaald, dat de radiale component van de in het gebied $2c$ aanwezige ringkrachten juist evenwicht maakt met de belasting $2P$. Het gebied $2c$ wordt *meewerkende breedte* genoemd. De voorwaarde, waarmee deze breedte kan worden bepaald, luidt dus:

$$-2c \frac{(N_y)_{x=0}}{a} = 2P \quad \dots \dots \dots (25a)$$

Met behulp van de formules (3) en (21) volgt hieruit:

$$2c \frac{Et}{a^2} w_{x=0} = 2c \frac{Et P \lambda a^2}{a^2 Et} = 2c \lambda P = 2P$$

dus $c = \frac{1}{\lambda} = b \quad \dots \dots \dots (26)$

Daar de ringkracht evenredig is met de verplaatsing, kan de voorwaarde voor het bepalen van c ook met behulp van de verplaatsingen worden opgesteld. Deze voorwaarde luidt dan:

$$w_{x=0} c = \int_0^{\infty} w dx \quad \dots \dots \dots (27)$$

Substitutie van de uitdrukkingen (21) en (17) en uitvoering van de integratie leidt eveneens tot de bovenvermelde uitkomst (26).

Nu de meewerkende breedte c bekend is, kan dus ook met behulp van (25a) direct de maximale waarde van de ringkracht worden bepaald:

$$(N_y)_{x=0} = -\frac{2Pa}{2b} = -Pa\lambda \quad \dots \dots \dots (25b)$$

Het maximum-moment volgens (24) kan met behulp van (21) worden uitgedrukt in de maximum-verplaatsing:

$$(M_x)_{x=0} = \frac{Et^2}{2a\sqrt{3}(1-\nu^2)} w_{x=0} \dots \dots \dots (28)$$

en met behulp van (25b) in de maximum-ringkracht:

$$(M_x)_{x=0} = \frac{-t}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)} (N_y)_{x=0} \dots \dots \dots (29)$$

en dus ook in de maximum-ringspanning $(\sigma_y)_{x=0} = (N_y)_{x=0}/t$:

$$(M_x)_{x=0} = \frac{-1}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)} (\sigma_y)_{x=0} t^2 \dots \dots \dots (30)$$

Voor een dwarscontractiecoëfficiënt $\nu = 0$ wordt gevonden:

$$(M_x)_{x=0} = -0,289 (\sigma_y)_{x=0} t^2 \dots \dots \dots (31)$$

waardoor bij een homogene doorsnede een buigspanning wordt veroorzaakt:

$$(\sigma_x)_{x=0} = \pm \frac{(M_x)_{x=0}}{1/6 t^2} = \mp \sqrt{3} (\sigma_y)_{x=0} \dots \dots \dots (32)$$

Basisgeval b

De naar één zijde oneindig lange cilinder, aan het uiteinde belast door een radiaal gerichte lijnlast P in omtreksrichting (zie fig. 3, pag. 35)

De belastingsterm $Z = 0$. De constanten A en ω volgen uit de randvoorwaarden:

$$(13): \quad (M_x)_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (33)$$

$$(14): \quad (Q_x)_{x=0} = -P \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2K\lambda^3} P = 2P\lambda \frac{a^2}{Et} \dots \dots \dots (34)$$

Substitutie hiervan in (11) t/m (14) geeft voor dit geval de verplaatsing w , de helling $\frac{dw}{dx}$, het buigend moment M_x en de dwarskracht Q_x :

$$w = 2P\lambda \frac{a^2}{Et} e^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \pi/2) \dots \dots \dots (35)$$

$$\frac{dw}{dx} = -2 P\lambda^2 \sqrt{2} \frac{a^2}{Et} e^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \pi/4) \dots \dots \dots (36)$$

$$M_x = -\frac{P}{\lambda} e^{-\lambda x} \sin \lambda x \dots \dots \dots (37)$$

$$Q_x = P \sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right) \dots \dots \dots (38)$$

Het verloop van de grootheden is weergegeven in fig. 3.

De maximum-verplaatsing komt voor onder de last en bedraagt:

$$w_{x=0} = \frac{2P\lambda a^2}{Et} \dots \dots \dots (39)$$

Dit is tweemaal zo veel als in basisgeval a (formule 21).

De dwarskracht $Q_x = 0$ in het punt $x = \frac{\pi}{4\lambda}$. Hier treedt dus het maximum-moment op dat bedraagt:

$$(M_x)_{x=\frac{\pi}{4\lambda}} = -\frac{P}{\lambda} e^{-\pi/4} \sin \pi/4 = -\frac{P}{\lambda} 0,456 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = -0,322 \frac{P}{\lambda} \quad (40)$$

De ringkracht N_y bedraagt: $N_y = \frac{-Et}{a} w$. De maximum-ringkracht treedt dus op ter plaatse $x = 0$ en deze bedraagt:

$$(N_y)_{x=0} = \frac{-Et}{a} w_{x=0} = -2P\lambda a \dots \dots \dots (41a)$$

Wordt de ringkracht N_y weer over een zekere breedte c naast de belasting P constant ondersteld en gelijk gesteld aan de maximale waarde bij $x = 0$, dan kan deze breedte c weer zo worden bepaald, dat de radiale component van de in dit gebied aanwezige ringkrachten juist evenwicht maakt met de belasting P . De voorwaarde voor het bepalen van c luidt dus:

$$\frac{-(N_y)_{x=0}}{a} c = P \quad \text{of} \quad +2P\lambda c = P \dots \dots \dots (42)$$

Hieruit volgt: $c = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2}b \dots \dots \dots (43)$

Nu de meewerkende breedte bekend is, kan dus rechtstreeks de maximale waarde van de ringkracht worden bepaald:

$$(N_y)_{x=0} = -\frac{Pa}{\frac{1}{2}b} = -2Pa\lambda \dots \dots \dots (41b)$$

Het maximum-moment volgens (40) kan met behulp van (39) worden uitgedrukt in de maximum-verplaatsing:

$$(M_x)_{x=\frac{\pi}{4\lambda}} = -0,161 \frac{Et}{\lambda^2 a^2} w_{x=0} = -0,093 \frac{Et^2}{a\sqrt{1-\nu^2}} w_{x=0} \dots \dots (44)$$

en met behulp van (41) in de maximum-ringkracht:

$$(M_x)_{x=\frac{\pi}{4\lambda}} = +0,322 \frac{(N_y)_{x=0}}{2\lambda^2 a} = +0,093 \frac{(N_y)_{x=0} t}{\sqrt{1-\nu^2}} \dots \dots \dots (45)$$

en dus ook in de ringspanning $(\sigma_y)_{x=0} = (N_y)_{x=0}/t$:

$$(M_x)_{x=\frac{\pi}{4\lambda}} = +0,093 \frac{(\sigma_y)_{x=0} t^2}{\sqrt{1-\nu^2}} \dots \dots \dots (46)$$

Voor een dwarscontractiecoëfficiënt $\nu = 0$ wordt dit:

$$(M_x)_{x=\frac{\pi}{4\lambda}} = +0,093 (\sigma_y)_{x=0} t^2 \dots \dots \dots (47)$$

waardoor bij een homogene doorsnede een buigspanning wordt veroorzaakt:

$$(\sigma_x)_{x=\frac{\pi}{4\lambda}} = \pm \frac{(M_x)_{x=\frac{\pi}{4\lambda}}}{1/6 t^2} = \pm 0,56 (\sigma_y)_{x=0} \dots \dots \dots (48)$$

Vergelijking van de uitdrukkingen (44) t/m (48) met de overeenkomstige uitdrukkingen (28) t/m (32) van basisgeval a laat zien, dat de eerste ongeveer 1/3 bedragen (exact 0,31) van de laatste. Bij eenzelfde verplaatsing $w_{x=0}$ of ringspanning $(\sigma_y)_{x=0}$ zijn de buigende momenten in basisgeval b dus overeenkomstig kleiner dan die in basisgeval a.

Basisgeval c

De naar één zijde oneindig lange cilinder, aan het uiteinde belast door een buigend moment M_0 (zie fig. 4, pag. 35)

De belastingterm $Z = 0$. De constanten A en ω volgen uit de randvoorwaarden:

$$(14): \quad (Q_x)_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{3\pi}{4} \dots \dots \dots (49)$$

$$(13): \quad (M_x)_{x=0} = M_0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{-M_0}{K\lambda^2\sqrt{2}} \dots \dots \dots (50)$$

Substitutie hiervan in de uitdrukkingen (11) t/m (14) geeft voor dit geval de verplaatsing w , de helling $\frac{dw}{dx}$, het buigend moment M_x en de dwarskracht Q_x :

$$w = \frac{-M_0}{K\lambda^2\sqrt{2}} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{3\pi}{4}\right) \dots \dots \dots (51)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{M_0}{K\lambda} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right) \dots \dots \dots (52)$$

$$M_x = M_0\sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right) \dots \dots \dots (53)$$

$$Q_x = -2\lambda M_0 e^{-\lambda x} \sin \lambda x \dots \dots \dots (54)$$

De maximale verplaatsing treedt op aan het uiteinde en bedraagt:

$$w_{x=0} = -\frac{M_0}{2K\lambda^2} \dots \dots \dots (55)$$

De helling is hier:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = \frac{M_0}{K\lambda} \dots \dots \dots (56)$$

Basisgeval d

De oneindig lange cilinder, plaatselijk belast door een buigend moment $2 M_0$ (zie fig. 5, pag. 35)

Uit overwegingen van keersymmetrie is dit geval gelijk aan dat van:

De naar één zijde oneindig lange cilinder, aan het uiteinde ondersteund en daar belast door een buigend moment M_0 (zie fig. 5).

De belastingsterm $Z = 0$. De constanten A en ω volgen uit de randvoorwaarden:

$$(11): \quad w_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = 0 \quad \dots \dots \dots (57)$$

$$(13): \quad (M_x)_{x=0} = M_0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2K\lambda^2} M_0 \quad \dots \dots \dots (58)$$

Substitutie hiervan in (11) t/m (14) geeft voor dit geval de verplaatsing w , de helling $\frac{dw}{dx}$, het buigend moment M_x en de dwarskracht Q_x :

$$w = \frac{M_0}{2K\lambda^2} e^{-\lambda x} \sin \lambda x \quad \dots \dots \dots (59)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{M_0}{K\lambda\sqrt{2}} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \dots \dots \dots (60)$$

$$M_x = -M_0 e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \dots \dots \dots (61)$$

$$Q_x = \lambda\sqrt{2} M_0 e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{3\pi}{4}\right) \quad \dots \dots \dots (62)$$

De helling φ ter plaatse van de oplegging bedraagt:

$$\varphi = \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = \frac{M_0}{2K\lambda} = \frac{M_0 b}{2K} \quad \dots \dots \dots (63)$$

De stijfheidsfactor tegen verdraaiing, dat is het moment nodig om een hoekverdraaiing gelijk aan de eenheid te veroorzaken, bedraagt dus:

$$k_c = \frac{2K}{b} \quad \dots \dots \dots (64)$$

De dwarskracht Q_x ter plaatse van de oplegging bedraagt:

$$(Q_x)_{x=0} = -\lambda M_0 = \frac{-M_0}{b} \quad \dots \dots \dots (65)$$

dat is de reactie in een vrij opgelegde ligger met lengte b , aan een uiteinde belast door een moment M_0 .

De uitkomsten van dit basisgeval d hadden uiteraard ook kunnen worden verkregen door superpositie van de basisgevallen b en c onder inachtneming van de randvoorwaarden.

De formules voor de basisgevallen a t/m d zijn met de formules voor enkele toepassingen verzameld in een tabel, die achter in dit nummer is afgedrukt. Hierbij kan worden opgemerkt, dat, voor zover het de vier basisgevallen a t/m d betreft, bij elke volgende kolom een faseverschuiving van $-\pi/4$ optreedt ten opzichte van de voorgaande kolom, terwijl van boven naar beneden het argument voor elke kolom per rij met $+\pi/4$ toeneemt.

Reeds is opgemerkt, dat de storingen, die bij een cilinderschaal van de rand kunnen uitgaan, snel worden gedempt. De demping wordt bepaald door de factor $e^{-\lambda x}$, welke in de verschillende formules voorkomt. Wordt een halve golf doorlopen, dat wil zeggen, neemt λx toe met een bedrag π , dan zal de absolute waarde van de amplitude afnemen in de verhouding $1 : e^{-\pi} = 1 : 0,04321$. Deze reductie treedt dus op over een afstand:

$$x = \frac{\pi}{\lambda} = \pi \frac{\sqrt{at}}{\sqrt[3]{3(1-\nu^2)}}$$

Voor een waarde $\nu = 0$ wordt dit:

$$x = 0,76 \pi a \sqrt{\frac{t}{a}}$$

Voor b.v. een verhouding $t/a = 1/25$ blijkt, dat over een afstand $x = 0,47 a$, dat is nog niet de helft van de straal, de absolute waarde van de amplitude voor de gedempte golf voor een willekeurige grootte afneemt tot enkele procenten. Dit houdt dus in, dat cilinderschalen in de praktijk meestal mogen worden berekend met behulp van de formules, welke in de voorafgaande basisgevallen a t/m d zijn afgeleid voor de oneindig lange cilinderschaal.

II TOEPASSINGEN

Met behulp van hetgeen in het voorgaande voor vier basisgevallen is afgeleid, kunnen in veel gevallen, zowel voor cilindrische schalen als voor axiaal-symmetrische schalen van andere vorm, op snelle en eenvoudige wijze de randstoringen worden bepaald, zoals uit het volgende moge blijken.

A CILINDRISCHE SCHALEN

Als toepassingen van cilindrische schalen kunnen b.v. worden genoemd: buizen, silo's, reservoirs, tunnels, schaaldaken.

Buizen Deze kunnen b.v. verkeren onder een inwendige overdruk p_0 , waardoor ter plaatse van aangebrachte verstijvingsringen een storing van de membraanspanningstoestand zal optreden. Ook kunnen zij onder voorspanning zijn gebracht door omwikkeling met een voorspandraad met een spoed s . Is in de draad een kracht T aanwezig, dan zal op de buis een radiale belasting $\frac{T}{s \cdot a}$ naar binnen worden uitgeoefend. Verstijvingsringen hebben dan eenzelfde storende invloed. Een ander geval van storing treedt op tijdens het omwikkelen bij de overgang van het voorgespannen naar het niet voorgespannen gedeelte.

Silo's Bij deze constructies kan veelal worden aangenomen, dat de druk op het wandoppervlak over het grootste gedeelte van de hoogte constant is. De uitkomsten, die voor buizen onder overdruk zullen worden afgeleid, zijn dus ook voor silo's bruikbaar. De mate van inklemming, b.v. aan de voet, bepaalt de aard en de grootte van de randstoring.

Reservoirs In dit geval zal de druk op het wandoppervlak lineair toenemen. Daar de storing in de membraanspanningstoestand, b.v. ter plaatse van de aansluiting van het wandoppervlak aan een funderingsplaat, zich slechts over een geringe hoogte zal uitstrekken, kunnen ter vereenvoudiging met een goede benadering de uitkomsten, die voor buizen onder overdruk zullen worden afgeleid, ook bij reservoirs worden toegepast, waarbij in de formules voor de (constante) radiale belasting p_0 de druk ter plaatse van de aansluiting kan worden gesubstitueerd. De mate van inklemming bepaalt de aard en de grootte van de randstoring. In werkelijkheid is de situatie dan iets gunstiger, omdat de belasting naar boven toe afneemt. Om een indruk te geven over de nauwkeurigheid van deze benadering zij vermeld, dat bij een volledige inklemming aan de voet het werkelijke maximale storingsmoment gelijk is aan het op de bovenbeschreven wijze verkregen moment, vermenigvuldigd met een correctiefactor $\frac{l-b}{l}$, waarin b de karakteristieke lengte (23)

en l de afstand van de inklemming tot het punt waar de belasting nul zou zijn (de drukhoogte) voorstelt. Een belasting op het wandoppervlak ten gevolge van een voorspanning kan op dezelfde wijze in rekening worden gebracht.

Tunnels Voor dunwandige cirkelvormige tunnelprofielen kunnen de voor buizen af te leiden formules ook bruikbaar zijn.

Schaaldaken Cilindrische ton- en shedschalen worden ondersteund door schotten of bogen. Ter plaatse van de aansluiting van de schaal aan deze ondersteuningsconstructies kunnen randstoringen worden verwacht. Ofschoon de in het voorgaande afgeleide formules en ook de voor buizen in het volgende nog af te leiden uitkomsten betrekking hebben op het geval van axiaal-symmetrische schalen onder axiaal-symmetrische belasting en ton- en shedschalen dus in feite niet onder dit geval ressorteren, kan toch met behulp van deze formules op snelle wijze een indruk van de grootte van deze randstoringen worden verkregen. De werkelijkheid zal niet veel van deze uitkomsten afwijken, daar de belasting langs de omtrek slechts weinig varieert.

1 Cilindrische schaal (buis) met plaatselijk een starre ondersteuning

Geval e Is een buis onder een constante radiaal naar buiten gerichte belasting p_0 plaatselijk van een oneindig stijf schot of een oneindig stijve ring voorzien (zie fig. 6 en 7), dan zal daar een storing van de membraanspanningstoestand optreden, omdat de radiale verplaatsing (naar buiten), die bij deze spanningstoestand behoort en die volgens (9) bedraagt:

$$w = \frac{-a^2}{Et} p_0 \dots \dots \dots (a)$$

ter plaatse van het schot wordt verhinderd. Het schot oefent hiertoe een constante radiaal gerichte lijnbelasting $2P$ in omtreksrichting uit en dienvolge kunnen de formules van basisgeval a worden toegepast. De maximale verplaatsing onder deze lijnbelasting is volgens (21):

$$w_{x=0} = \frac{P\lambda a^2}{Et} \dots \dots \dots (b)$$

De resulterende verplaatsing ter plaatse van het schot bedraagt dus:

$$\frac{-a^2}{Et} p_0 + \frac{P\lambda a^2}{Et} = 0$$

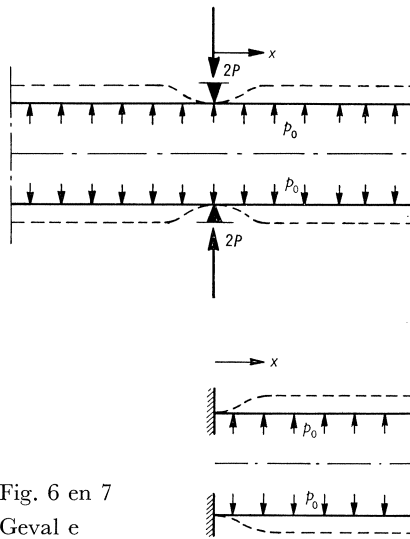


Fig. 6 en 7
Geval e

Hieruit volgt de grootte van de lijnbelasting:

$$2P = 2 \frac{p_0}{\lambda} = 2 p_0 b \dots \dots \dots (66)$$

De uitdrukkingen voor de hellingen, de momenten en de dwarskrachten volgen uit de formules (18) t/m (20) door hierin voor $2P$ bovenstaande waarde te substitueren. Het verloop van deze grootheden is dus overeenkomstig met dat in fig. 2. Op de verplaatsing volgens formule (17) dient nog de verplaatsing van de membraanspanningstoestand volgens (a) te worden gesuperponeerd, zodat resulteert een verplaatsing:

$$w = \frac{-p_0 a^2}{Et} \left[1 - \sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right) \right] \dots \dots \dots (67)$$

Het verloop is dus ook overeenkomstig met dat van fig. 2, slechts de nullijn is verschoven.

Het maximum-moment volgens (22) c.q. (24), dat optreedt ter plaatse van het schot, bedraagt nu:

$$(M_x)_{x=0} = + \frac{1}{2} p_0 b^2 \dots \dots \dots (68),$$

dat is juist het inklemmingsmoment van een uitgekraagde ligger, met lengte b en een constante gelijkmatig verdeelde belasting $-p_0$.

De maximum-dwarskracht komt eveneens voor ter plaatse van het schot en bedraagt:

$$(Q_x)_{x=0} = \pm P = \pm p_0 b \dots \dots \dots (69)$$

dat is juist de dwarskracht bij de inklemming van een uitgekraagde ligger met lengte b en belasting $-p_0$.

De doorbuiging w , die ter plaatse van het schot gelijk nul is, neemt met toenemende afstand tot het schot snel toe, waardoor spoedig de membraanspanningstoestand wordt bereikt. Voor de kracht N_y , die evenredig is met de verplaatsing volgens (2), geldt hetzelfde. In de membraanspanningstoestand bedraagt deze kracht volgens (9):

$$N_y = -p_0 a \dots \dots \dots (c)$$

In dit geval is er dus nabij het schot een zone, waar de belasting p_0 niet in evenwicht wordt gehouden door de radiale componenten N_y/a van de krachten N_y in omtreksrichting, doch waar dit mede geschiedt door de dwarskrachten Q_x . Worden de krachten N_y over een zekere breedte c ter weerszijden van het schot gelijk nul ondersteld, waardoor dus een geïdealiseerd verloop van N_y en Q_x wordt voorgesteld, dan blijkt, gezien de grootte van de maximale dwarskracht volgens (69), de waarde $c = b$ te zijn. Dat is dus dezelfde waarde als de meewerkende breedte bij het basisgeval a.

Geval f Is een buis onder een constante radiaal naar buiten gerichte belasting p_0 aan het uiteinde van een in zijn vlak oneindig stijf schot of een oneindig stijve ring voorzien (zie fig. 8), welke evenwel geen weerstand tegen verdraaiing bieden, dan zal ook daar een storing van de membraanspanningstoestand optreden. De radiale verplaatsing naar buiten in de membraanspanningstoestand, welke wederom bedraagt:

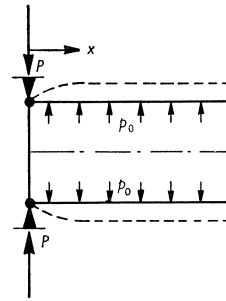


Fig. 8 Geval f

$$w = \frac{-a^2}{Et} p_0 \dots \dots \dots (a)$$

wordt weer teniet gedaan door een constante radiaal gerichte lijnbelasting P in omtreksrichting, die door het schot wordt uitgeoefend en ten gevolge waarvan onder deze lijnbelasting volgens basisgeval b een maximale verplaatsing optreedt (39):

$$w = \frac{2P\lambda a^2}{Et} \dots \dots \dots (d)$$

Uit de voorwaarde, dat de totale verplaatsing gelijk nul is, volgt dus:

$$P = \frac{+p_0}{2\lambda} = +\frac{1}{2}p_0b \dots \dots \dots (70)$$

De uitdrukkingen voor de hellingen, de momenten en de dwarskrachten volgen uit de formules (36) t/m (38), door hierin voor P bovenstaande waarde te substitueren. Het verloop van deze grootheden is dus overeenkomstig met die in fig. 3. Op de verplaatsing volgens formule (35) dient nog de verplaatsing in de membraanspanningstoestand volgens (a) te worden gesuperponeerd, zodat resulteert een verplaatsing:

$$w = \frac{-p_0a^2}{Et} \left[1 - e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right) \right] \dots \dots \dots (71)$$

Het verloop hiervan is dus ook overeenkomstig met dat van fig. 3, slechts de nullijn is verschoven.

Het maximum-moment volgens (40), dat optreedt op een afstand $x = \frac{\pi}{4\lambda}$ van het schot, bedraagt nu:

$$(M_x)_{x=\frac{\pi}{4\lambda}} = -0,161 p_0b^2 \dots \dots \dots (72)$$

De maximum-dwarskracht komt voor naast het schot en bedraagt:

$$(Q_x)_{x=0} = -P = -\frac{1}{2}p_0b \dots \dots \dots (73)$$

De lijnbelasting P , dat is de reactie van het schot, maakt dus evenwicht met de radiale belasting p_0 over de bij basisgeval b reeds afgeleide meewerkende breedte van $\frac{1}{2}b$.

De formules voor de gevallen e en f zijn eveneens vermeld in de tabel.

2 Cilindrische schaal (buis) met plaatselijk een verende ondersteuning

Geval g Is een buis voorzien van een niet oneindig stijf schot of van een ring met eindige rekstijfheid en daar ter plaatse belast door een constante radiaal gerichte lijnbelasting $2P$ in omtreksrichting (zie fig. 9a en 9b), dan zal deze belasting voor een deel $2P_c$ worden opgenomen door de buis en voor een deel $2P_r$ door de ring of het schot. De belasting P_r wordt evenredig ondersteld met de verplaatsing van het aangrijpingspunt:

$$2P_r = 2f w_{x=0} \dots \dots \dots (74)$$

Omdat de radiale verplaatsing van de ring of van het schot dezelfde is als van de buis daar ter plaatse, kan P_r met behulp van (21) ook worden uitgedrukt in de belasting P_c . Voor de totale belasting wordt dan gevonden:

$$\begin{aligned} 2P &= 2P_c + 2P_r = 2P_c + 2f w_{x=0} = 2P_c + 2f P_c \frac{\lambda a^2}{Et} = \\ &= 2P_c \left[1 + f \frac{\lambda a^2}{Et} \right] \dots \dots \dots (75) \end{aligned}$$

en dus
$$P_c = \frac{1}{1 + f \frac{\lambda a^2}{Et}} P = \frac{Etb}{Etb + fa^2} P \dots \dots \dots (76)$$

De formules (17) e.v. van basisgeval a blijven dus ook voor dit geval bruikbaar, mits hierin P wordt vervangen door P_c volgens formule (76).

Is de buis voorzien van een verstijvingsring met een zelfde straal a als de buis, een doorsnede $2E'$ en een elasticiteitsmodulus E' (zie fig. 9b), dan geldt voor de belasting P_r in analogie met formule (3):

$$2P_r = 2E'F \cdot \frac{w}{a^2} \dots \dots \dots (77a)$$

en dus
$$f = \frac{E'F}{a^2} \dots \dots \dots (78)$$

Substitutie hiervan in (76) leidt tot:

$$P_c = \frac{Etb}{Etb + E'F} P \dots \dots \dots (79)$$

De belasting P_r op de ring bedraagt:

$$P_r = \frac{E'F}{Etb + E'F} P \dots \dots \dots (80)$$

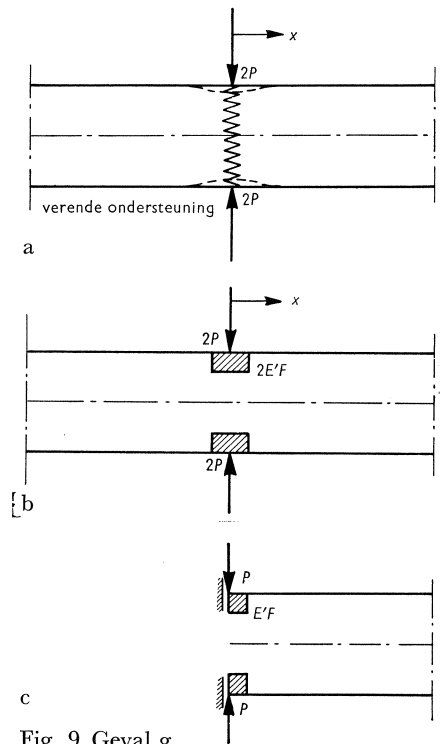


Fig. 9 Geval g

Uit deze laatste formule blijkt de reductie van de belasting op de ring $2P_r$ ten opzichte van de totale belasting $2P$, ten gevolge van de meewerkende breedte van de buis over een afstand b aan weerszijden van de ring. De reductiefactor is dus gelijk aan de verhouding van de rekstijfheid van de ring en de som van de rekstijfheden van de ring en de meewerkende breedte van de cilinder.

Uit symmetrie-overwegingen is het behandelde geval ook gelijk aan dat van een buis, die aan een uiteinde zodanig is ingeklemd, dat geen verdraaiingen doch wel verplaatsingen kunnen optreden. Deze buis is voorts aan dit uiteinde verend ondersteund en daar belast door een constante radiaal gerichte lijnlast P in omtreksrichting (zie fig. 9c). Van deze belasting P wordt nu een deel P_c opgenomen door de buis en een deel P_r door de verstijvingsring of het schot. Is de buis voorzien van een verstijvingsring met een doorsnede F , dan geldt voor de belasting P_r :

$$P_r = E'F \frac{w}{a^2} \dots \dots \dots (77b)$$

waaruit dezelfde waarde volgens formule (78) volgt voor f . De formules (79) en (80) zijn dus ook voor dit geval bruikbaar.

Geval h Is een buis, voorzien van een niet oneindig stijf schot of van een ring met eindige rekstijfheid, belast door een constante radiaal naar buiten gerichte belasting p_0 (zie fig. 10), dan is het duidelijk, dat dit belastingsgeval te berekenen is met behulp van de formules voor basisgeval a met inachtneming van hetgeen boven is vermeld. De verplaatsing naar buiten van de buis in de membraanspanningstoestand:

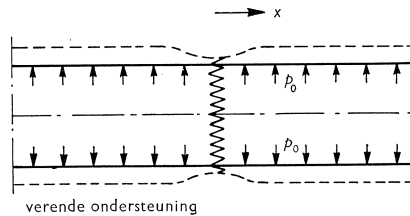


Fig. 10 Geval h

$$w = \frac{-a^2}{Et} p_0 \dots \dots \dots (a),$$

wordt nu slechts ten dele opgeheven door een lijnbelasting $2P$ in tegengestelde richting ter plaatse van de ondersteuning volgens (21). Het overblijvende gedeelte van de verplaatsing w wordt geleverd door het schot of de verstijvingsring, die door de tegengestelde belasting $2P$ een verplaatsing naar buiten ondergaan, welke uit (74) volgt door $2P_r = 2P$ te stellen. Er geldt dus:

$$P \frac{\lambda a^2}{Et} + 2P \frac{1}{2f} = \frac{a^2}{Et} p_0$$

waaruit volgt:

$$P = \frac{fa^2}{fa^2\lambda + Et} p_0 = \frac{fa^2}{fa^2 + Etb} p_0 b \dots \dots \dots (81)$$

De formules (19), (22) en (24) voor het buigend moment in basisgeval a blijven dus ook voor dit geval bruikbaar, mits hierin voor P bovenstaande uitdrukking wordt gesubstitueerd. Is de buis voorzien van een verstijvingsring met een zelfde straal als a als de buis, een doorsnede F en een elasticiteitsmodulus E' , dan geldt volgens formule (78): $f = \frac{E'F}{a^2}$. Substitutie hiervan in (81) leidt dan tot:

$$P = \frac{E'F}{E'F + Etb} p_0 b \dots \dots \dots (82)$$

Bij vergelijking met de uitkomst van het stijve schot, formule (66), blijkt weer een zelfde reductiefactor op te treden als in formule (80). Ook het buigend moment wordt, vergeleken met formule (68), in dezelfde verhouding gereduceerd. Substitutie van (82) in (24) leidt immers tot:

$$(M_x)_{x=0} = \frac{E'F}{E'F + Etb} \frac{1}{2} p_0 b^2 \dots \dots \dots (83)$$

Geval j Is een buis aan het uiteinde voorzien van een niet oneindig stijf schot of van een ring met eindige rekstijfheid, die geen weerstand tegen verdraaiing bieden, en daar ter plaatse belast door een constante radiaal gerichte lijnbelasting P in omtreksrichting (zie fig. 11), dan zal deze belasting voor een deel P_c worden opgenomen door de buis en voor een deel P_r door de ring of het schot. Daar de meewerkende breedte naast het schot of de ring thans $\frac{1}{2}b$ bedraagt – zie basisgeval b – kan in analogie met de formules (76), (79) en (80) direct gesteld worden:

$$P_c = \frac{\frac{1}{2}Etb}{\frac{1}{2}Etb + fa^2} P \dots \dots \dots (84)$$

c.q.

$$P_c = \frac{\frac{1}{2}Etb}{\frac{1}{2}Etb + E'F} P \dots \dots \dots (85)$$

en

$$P_r = \frac{E'F}{\frac{1}{2}Etb + E'F} P \dots \dots \dots (86)$$

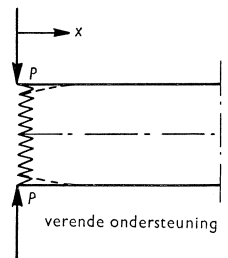


Fig. 11 Geval j

De formules (35) e.v. van basisgeval b blijven dus ook voor dit geval bruikbaar, mits hierin P wordt vervangen door P_c volgens formule (84) c.q. (85).

Geval k Is een buis aan het uiteinde voorzien van een niet oneindig stijf schot of van een ring met eindige rekstijfheid, die beide geen weerstand tegen verdraaiing bieden en belast door een constante radiaal naar buiten gerichte belasting p_0 (zie fig. 12), dan is het duidelijk, dat dit belastinggeval te berekenen is met behulp van de formules voor basisgeval b

met inachtneming van hetgeen boven is vermeld. De verplaatsing naar buiten van de buis in de membraan-
spanningstoestand:

$$w = \frac{-a^2}{Et} p_0$$

wordt nu slechts ten dele opgeheven door een lijn-
belasting P in tegengestelde richting ter plaatse van
de ondersteuning volgens (39). Het overblijvende ge-
deelte van de verplaatsing w wordt geleverd door het schot of de verstijvings-
ring, die door de tegengesteld belasting P een verplaatsing naar buiten onder-
gaan, welke uit (74) volgt door $P_r = P$ te stellen. Er geldt dus:

$$P \frac{2\lambda a^2}{Et} + P \frac{1}{f} = \frac{a^2}{Et} p_0$$

waaruit volgt:

$$P = \frac{fa^2}{fa^2 2\lambda + Et} p_0 = \frac{fa^2}{fa^2 + \frac{1}{2} Etb} \frac{1}{2} p_0 b \dots \dots \dots (87)$$

De formules (37) en (40) voor het buigend moment in basisgeval b blijven dus
ook voor dit geval bruikbaar, mits hierin voor P bovenstaande uitdrukking
wordt gesubstitueerd.

Is de buis voorzien van een verstijvingsring met een zelfde straal a als de
buis, een doorsnede F en een elasticiteitsmodulus E' , dan geldt volgens (78):

$$f = \frac{E'F}{a^2}.$$

Substitutie hiervan in (87) leidt dan tot:

$$P = \frac{E'F}{E'F + \frac{1}{2} Etb} \frac{1}{2} p_0 b \dots \dots \dots (88)$$

Bij vergelijking met de uitkomst voor het stijve schot, formule (70), blijkt weer
een zelfde reductiefactor op te treden als in formule (86). Ook het buigend
moment wordt, vergeleken met formule (72), in dezelfde verhouding geredu-
ceerd. Substitutie van (88) in (40) leidt immers tot:

$$(M_x)_{x=\frac{\pi}{4\lambda}} = \frac{-E'F}{E'F + \frac{1}{2} Etb} 0,161 p_0 b^2 \dots \dots \dots (89)$$

3 Cilindrische schaal (buis) met plaatselijk een verende inklemming

Geval I Een buis, aan het uiteinde verend draaibaar ingeklemd en daar
belast door een constante radiaal gerichte lijnlast P in omtreksrich-
ting (zie fig. 13), is te berekenen door superpositie van de basisgevallen
b en c.

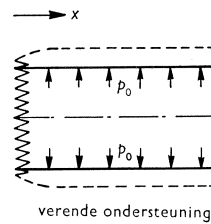


Fig. 12 Geval k

Tengevolge van de belasting P ontstaat in basisgeval b aan het uiteinde een hoekverdraaiing (36):

$$\varphi_1 = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = - 2P\lambda^2 \frac{a^2}{Et} \dots \dots \dots (e)$$

Ten gevolge van het moment M_0 ontstaat in basisgeval c aan het uiteinde een hoekverdraaiing (56):

$$\varphi_2 = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = \frac{M_0}{K\lambda} \dots \dots \dots (f)$$

De som van deze beide hoekverdraaiingen dient gelijk te zijn aan de hoekverdraaiing φ_r van de inklemmingsconstructie tengevolge van het daarop uitgeoefende moment M_0 :

$$\varphi_r = -M_0\psi \dots \dots \dots (90)$$

waarin ψ de hoekverdraaiing ten gevolge van een moment ter grootte van de eenheid voorstelt.

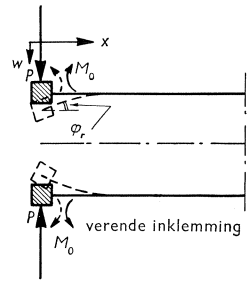


Fig. 13 Geval 1

Wordt de inklemmingsconstructie gevormd door een ringbalk met straal r (zie fig. 14 op pag. 22), dan kan de factor ψ op de volgende wijze worden bepaald:

In de ringbalk, die langs zijn omtrek wordt belast door een constant wringend moment M_0 , ontstaat in elke doorsnede een buigend moment:

$$M_b = M_0 r_0 \dots \dots \dots (91)$$

hetgeen op eenvoudige wijze duidelijk wordt, als men b.v. het evenwicht van één helft van de ringbalk beschouwt. Ligt één van de beide hoofdtraagheidsassen van het profiel in het vlak waarin dit buigend moment werkt, dan ontstaat in een vezel op een afstand e van de neutrale lijn een buigspanning:

$$\sigma_b = \frac{M_b e}{I_b} = \frac{M_0 r_0 e}{I_b} \dots \dots \dots (92)$$

als I_b het traagheidsmoment van de doorsnede ten opzichte van de neutrale lijn voorstelt. In deze vezel ontstaat dus een specifieke rek:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E'} = \frac{M_0 r_0 e}{E' I_b} \dots \dots \dots (93)$$

als E' de elasticiteitsmodulus is van de ringbalk, hetgeen inhoudt, daar radiale en tangentiale rek gelijk zijn, dat een vezel boven de neutrale lijn naar buiten wordt verplaatst over een afstand:

$$z = r_0 \varepsilon = \frac{M_0 r_0^2 e}{E' I_b} \dots \dots \dots (94)$$

wat een hoekverdraaiing van het profiel betekent ter grootte van:

$$\varphi_r = \frac{-z}{e} = \frac{-M_0 r_0^2}{E' I_b} = -M_0\psi \dots \dots \dots (95)$$

Hieruit volgt de factor ψ :

$$\psi = \frac{r_0^2}{E' I_b} \dots \dots \dots (96)$$

De voorwaarde voor gelijke hoekverdraaiingen van buis en inklemmingsconstructie luidt dus:

$$-2P\lambda^2 \frac{a^2}{Et} + M_0 \frac{1}{K\lambda} = -M_0\psi,$$

waaruit volgt:

$$M_0 = 2P\lambda^2 \frac{a^2}{Et} \frac{K\lambda}{1+K\lambda\psi} = \frac{P}{2\lambda} \frac{1}{1+K\lambda\psi} \dots \dots \dots (97)$$

In de formules volgens basisgeval c, hetwelk op basisgeval b moet worden gesuperponeerd, dient dus voor M_0 bovenstaande uitdrukking te worden gesubstitueerd.

Aan het uiteinde resulteert b.v. een verplaatsing volgens (39) en (55):

$$\begin{aligned} w_{x=0} &= 2P\lambda \frac{a^2}{Et} - M_0 \frac{1}{2K\lambda^2} = P\lambda \frac{a^2}{Et} \left[2 - \frac{1}{1+K\lambda\psi} \right] = \\ &= P\lambda \frac{a^2}{Et} \left[\frac{1+2K\lambda\psi}{1+K\lambda\psi} \right] \dots \dots \dots (98) \end{aligned}$$

Ook in dit geval kan een meewerkende breedte worden ingevoerd, waarvan ondersteld wordt, dat de kracht N_y over dit gebied constant is en gelijk aan de waarde aan het uiteinde, terwijl de breedte zodanig is, dat de radiale component van N_y over dit gebied evenwicht maakt met de belasting P . De kracht $(N_y)_{x=0}$ kan met behulp van (3) worden uitgedrukt in de verplaatsing $w_{x=0}$ volgens (98):

$$(N_y)_{x=0} = -\frac{Et}{a} w_{x=0} = -P\lambda a \left[\frac{1+2K\lambda\psi}{1+K\lambda\psi} \right] \dots \dots \dots (99)$$

De evenwichtsvoorwaarde voor het bepalen van de meewerkende breedte c luidt:

$$-c \frac{(N_y)_{x=0}}{a} = P$$

en dus:

$$+P\lambda c \left[\frac{1+2K\lambda\psi}{1+K\lambda\psi} \right] = P,$$

waaruit volgt:

$$c = b \left[\frac{1+K\lambda\psi}{1+2K\lambda\psi} \right] = b \left[1 - \frac{K\lambda\psi}{1+2K\lambda\psi} \right] \dots \dots \dots (100)$$

Voor $\psi = 0$ (inklemmingsconstructie oneindig stijf tegen verdraaiing) gaat de formule over in formule (26) van basisgeval a.

Voor $\psi = \infty$ (inklemmingsconstructie oneindig slap tegen verdraaiing) gaat de formule over in formule (43) van basisgeval b.

Nu de meewerkende breedte bekend is, kan dus rechtstreeks de grootte van

de kracht N_y aan het uiteinde ten gevolge van een belasting P , die door de buis moet worden opgenomen, worden bepaald:

$$(N_y)_{x=0} = -\frac{Pa}{c} = -\frac{Pa}{b} \frac{(1+2K\lambda\psi)}{(1+K\lambda\psi)} \dots \dots \dots (101)$$

Ook op de volgende wijze is het onderhavige belastingsgeval te berekenen. Wordt het uiteinde aanvankelijk niet verdraaibaar, doch wel verplaatsbaar gedacht, dan kunnen de uitkomsten volgens basisgeval a worden toegepast. Bij de inklemming aan het uiteinde ontstaat in de buis dan volgens (22) c.q. (24) een buigend moment:

$$(M_x)_{x=0} = \frac{1}{4}(2P)b \dots \dots \dots (g)$$

Op de inklemming werkt een even groot, doch tegengesteld moment:

$$M_{pr} = -\frac{1}{2}Pb \dots \dots \dots (102)$$

Dit wordt, evenals bij de methode Cross voor liggers en raamwerken, het primaire moment M_{pr} genoemd, waarvoor als tekenafpraak geldt: met de klok mee is positief. Indien de inklemming meegeeft, zal dit moment afnemen. Rekenkundig kan het moment zodanig worden vereffend, dat buis en inklemmingsconstructie elk een moment erbij krijgen, waarvan de grootte evenredig is met hun stijfheidsfactor tegen verdraaiing.

De stijfheidsfactor k_c van de cilinder of de buis is reeds bekend van basisgeval d, formule (64):

$$k_c = 2 \frac{K}{b}$$

De stijfheidsfactor k_r van de inklemmingsconstructie, hetzij een schot, hetzij een ringbalk, is:

$$k_r = \frac{1}{\psi} \dots \dots \dots (103)$$

waarbij de factor ψ reeds in vergelijking (90) is gedefinieerd.

Wordt de inklemmingsconstructie gevormd door een ringbalk met straal r_0 en een buigingsstijfheid $E'I_b$ (zie fig. 14), dan is de stijfheidsfactor tegen verdraaiing volgens (96):

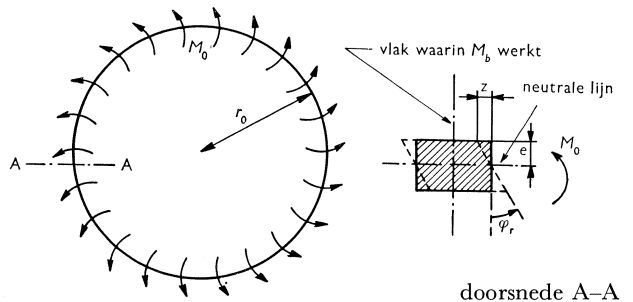


Fig. 14 De hoekverdraaiing van een dwarsdoorsnede van een ringbalk, die langs de omtrek wordt belast door een constant wringend moment M_0 .

$$k_r = \frac{E'I_b}{r_0^2} \dots \dots \dots (104)$$

De vereffeningsscoëfficiënten zijn dus:

$$\mu_r = \frac{k_r}{k_r + k_c} \dots \dots \dots (105)$$

$$\mu_c = \frac{k_c}{k_r + k_c} \dots \dots \dots (106)$$

Op de inklemmingsconstructie blijft dus na vereffening een (Cross)-moment werkzaam:

$$M_r = \mu_r M_{pr} \dots \dots \dots (107)$$

In de buis ontstaat bij vereffening een (Cross)-moment:

$$-\mu_c M_{pr}$$

en er wordt dus bij het vereffenen op de buis aan het uiteinde een buigend moment uitgeoefend:

$$M_c' = + \mu_c M_{pr} \dots \dots \dots (108)$$

zodat hier resulteert een buigend moment:

$$M_c = - M_{pr} + M_c' = - \mu_r M_{pr} = - M_r \dots \dots \dots (109)$$

Het onderhavige geval kan dus worden opgelost door superpositie van de basisgevallen a en d, waarbij voor het randmoment M_0 van basisgeval d moet worden aangehouden de waarde van het moment M_c' volgens (108), dat bij het vereffenen in de buis wordt geïntroduceerd.

Door het moment M_c' ontstaat aan het uiteinde van de buis een dwarskracht c.q. reactiekracht, welke volgt uit formule (65):

$$(Q_x)_{x=0} = -\frac{M_0}{b} = -\frac{M_c'}{b} = -\mu_c \frac{M_{pr}}{b} = + \frac{1}{2} \mu_c P \dots \dots \dots (110)$$

waardoor de belasting op de buis afneemt tot:

$$P_c = P - (Q_x)_{x=0} = P (1 - \frac{1}{2} \mu_c) \dots \dots \dots (111)$$

De momenten, verplaatsingen e.d., welke hierboven zijn uitgedrukt in P , kunnen dus met behulp van (111) worden uitgedrukt in P_c , dat is de werkelijke belasting, die op de buis wordt uitgeoefend.

Ten opzichte van basisgeval a neemt de belasting, die door de buis wordt opgenomen, dus af. Daar bij de vereffening de verplaatsing van het uiteinde gelijk blijft – bij basisgeval d is hier een scharnier aanwezig – verandert hierbij ook niet de waarde van de kracht $(N_y)_{x=0}$. Uit de reeds eerder gegeven omschrijving van de meewerkende breedte volgt, dat bij de vereffening de meewerkende breedte c dus in dezelfde verhouding afneemt als de belasting, die door de buis wordt opgenomen. Hieruit volgt:

$$c = b (1 - \frac{1}{2} \mu_c) \dots \dots \dots (112)$$

Uiteraard is deze formule identiek met (100), zoals gemakkelijk blijkt.

Voor $\mu_c = 0$ (inklemmingsconstructie oneindig stijf tegen verdraaiing) gaat de formule over in (26) van basisgeval a.

Voor $\mu_c = 1$ (inklemmingsconstructie oneindig slap tegen verdraaiing) gaat de formule over in (43) van basisgeval b.

Met behulp van de nu bekende meewerkende breedte is de grootte van de kracht N_y aan het uiteinde rechtstreeks uit te drukken in de belasting P_c , die door de buis moet worden opgenomen:

$$(N_y)_{x=0} = -\frac{P_c a}{c} = -P_c \frac{a}{b} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_c} \dots \dots \dots (113)$$

4 Cilindrische schaal (buis), plaatselijk verend ondersteund en verend ingeklemd

Geval m Een buis, aan het uiteinde verend draaibaar ingeklemd en verend ondersteund en daar belast door een constante radiaal gerichte lijnlast P in omtreksrichting (zie fig. 15), is door combinatie van de onder 2 en 3 verkregen resultaten te berekenen.

Uit de gevallen g en j, onder 2 vermeld, blijkt, dat de belastingen, die respectievelijk door de buis en door de verende ondersteuning, die hier als ringbalk wordt gedacht, worden opgenomen, zich verhouden als de rekstijfheden van de meewerkende breedte van de buis en van de ringbalk; zie formules (79), (80), (85) en (86). De meewerkende breedte van de buis wordt beïnvloed door de verende inklemming op een wijze als onder 3 is afgeleid en is weergegeven in de formules (100) en (112).

In analogie met de formules (79), (80), (85) en (86) kunnen dus de uitdrukkingen voor het deel van de belasting P_c , dat door de buis wordt opgenomen en voor het deel van de belasting P_r , dat door de verende ondersteuning wordt opgenomen, direct worden opgesteld:

$$P_c = \frac{Etb \left[\frac{1 + K\lambda\psi}{1 + 2K\lambda\psi} \right]}{Etb \left[\frac{1 + K\lambda\psi}{1 + 2K\lambda\psi} \right] + E'F} P \dots \dots \dots (114)$$

òf

$$P_c = \frac{(1 - \frac{1}{2}\mu_c) Etb}{(1 - \frac{1}{2}\mu_c) Etb + E'F} P \dots \dots \dots (115)$$

$$P_r = \frac{E'F}{Etb \left[\frac{1 + K\lambda\psi}{1 + 2K\lambda\psi} \right] + E'F} P \dots \dots \dots (116)$$

òf

$$P_r = \frac{E'F}{(1 - \frac{1}{2}\mu_c) Etb + E'F} P \dots \dots \dots (117)$$

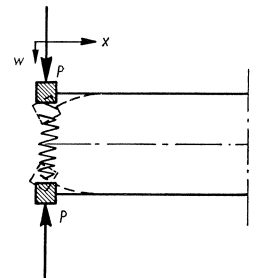


Fig. 15 Geval m

Is het deel van de belasting P_o , dat door de buis wordt opgenomen, bekend, dan kunnen op één van de beide onder 3 beschreven wijzen de buigende momenten en andere grootheden worden bepaald.

Het geval van de verende inklemming en de verende ondersteuning komt ook bij koepelschalen voor. Het betreffende voorbeeld van een bolschaal zal dan ook op de hier aangegeven wijze worden opgelost.

Wordt bij de buis met dezelfde randvoorwaarden de belasting gevormd door een constante gelijkmatig verdeelde radiaal gerichte belasting p_o , dan kan dit geval op eenvoudige wijze, met behulp van hetgeen hierboven is afgeleid, worden berekend op de wijze als reeds bij de gevallen h en k is gedaan.

5 Ton- en shedschalen

Voor het optreden van randstoringen nabij de gebogen randen van ton- en shedschalen (zie fig. 16) zijn verschillende oorzaken aan te wijzen.

Bij de berekening van een cilindrisch schaaldak wordt de belasting in lengterichting ontwikkeld in een reeks van FOURIER, waarvan meestal slechts de eerste term in de berekening wordt betrokken (zie fig. 17). Hiermee wordt aan bepaalde randvoorwaarden voldaan, met name is de radiale verplaatsing w gelijk nul, terwijl ook de kracht N_y en de rek ε_y bij de ondersteuning gelijk nul worden. De in werkelijkheid nabij de ondersteuning aanwezige belasting q_0 zal echter een kracht N_y willen veroorzaken en daarmee een rek ε_y . De grootte hiervan kan met voldoende nauwkeurigheid met behulp van de membraantheorie worden bepaald. De grootste waarde van N_y komt dan voor in de top van de schaal en bedraagt:

$$N_y = -q_0 a \dots \dots \dots (118)$$

als a de straal voorstelt, waardoor aldaar een spanning zou optreden:

$$\sigma_y = -q_0 a/t \dots \dots \dots (119)$$

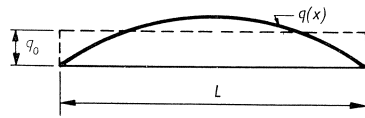
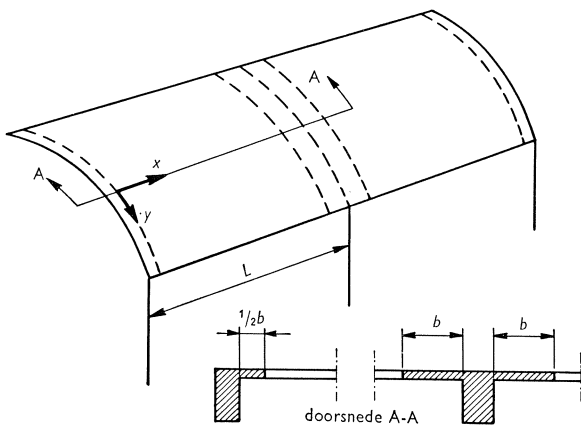


Fig. 17

Fig. 16 De meewerkende breedte nabij de ondersteuning van ton- en shedschalen.

De door de schaal uitgeoefende belasting zal in de ondersteuningsconstructie vervormingen doen ontstaan. In het bijzonder zal dit het geval zijn bij bogen, die op normaalkracht en buiging worden belast. Als gevolg van de krachtwerking in de boog zullen ter plaatse van de aansluiting van de schaal aan de boog spanningen σ_y' in omtreksrichting in de boog optreden. Deze spanningen, die op elementaire wijze, b.v. met de methode Cross, kunnen worden bepaald, zullen in het algemeen niet gelijk zijn aan de volgens (119) berekende spanningen in de schaal, doch hiermee een verschil in spanning σ_{y_v} vertonen. Boog en schaal vormen evenwel een monoliet en de vervormingen van de boog zullen ook aan de schaal worden meegedeeld, m.a.w. ter plaatse van de aansluiting aan de boog zal in de schaal een extra spanning σ_{y_v} worden teweeggebracht. Deze extra spanning σ_{y_v} veroorzaakt een rek ε_{y_v} in omtreksrichting en daarmee een radiale verplaatsing w , tengevolge waarvan buiging in langsrichting zal optreden, op de wijze zoals bij de basisgevallen a en b is beschreven. Wordt afgezien van het feit, dat hier geen axiale symmetrie aanwezig is, dan kunnen de voor deze basisgevallen afgeleide formules worden toegepast en kan b.v. het maximale buigende moment rechtstreeks worden uitgedrukt in de spanning σ_{y_v} .

Is de schaal aan een uiteinde zgn. vrij opgelegd, waarbij de ondersteuningsconstructie slap wordt ondersteld tegen verplaatsingen loodrecht op zijn vlak, dan kunnen de formules volgens basisgeval b worden toegepast. Is de schaal aan een uiteinde ingeklemd, dan kunnen de formules volgens basisgeval a worden toegepast. Dit laatste is bij benadering ook het geval, als het een tussenondersteuning van het schaaldak betreft.

Bedraagt de spanning σ_{y_v} b.v. -60 kg/cm^2 , de schaaldikte t b.v. 7 cm , dan wordt voor de maximale waarde van het storingsmoment bij verwaarlozing van de dwarscontractiecoëfficiënt gevonden:

volgens basisgeval a, formule (31): $M_x = -0,289 \sigma_{y_v} t^2 = + 850 \text{ kgcm/cm}$.

volgens basisgeval b, formule (47): $M_x = +0,093 \sigma_{y_v} t^2 = -274 \text{ kgcm/cm}$.

Deze momenten zijn zeker niet verwaarloosbaar klein en hiervoor zal, zij het over kleine lengte, wapening moeten worden bijgelegd.

De spanning σ_{y_v} , die door de boog in de schaal wordt geïntroduceerd ter plaatse van de aansluiting, zal in de schaal vrij snel afnemen op de wijze als bij de basisgevallen a en b is aangegeven, waarbij een meewerkende breedte kon worden ingevoerd ter grootte van respectievelijk b aan weerszijden van de ondersteuning en $\frac{1}{2}b$ aan één zijde (zie fig. 16). Bij de berekening van de bogen en daarmee dus van de spanning σ_y' ter plaatse van de aansluiting van de schaal mag bij de bepaling van het profiel deze meewerkende breedte worden meegerekend.

Andere oorzaken van een verschil in rek ε_y tussen schaal en ondersteuningsconstructie, zoals verschillen in krimp of in temperatuur, kunnen op de bovenaangegeven wijze eveneens in rekening worden gebracht.

B BOLSCHALEN (koepels)

Zoals bekend, wordt bij praktische toepassingen het randstoringsprobleem voor axiaal-symmetrisch belaste bolschalen (zie fig. 18) meestal opgelost volgens de benaderingsmethode van GECKELER. De methode is gebaseerd op het feit, dat de krachten en momenten, die door een aan de rand aangrijpend evenwichtssysteem van krachten en momenten in de schaal worden opgewekt, snel afnemen met toenemende afstand tot de rand, op een wijze zoals dit ook bij de cilindrische schaal het geval is. Dit houdt in, dat in de differentiaalvergelijkingen de lagere afgeleiden van bepaalde grootheden klein zijn ten opzichte van de hogere.

Worden deze lagere afgeleiden verwaarloosd, dan resulteert dit in de beide differentiaalvergelijkingen voor de hoekverdraaiing χ van de meridiaandoorsnede en de dwarskracht q *):

$$K \frac{d^4 \chi}{ds^4} + \frac{Et}{a^2} \chi = 0 \dots \dots (120)$$

$$K \frac{d^4 q}{ds^4} + \frac{Et}{a^2} q = 0 \dots \dots (121)$$

waarin de coördinaat s wordt gemeten langs de meridiaandoorsnede.

Daar bij de lagere afgeleiden $\cotg \varphi$ als factor voorkomt, is de verwaarlozing hiervan en dus de toepassing van de methode slechts geoorloofd bij niet te kleine waarden van de openingshoek φ .

De vergelijkingen (120) en (121) zijn geheel analoog met vergelijking (4) voor de cilindrische schaal, waarbij de belastingsterm buiten beschouwing kan worden gelaten. Wordt voorts bedacht, dat met grote benadering geldt: $\chi = \frac{dw}{ds}$,

dan is het duidelijk, dat voor het oplossen van het randstoringsprobleem van de bolschaal ook kan worden uitgegaan van de gereduceerde vergelijking (4) c.q. verg. (6). Hierin stelt w dan voor de radiale verplaatsing, terwijl de coördinaat x wordt gemeten langs de meridiaandoorsnede. De vergelijking (120) gaat immers bij integratie over in de gereduceerde vergelijking (4); de hierbij optredende integratie-constante is nul. Van de oplossingen, die voor de cilindrische schaal zijn afgeleid, kan dus ook bij de bolschaal gebruik worden gemaakt.

Bij deze oplossingsmethode wordt de bolschaal in feite vervangen door een

*) Zie b.v.: GIRKMANN, K., Flächentragwerke. 4e druk, pag. 435... 436. Wien, Springer verlag 1956.

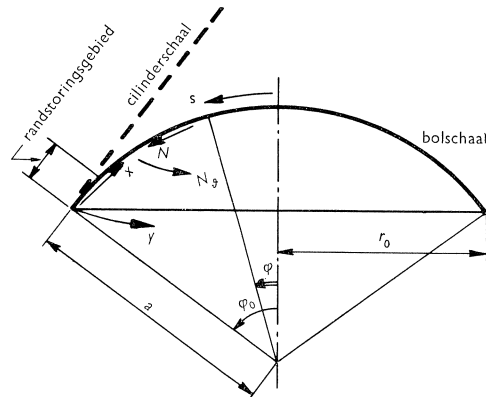


Fig. 18 Bij de benaderingsmethode van GECKELER voor de axiaal-symmetrisch belaste bolschaal wordt deze in feite vervangen door een cilindrische schaal met dezelfde straal, die in het beschouwde punt van de rand aan de bolschaal raakt.

cilinderschaal met een even grote straal. Laat men deze cilinderschaal in het beschouwde punt van de rand raken aan de bolschaal (zie fig. 18), dan wordt de fysische achtergrond van deze benaderingsmethode duidelijk. Enerzijds immers is de afstand, waarover de storing zich van de rand af uitstrekt, in het algemeen slechts gering, anderzijds vallen de meridiaandoorsneden van bolschaal en cilinderschaal over het eerste gedeelte van de rand af gemeten vrijwel samen, zodat het gedeelte van de meridiaandoorsnede van de bolschaal, waar de storing zijn invloed doet gelden, bij benadering kan worden vervangen door de meridiaandoorsnede van de aan de bolschaal rakende cilinderschaal met een even grote straal. Verwaarloosd worden dus de invloed van de kromming van de meridiaandoorsnede bij de bolschaal en de invloed van de afnemende breedte van een strip, die tussen twee naburige meridiaandoorsneden op de bolschaal kan worden gedacht. Bij de cilinderschaal bezit een dergelijke strip immers een constante breedte.

Met een aantal voorbeelden zal de toepassing van verschillende van de afgeleide formules worden toegelicht.

1 Temperatuurspanningen in een bolschaal

Ondersteld wordt, dat een verschil in temperatuurstijging van t° optreedt tussen een bolschaal en de bijbehorende randbalk (zie fig. 19). Was de schaal los van de randbalk, dan zou de schaal ter plaatse van de randbalk een relatieve verplaatsing naar buiten ondergaan:

$$w_t = a\varepsilon = \alpha a t^\circ \dots \dots \dots (122)$$

waarin α de uitzettingscoëfficiënt is.

Voor het terugbrengen van deze verplaatsing zijn op de schaalrand een dwarskracht Q_x en een moment M_x nodig. Wordt de randbalk oneindig stijf tegen wringing ondersteld, dan kunnen de formules van basisgeval a worden toegepast. Bij verwaarlozing van de dwarscontractiecoëfficiënt ν wordt dan door substitutie van bovenstaande uitdrukking voor de verplaatsing w in (28) voor het maximale moment gevonden:

$$(M_x)_{x=0} = \frac{Et^2}{2a\sqrt{3}} w_{x=0} = \frac{Et^2}{2\sqrt{3}} \alpha t^\circ \dots \dots \dots (123)$$

De maximale kracht N_y in omtreksrichting, werkend volgens de raaklijn aan een parallelcirkel, bedraagt in overeenstemming met (2):

$$(N_y)_{x=0} = -\frac{Et}{a} w = -Et \alpha t^\circ (124)$$

Met b.v. $E = 3 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $t = 7 \text{ cm}$, $\alpha = 10^{-5}$ en $t^\circ = 15^\circ$ wordt gevonden:

$$M_{x_{\max}} = 637 \text{ kgcm/cm}$$

$$N_{y_{\max}} = -315 \text{ kg/cm}$$

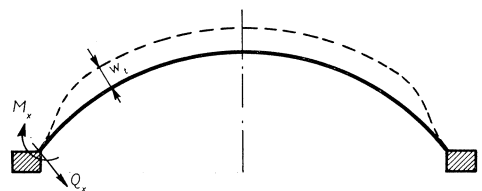


Fig. 19 Relatieve verplaatsing van een bolschaal t.o.v. de bijbehorende randbalk t.g.v. een onderling temperatuurverschil.

2 Bolschaal belast door eigen gewicht g

Voor de afmetingen zij verwezen naar fig. 20.

De membraanspanningen volgen uit de volgende formules: *)

$$N_\varphi = - \frac{ga}{1 + \cos \varphi} \dots \dots \dots (125)$$

$$N_\nu = - ga \left[\cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right] \dots \dots \dots (126)$$

Bij een eigen gewicht $g = 200 \text{ kg/m}^2$, waaraan eventueel het gewicht van een dakbedekking, een dakisolatie en een sneeuwbelasting kan worden toegevoegd, wordt ter plaatse van de aansluiting aan de randbalk gevonden:

$$\left. \begin{aligned} (N_\varphi)_{\varphi=\varphi_0} &= - 33,7 \text{ kg/cm} \rightarrow (\sigma_\varphi)_{\varphi=\varphi_0} = - 4,20 \text{ kg/cm}^2 \\ (N_\nu)_{\varphi=\varphi_0} &= - 8,24 \text{ kg/cm} \rightarrow (\sigma_\nu)_{\varphi=\varphi_0} = - 1,03 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned} \right\} \dots (h)$$

De verticale component van $(N_\varphi)_{\varphi=\varphi_0}$ wordt opgenomen door de ondersteuning van de randbalk en wordt verder buiten beschouwing gelaten. De horizontale component veroorzaakt in de randbalk een trekkracht:

$$T_0 = - (N_\varphi)_{\varphi=\varphi_0} \cos \varphi_0 r_0 = 48600 \text{ kg} \dots \dots \dots (i)$$

Wordt de randbalk los gedacht van de schaal, dan zal de balk door de trekkracht T_0 een verplaatsing naar buiten ondergaan. De gaping, die op deze wijze tussen schaal en randbalk ontstaat, moet weer worden opgeheven, waartoe op randbalk en schaal een gelijk doch tegengesteld gerichte horizontale kracht H en een gelijk doch tegengesteld moment M moeten worden aangebracht. Met behulp van vormveranderingsvoorwaarden, die betrekking hebben op de horizontale verplaatsing en de hoekverdraaiing, kunnen M en H worden opgelost. Zijn deze bekend, dan is ook de uiteindelijke spanningsverdeling bekend, evenals de uiteindelijke verplaatsing naar buiten van de randbalk. Uiteraard is deze laatste nu kleiner geworden: schaal en randbalk komen naar elkaar toe. Daarmee is echter ook de rek en dus de spanning in de randbalk kleiner geworden. Toch moet de kracht T_0 worden opgenomen. Dat kan, omdat in de schaal een *meewerkende* zone ontstaat, waarin de krachten N_ν c.q. N_φ in omtreksrichting meehelpen de totaal benodigde kracht

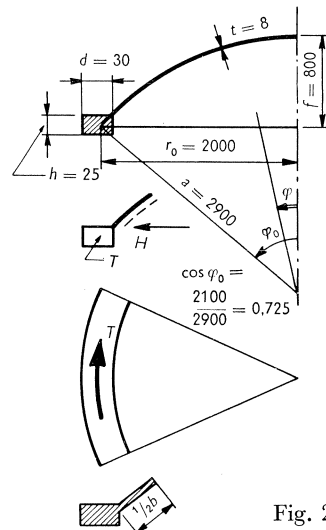


Fig. 20

*) GIRKMANN, K., Flächentragwerke. 4e druk. Wien, Springer 1956. TIMOSHENKO, S., Theory of plates and shells. New York, Mc. Graw Hill 1940. PUCHER, A., Lehrbuch des Stahlbetonbaues. 2e druk, p. 232. Wien, Springer verlag, waaraan ook de afmetingen van het eerstvolgende voorbeeld zijn ontleend.

T_0 te leveren. Men vergelijk hiermee de overeenkomstige belastingsgevallen g, j en l bij de cilinder.

Wordt ondersteld, dat de randbalk volkomen *wringingslap* is, dan kunnen de formules van basisgeval b worden toegepast. De meewerkende breedte bedraagt dan $\frac{1}{2}b$. Met de gegeven afmetingen wordt, bij verwaarlozing van de dwarscontractiecoëfficiënt ν , gevonden:

$$b = \frac{\sqrt[4]{at}}{\sqrt[4]{3}} = 116 \text{ cm} \quad \dots \dots \dots \quad (j)$$

Het oppervlak F_{tot} van de doorsnede, die de trekkracht T_0 moet opnemen, is dus als volgt te berekenen:

betonddoorsnede van de randbalk:	$25 \times 30 \text{ cm}^2 = 750 \text{ cm}^2$
ideële doorsnede van de wapening ($F_{\text{st}} = 27 \text{ cm}^2$ *),	
met $n = 10$:	$10 \times 27 \text{ cm}^2 = 270 \text{ cm}^2$
meewerkende zone in de schaal:	$\frac{1}{2} bt = 58 \times 8 \text{ cm}^2 = 464 \text{ cm}^2$
	$F_{\text{tot}} = 1484 \text{ cm}^2$

Met behulp hiervan volgt voor de trekspanning in het randlid en in de schaal ter plaatse van de aansluiting:

$$\sigma_y = \sigma_v = \frac{T_0}{F_{\text{tot}}} = \frac{48600 \text{ kg}}{1484 \text{ cm}^2} = +32,7 \text{ kg/cm}^2 \quad \dots \dots \dots \quad (k)$$

Deze spanning in de randbalk, of ook de verplaatsing naar buiten die ermee correspondeert, veroorzaakt buigende momenten in de schaal. De maximale waarde hiervan kan eenvoudig berekend worden met behulp van formule (47). Bedacht dient echter nog te worden, dat in de membraanspanningstoestand de schaal ter plaatse van de aansluiting aan de randbalk iets naar binnen gaat (zie fig. 20), overeenkomend met de spanning in omtreksrichting:

$$\sigma_v = -1,03 \text{ kg/cm}^2 \text{ (druk)}.$$

De totale verplaatsing naar buiten ten opzichte van de membraanspanningstoestand komt dus overeen met een spanning in omtreksrichting:

$$\sigma_y = \sigma_v = (32,7 + 1,03) \text{ kg/cm}^2 = +33,7 \text{ kg/cm}^2$$

Het maximale moment op een afstand $\frac{1}{4}\pi b$ van de rand, bedraagt dus volgens (47):

$$(M_x)_{\text{max}} = +0,093 \sigma_y t^2 = +201 \text{ kgcm/cm} \quad \dots \dots \dots \quad (l)$$

Het verloop van de verschillende grootheden als gevolg van de randstoring komt overeen met dat in fig. 3.

Opgemerkt zij nog, dat de reeds vermelde wapening van de randbalk in staat moet zijn de totale trekkracht T_0 op te nemen. Met b.v. een toelaatbare spanning $\bar{\sigma}_{\text{st}} = 1800 \text{ kg/cm}^2$ volgt voor de benodigde hoeveelheid wapening:

$$F_{\text{st}} = \frac{48600}{1800} \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2 \quad \dots \dots \dots \quad (m)$$

*) Zie uitdrukking (m)

Ondersteld is, dat de randbalk volkomen wringingslap is. Dat deze aanname bij de gegeven afmetingen geheel gerechtvaardigd is, blijkt uit het volgende: de stijfheidsfactor tegen verdraaiing van de rand van de bolschaal bedraagt volgens formule (64):

$$k_c = 2 \frac{K}{b} = 2 \frac{\frac{1}{12} E t^3}{b} = 0,735 E \dots \dots \dots (n)$$

terwijl de stijfheidsfactor tegen verdraaiing van de randbalk volgens (104) is:

$$k_r = \frac{E' I_b}{r_0^2} = \frac{E' \frac{1}{12} d h^3}{r_0^2} = 0,0098 E' \dots \dots \dots (o)$$

hetgeen dus slechts een fractie is van de stijfheidsfactor van de bolschaal.

Voor het geval, dat de randbalk volkomen *wringingsstijf* is, kunnen de formules van basisgeval a worden toegepast. De meewerkende breedte bedraagt dan b . Een tweemaal zo groot deel van de schaal is nu betrokken bij het opnemen van de trekkracht T_0 , waardoor de trekspanningen relatief iets lager zullen worden. Het maximale buigende moment treedt nu op ter plaatse van de aansluiting van de schaal aan de balk en kan op analoge wijze worden berekend met behulp van (31):

$$(M_x)_{\max} = - 0,289 \sigma_y t^2.$$

Het verloop van de verschillende grootheden als gevolg van de randstoring komt overeen met dat in fig. 2.

De afmetingen van de randbalk moeten echter belangrijk groter zijn, wil bij deze overspanning de wringingsstijfheid een rol spelen. Worden de afmetingen b.v. verdubbeld tot $h = 50$ cm, $d = 60$ cm, dan wordt gevonden:

$$k_r = \frac{E' I_b}{r_0^2} = \frac{E' \frac{1}{12} d h^3}{r_0^2} = 0,1568 E' \dots \dots \dots (p)$$

De stijfheidsfactor van de bolschaal is gegeven in uitdrukking (n). Wordt eenvoudshalve $E = E'$ gesteld, dan bedragen de vereffeningsfactoren volgens formule (105) en (106):

$$\mu_r = \frac{k_r}{k_r + k_c} = \frac{0,1568}{0,1568 + 0,735} = 0,176 \dots \dots \dots (q)$$

$$\mu_c = \frac{k_c}{k_r + k_c} = \frac{0,735}{0,1568 + 0,735} = 0,824 \dots \dots \dots (r)$$

Volgens formule (112) bedraagt nu de meewerkende breedte:

$$c = b(1 - \frac{1}{2}\mu_c) = 116 \cdot 0,588 \text{ cm} = 68 \text{ cm} \dots \dots \dots (s)$$

Het oppervlak F_{tot} van de doorsnede, die de trekkracht T_0 moet opnemen, wordt nu:

betondoorsnede van de randbalk:	$50 \times 60 \text{ cm}^2 = 3000 \text{ cm}^2$
ideële doorsnede van de wapening:	270 cm^2
meewerkende zone in de schaal:	$68 \times 8 \text{ cm}^2 = 544 \text{ cm}^2$
	$F_{\text{tot}} = 3814 \text{ cm}^2$

De trekspanning in de randbalk en in de schaal ter plaatse van de aansluiting bedraagt dan:

$$\sigma_y = \sigma_v = \frac{T_0}{F_{\text{tot}}} = \frac{48600 \text{ kg}}{3814 \text{ cm}^2} = +12,8 \text{ kg/cm}^2 \quad \dots \dots \dots (t)$$

hetgeen belangrijk minder is dan de wel wat hoge spanning van $32,7 \text{ kg/cm}^2$ in het voorgaande.

De verplaatsing van de rand van de schaal naar buiten ten opzichte van de membraanspanningstoestand komt dus overeen met een spanning in omtreksrichting:

$$\sigma_y = \sigma_v = (12,8 + 1,03) \text{ kg/cm}^2 = + 13,8 \text{ kg/cm}^2 \quad \dots \dots \dots (u)$$

Wordt bij deze verplaatsing naar buiten geen verdraaiing toegestaan, dan ontstaat er een primair moment ter plaatse van de aansluiting (als Cross-moment op de randbalk positief – dat is met de klok mee) volgens formule (31):

$$M_{\text{pr}} = + 0,289 \sigma_y t^2 = 0,289 \cdot 13,8 \cdot 8^2 \text{ kgcm/cm} = +255 \text{ kgcm/cm} \quad \dots \dots \dots (v)$$

Er kan hier worden verwezen naar hetgeen reeds is gezegd bij het overeenkomstige geval voor de cilinderschalen op pag. 22. Wordt nu dit moment vereffend, dan blijft volgens formule (107) na de vereffening op de randbalk een (Cross)-moment werkzaam:

$$M_r = + \mu_r M_{\text{pr}} = 45 \text{ kgcm/cm} \quad \dots \dots \dots (w)$$

Op de rand van de bolschaal wordt bij de vereffening volgens formule (108) een moment uitgeoefend:

$$M_c' = + \mu_c M_{\text{pr}} = 210 \text{ kgcm/cm} \quad \dots \dots \dots (x)$$

Aan de rand van de bolschaal resulteert dus ook een moment, volgens (109):

$$M_c = - M_{\text{pr}} + M_c' = -\mu_r M_{\text{pr}} = - M_r = - 45 \text{ kgcm/cm} \quad \dots \dots \dots (y)$$

Het verloop van de buigende momenten in de bolschaal wordt verkregen door superpositie van het verloop volgens formule (19) voor basisgeval a, waarin voor $-P/2\lambda$ bovenstaand primair moment (uitdrukking v) moet worden gesubstitueerd en het verloop volgens formule (61) voor basisgeval d, waarin

voor M_0 bovenstaand moment M_c' (uitdrukking x) moet worden aangehouden. Gevonden wordt dus:

$$M_x = + 255 \sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right) - 210 e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{2}\right) (z)$$

Bij een wringingslappe randbalk, zoals in dit geval, treedt het grootste moment niet op ter plaatse van de aansluiting van schaal en randbalk, doch op enige afstand van deze aansluiting.

De hier gevolgde berekeningswijze is de variant, welke in II-A-3 werd besproken. Uiteraard is een behandeling volgens de daar eerst besproken methode, waarbij de berekening bestaat uit de superpositie van de beide basisgevallen b en c, ook mogelijk. De meewerkende breedte c volgt dan uit formule (100), waarna het oppervlak F_{tot} van de doorsnede, welke de trekkracht T_0 opneemt, kan worden bepaald en de uitkomst (u) voor de spanning σ_y in de randbalk en in de schaal ter plaatse van de aansluiting kan worden verkregen.

Bij basisgeval b zijn de verschillende grootheden uitgedrukt in een lijnlast P , terwijl ook het randmoment, dat door de verende inklemming op de schaal wordt geleverd met behulp van formule (97) in deze lijnlast is uitgedrukt. Deze lijnlast P , die door de schaal moet worden opgenomen, is in het onderhavige geval een fictieve grootheid, die echter met behulp van formule (101) gemakkelijk kan worden uitgedrukt in de kracht N_y aan de rand en daarmee in de randspanning σ_y :

$$P = - \frac{c}{a} (N_y)_{x=0} = - \frac{c}{a} (\sigma_y)_{x=0} t (aa)$$

Voor de spanning σ_y moet hiervoor uiteraard weer de uitkomst (u) worden gebruikt. Gevonden wordt dus:

$$P = - \frac{68}{2900} \cdot 13,8 \cdot 8 \text{ kg/cm} = - 2,59 \text{ kg/cm} (bb)$$

Het randmoment bedraagt volgens (97):

$$M_0 = \frac{P}{2\lambda} \frac{1}{1+K\lambda\psi} = Pb \frac{1}{2+2\frac{K}{b} \frac{1}{k_r}}$$

Met behulp van de uitkomsten (n) en (p) volgt hieruit, wanneer $E = E'$ wordt gesteld, voor het randmoment:

$$M_0 = -2,59 \cdot 116 \frac{1}{2+\frac{0,735}{0,1568}} \text{ kg} = - 45 \text{ kg cm/cm} (cc)$$

Het verloop van de buigende momenten in de bolschaal wordt verkregen door superpositie van het verloop volgens formule (37) voor basisgeval b, waarin voor P bovenstaande uitkomst (bb) moet worden aangehouden en

het verloop volgens formule (53) voor basisgeval c, waarin voor M_0 de uitkomst (cc) moet worden gesubstitueerd. Gevonden wordt:

$$\begin{aligned}
 M_x &= + 2,59 b e^{-\lambda x} \sin \lambda x - 45\sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right) = \\
 &= 300 e^{-\lambda x} \sin \lambda x - 45\sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right) \dots \dots \dots \quad (\text{dd})
 \end{aligned}$$

welke uitkomst uiteraard dezelfde is als uitdrukking (z).

De reeds in II-A-4 (geval m) gegeven gedachtengang, welke hier bij de bolschaal is toegepast, leidt dus snel tot het doel, t.w. het berekenen van de spanningen in randbalk en schaal bij een eindige wringingsstijfheid van de randbalk. Ondersteld is hier, dat de kracht (N_φ) $_{\varphi=\varphi_0}$ van de schaal gaat door het zwaartepunt van de randbalk, anders komt er een extra wringend moment bij, dat zich verdeelt over schaal en randbalk. Voorts is afgezien van de spanningen in de randbalk, veroorzaakt door het wringend moment, dat hierop wordt uitgeoefend. Deze zijn te berekenen met behulp van formule (92).

C OMWENTELINGSSCHALEN

Uit het voorgaande is gebleken, dat de berekening van de randstorings bij bolschalen volgens de benaderingsmethode van GECKELER in feite neerkomt op het toepassen van de formules voor de axiaalsymmetrisch belaste cilinderschaal. Fysisch is dit verklaarbaar, omdat de randstorings zich slechts over een smalle zone nabij de rand uitstrekken en omdat over een dergelijke smalle zone de meridiaandoorsnede van de bolschaal praktisch samenvalt met die van een cilinderschaal met een zelfde straal, die in het beschouwde punt van de rand raakt aan de bolschaal.

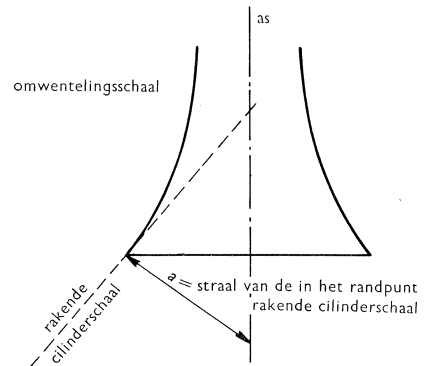


Fig. 21 De benaderingsmethode van GECKELER toegepast voor een omwentelingsschaal

Het is duidelijk, dat deze overwegingen in het algemeen ook gelden voor andere omwentelingsschalen en het ligt dan ook voor de hand de verkregen formules voor de cilinderschaal toe te passen op omwentelingsschalen met willekeurige meridiaandoorsnede, hetgeen voor praktische resultaten geoorloofd zal zijn, mits de restricties, die bij de bolschaal zijn vermeld, in acht worden genomen. De cilinderschaal, die in het beschouwde punt van de rand gedacht wordt te raken aan de omwentelingsschaal, heeft een straal a , die gelijk is aan de tweede hoofdkromtestraal van de omwentelingsschaal in het beschouwde punt, dat is de afstand langs de normaal van het beschouwde punt tot de as (zie fig. 21).

Edge disturbances in shells of revolution under axially symmetrical loading

In the first place the theory of the cylindrical shell under axially symmetrical loading will be referred to in short. This theory is analogous to the theory of the beam on elastic foundation. For a series of basis cases simple formulas are derived. The concept of effective width is introduced which in many cases leads to a rapid solution.

The application of these formulas is illustrated by some examples: pipes under uniform internal pressure or prestressing, reservoirs or silos and also cylindrical barrel shells or shed shells, in which axial symmetry is not present.

It is not necessary, however, to restrict the field of application of the formulas derived to cylindrical shells. It is known that for instance on calculating the edge disturbances in spherical shells, the method of computation of GECKELER is applied. The latter proceeds on a simplified differential equation which is in fact the differential equation of a cylinder under axially symmetrical loading. The justification of this method of computation is due to the fact that the edge disturbances only extend to a narrow zone near the edge. Therefore the formulas derived can also be used in the case of spherical shells.

The application to spherical shells is illustrated by the following examples: a spherical shell during a rise of temperature and a spherical shell under its own weight, while different propositions relating to the torsional stiffness of the edge beam are made. Application of this method of computation to other shells of revolution, such as cones, hyperboloids etc. will be possible in many cases.

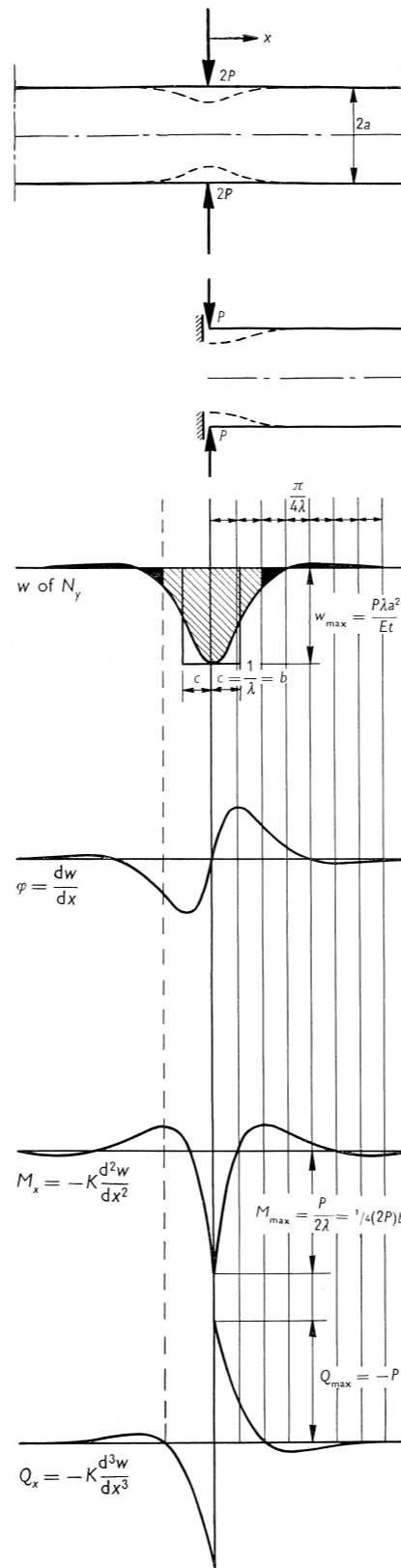


Fig. 2 Basisgeval a

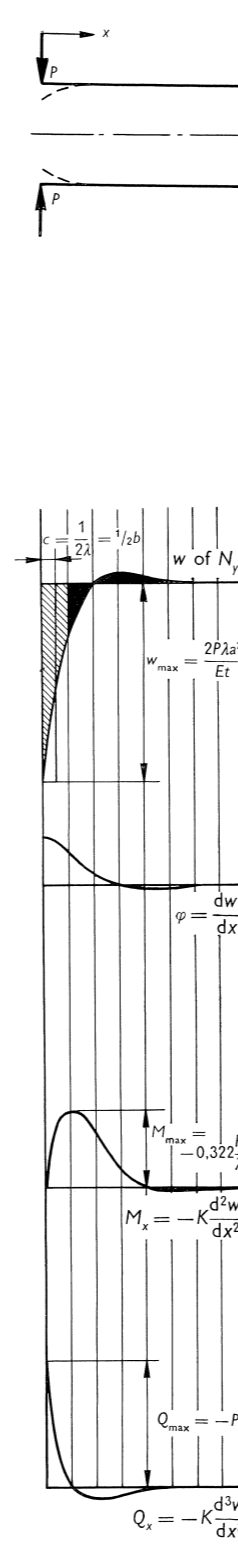


Fig. 3 Basisgeval b

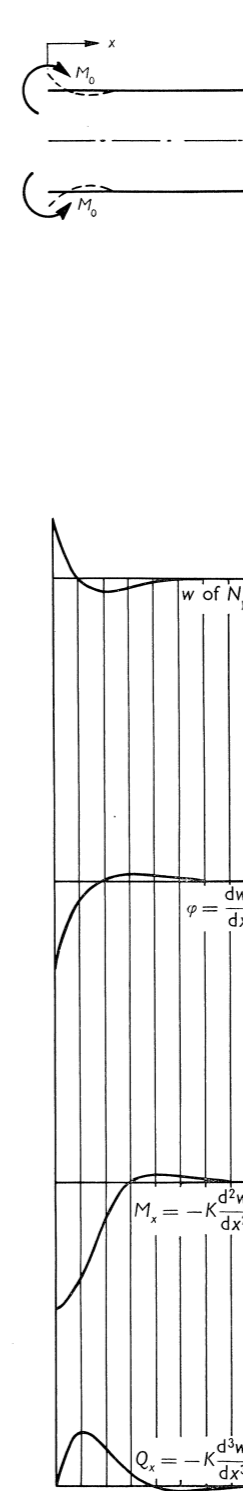


Fig. 4 Basisgeval c

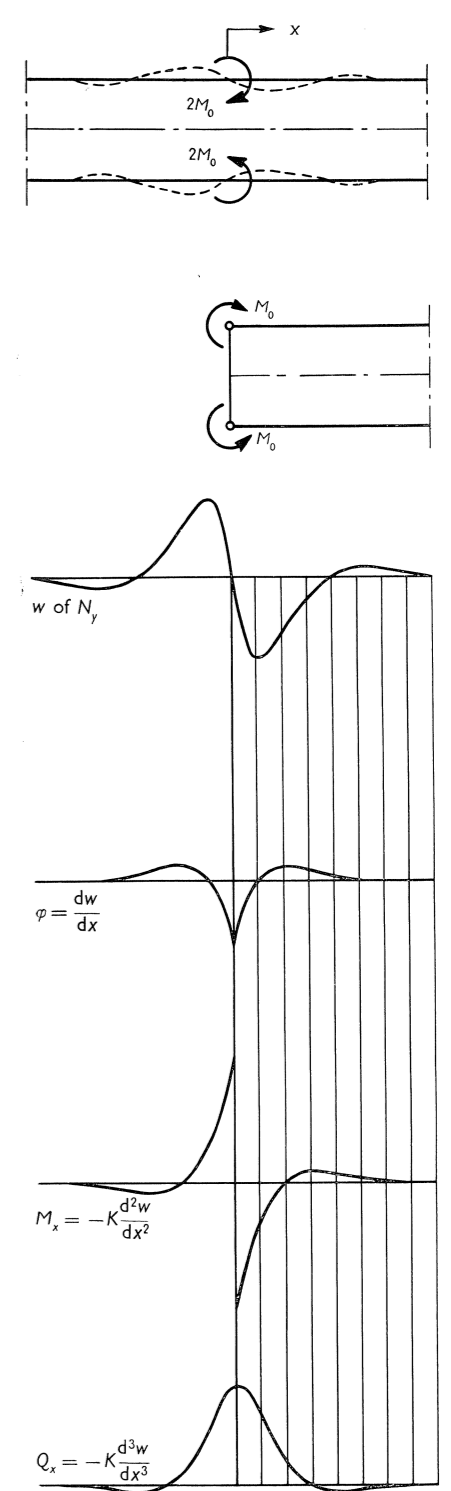


Fig. 5 Basisgeval d

Overzicht van de uitkomsten voor de vier basisgevallen a t/m d, benevens de gevallen e en f

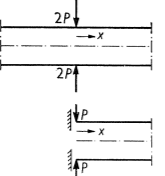
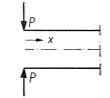
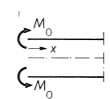
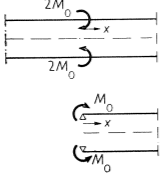
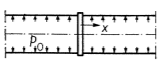
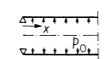
Algemene oplossing van vergelijking (4) : $w = \frac{1}{4\lambda^4 K} Z + Ae^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \omega)$

Voor de elastisch ondersteunde ligger : $w = \frac{q}{k} + Ae^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \omega)$ formules (8) en (10)

Voor de axiaal-symmetrisch belaste cilinderschaal: $w = \frac{a^2}{Et} Z + Ae^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \omega)$ formule (11)

$$\frac{1}{b} = \lambda = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{at}}$$

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

	verplaatsing w	w_{\max}	helling $\frac{dw}{dx} = \varphi_x$	$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{\max}$	buigend moment $M_x = -K \frac{d^2w}{dx^2}$	$(M_x)_{\max}$	dwarskracht $Q_x = -K \frac{d^3w}{dx^3}$	$(Q_x)_{\max}$	meewerkende breedte c
basisgeval a 	$P\lambda \sqrt{2} \frac{a^2}{Et} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{P\lambda a^2}{Et}$ voor $x=0$	$-2P\lambda^2 \frac{a^2}{Et} e^{-\lambda x} \sin \lambda x$	$-0,644 P\lambda^2 \frac{a^2}{Et}$ voor $x = \frac{\pi}{4\lambda}$	$-\frac{P}{2\lambda} \sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{P}{2\lambda} = \frac{1}{4}(2P)b$ voor $x=0$ ook: $\frac{Et^2}{2a\sqrt{3(1-\nu^2)}} w_{x=0}$ en: $\frac{-t}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} (N_y)_{x=0}$	$+P e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{2}\right)$	$-P$ voor $x=0$	$\frac{1}{\lambda} = b$
basisgeval b 	$2P\lambda \frac{a^2}{Et} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right)$	$2 \frac{P\lambda a^2}{Et}$ voor $x=0$	$-2P\lambda^2 \sqrt{2} \frac{a^2}{Et} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right)$	$-2P\lambda^2 \frac{a^2}{Et}$ voor $x=0$	$-\frac{P}{\lambda} e^{-\lambda x} \sin \lambda x$	$-0,322 \frac{P}{\lambda}$ voor $x = \frac{\pi}{4\lambda}$ ook: $-0,093 \frac{Et^2}{a\sqrt{1-\nu^2}} w_{x=0}$ en $+0,093 \frac{t}{\sqrt{1-\nu^2}} (N_y)_{x=0}$	$+P\sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right)$	$-P$ voor $x=0$	$\frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2}b$
basisgeval c 	$-\frac{M_0}{K\lambda^2 \sqrt{2}} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{3\pi}{4}\right)$	$-\frac{M_0}{2K\lambda^2}$ voor $x=0$	$\frac{M_0}{K\lambda} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{M_0}{K\lambda}$ voor $x=0$	$M_0 \sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right)$	M_0 voor $x=0$	$-2\lambda M_0 e^{-\lambda x} \sin \lambda x$	$-0,644 \lambda M_0$	-
basisgeval d 	$-\frac{M_0}{2K\lambda^2} e^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \pi)$	$+0,161 \frac{M_0}{K\lambda^2}$ voor $x = \frac{\pi}{4\lambda}$	$+\frac{M_0}{K\lambda \sqrt{2}} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{3\pi}{4}\right)$	$+\frac{M_0}{2K\lambda}$ voor $x=0$	$+M_0 e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right)$	M_0 voor $x=0$	$-\lambda \sqrt{2} M_0 e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right)$	$-\lambda M_0 = -\frac{M_0}{b}$ voor $x=0$	-
geval e 	$\frac{-p_0 a^2}{Et} \left[1 - \sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right) \right]$	$\frac{-p_0 a^2}{Et}$ in membraan- spannings- toestand	$-2p_0 \lambda \frac{a^2}{Et} e^{-\lambda x} \sin \lambda x$	$-0,644 p_0 \lambda^2 \frac{a^2}{Et}$ voor $x = \frac{\pi}{4\lambda}$	$-\frac{p_0}{2\lambda^2} \sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{p_0}{2\lambda^2} = \frac{1}{2}p_0 b^2$ voor $x=0$	$+\frac{p_0}{\lambda} e^{-\lambda x} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{p_0}{\lambda} = -p_0 b$ voor $x=0$	$\frac{1}{\lambda} = b$
geval f 	$\frac{-p_0 a^2}{Et} \left[1 - e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right) \right]$	$\frac{-p_0 a^2}{Et}$ in membraan- spannings- toestand	$-p_0 \lambda \sqrt{2} \frac{a^2}{Et} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right)$	$-p_0 \lambda \frac{a^2}{Et}$ voor $x=0$	$-\frac{p_0}{2\lambda^2} e^{-\lambda x} \sin \lambda x$	$-0,161 \frac{p_0}{\lambda^2}$ voor $x = \frac{\pi}{4\lambda}$	$+\frac{p_0}{2\lambda} \sqrt{2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{p_0}{2\lambda} = -\frac{1}{2}p_0 b$ voor $x=0$	$\frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2}b$