

# STABILITEIT EN BEZWIJKANALYSE

*De uiterste draagkracht  $P_p$  van een constructie wordt gewoonlijk berekend met behulp van de elementaire bezwijkanalyse. Hoewel vele proeven hebben aangetoond, dat deze berekeningsmethode in het algemeen tot betrouwbare uitkomsten leidt, kan evenwel voor zeer slanke constructies de stabiliteit een ongunstige invloed op de draagkracht uitoefenen. Om deze invloed te beoordelen, wordt in dit artikel een excentrisch gedrukte staaf beschouwd. Het blijkt, dat de werkelijke bezwijklast  $P_{kr}$  kan worden gevonden met behulp van een eenvoudige formule, waarin de uiterste draagkracht  $P_p$ , berekend volgens de elementaire bezwijkanalyse, en de kniklast  $P_E$  volgens Euler een rol spelen.*

*Voor de berekening van de werkelijke bezwijklast van een willekeurig portaal, waarbij de bewegingsmogelijkheden tot het vlak van het portaal beperkt blijven, wordt een overeenkomstige formule gevonden. Om de met  $P_E$  overeenkomende last voor het portaal te vinden, wordt gebruikgemaakt van een karikatuurmodel van de constructie, dat veel slanker is en op eenvoudige wijze met stripjes zachtstaal kan worden opgebouwd.*

*De besproken methode kan van belang zijn, niet alleen voor het verkrijgen van nauwkeuriger ontwerpvoorschriften voor normale constructies, maar ook voor bezwijkanalyse in gevallen zoals brand of oorlogsschade, waarbij de bezwijklast zeer dicht door de belasting kan worden benaderd.*

*De gegeven gedachtengang is grotendeels het resultaat van spoorwerk, uitgevoerd in het Stevin-Laboratorium van de afd. W.- en W. van de T.H. te Delft, toen de auteur ir. Ligtenberg nog tot de staf van genoemd labootorium behoorde.*

## Inleiding

Zoals bekend, is het de bedoeling van de bezwijkanalyse een constructie te ontwerpen op uiterste draagkracht, hetgeen wil zeggen, dat wordt getracht de belasting vast te stellen, waarbij de constructie werkelijk bezwijkt. In het algemeen leidt dit, vooral ten aanzien van staalconstructies, tot een eenvoudige berekeningsmethode, daar mag worden aangenomen, dat een doorsnede bij het bereiken van een zeker moment  $M_p$  een „plastisch scharnier” gaat vormen, dat bij een willekeurige hoekverdraaiing steeds hetzelfde moment blijft overbrengen. Bij toenemende belasting bezwijkt de constructie als er zoveel plastische scharnieren zijn gevormd, dat deze een mechanisme wordt, m.a.w. labiel wordt. Een verdere toeneming van de belasting is niet meer mogelijk.<sup>1)</sup>

Door middel van de bezwijkanalyse kan een goed oordeel worden gevormd over de reserve aan draagkracht, waarover de constructie nog beschikt als de toelaatbare belasting volgens de elastische berekeningsmethoden is bereikt. Het ligt voor de hand, dat in bepaalde gevallen kan worden geconcludeerd, dat aanzienlijke materiaalbesparingen mogelijk zijn. De tot dusver uitgevoerde constructies, die volgens de plasticiteitstheorie zijn berekend, geven om deze reden veelal een slanke indruk. Een aantal voorbeelden hiervan is o.a. te vinden in „The Steel Skeleton” vol. II, van BAKER, HEYMAN en HORNE. De vraag rijst of op deze wijze niet te ver kan worden gegaan, zodat b.v. de kans bestaat dat een constructie zo slank wordt, dat de stabiliteit in gevaar komt. Is in dit opzicht wellicht een betrouwbaar criterium te vinden?

<sup>1)</sup> Men zie o.a.: I.B.C.-mededelingen 5 (1957) no. 2/3.

De nauwkeurige theorie van knik in het elastoplastisch gebied is bijzonder ingewikkeld. Wil een methode worden gevonden om de stabiliteit te beoordelen, die enigszins bij de elementaire bezwijkanalyse aansluit, dan zullen belangrijke vereenvoudigingen nodig zijn om tot een voldoende overzichtelijk resultaat te komen.

### Excentrisch gedrukte staaf

Teneinde enig inzicht in het probleem te verkrijgen, wordt het eenvoudige geval van een rechte, excentrisch gedrukte, prismatische staaf beschouwd (zie fig. 1). Deze bezit een lengte  $l$ , een stijfheid  $EI$  en een volplastisch moment  $M_p$ . Alle vervormingen van de staaf blijven in het vlak van tekening. Wanneer op deze staaf de elementaire bezwijkanalyse zou worden toegepast, dan zou worden gevonden:

$$M_p = P_p e \dots \dots \dots (1)$$

hetgeen wil zeggen, dat tot de last  $P_p = \frac{M_p}{e}$  de staaf zich elastisch gedraagt.

Bij het bereiken van  $P_p$  treedt over de volle lengte van de staaf een plastisch scharnier op, waarbij het grensdragvermogen is bereikt. Als de staaf een eindige stijfheid  $EI$  heeft, treden evenwel doorbuigingen op tengevolge van het buigend moment. Het werkelijk optredend moment ter plaatse van het midden van de staaf wordt groter, nl.  $M = Py$  (zie fig. 1). Wanneer de doorbuiging  $y$  door het moment  $M = Pe$  zou worden veroorzaakt, dan zou worden gevonden (zie fig. 2):

$$y = e + \frac{Pe l^2}{8 EI} \dots \dots \dots (2)$$

In werkelijkheid is echter het moment niet gelijk aan  $Pe$ , doch aan  $Py$ , zodat de doorbuigingen groter worden.

Het is bekend, dat met een redelijke benadering gerekend mag worden, dat:

$$y = \frac{n}{n-1} e \dots \dots \dots (3a)$$

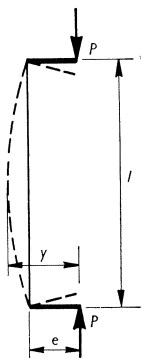


Fig. 1. Excentrisch gedrukte staaf

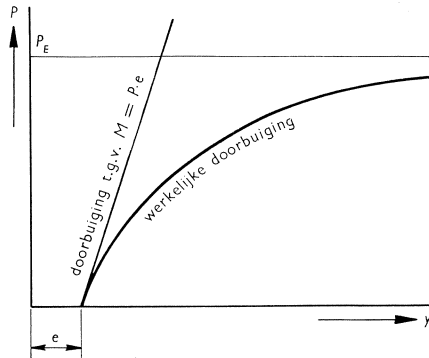


Fig. 2. Verband tussen de doorbuiging en de belasting van een excentrisch gedrukte staaf

waarin  $n$  de verhouding tussen de kniklast  $P_E$  volgens EULER en de werkelijk aangebrachte last  $P$  is:

$$n = \frac{P_E}{P} \quad \text{en} \quad P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Geschreven kan dus worden:

$$y = \frac{e}{1 - \frac{P}{P_E}} \quad \dots \dots \dots (3b)$$

De staaf bezwijkt als  $P = P_{kr}$ , zodat  $P_{kr} y = M_p$ . Hieruit volgt, dat:

$$M_p = P_p e = \frac{P_{kr} e}{1 - \frac{P_{kr}}{P_E}} \quad \dots \dots \dots (4a)$$

en dus:

$$P_{kr} = \frac{P_E P_p}{P_E + P_p} \quad \dots \dots \dots (4b)$$

of:

$$\frac{1}{P_{kr}} = \frac{1}{P_E} + \frac{1}{P_p} \quad \dots \dots \dots (4c)$$

Met deze eenvoudige formule blijkt men in staat te zijn zeer goed de bezwijklast van een excentrisch gedrukte staaf te kunnen voorspellen. Voor niet te gedrongen staven is de invloed van de normaalkracht op het volplastisch moment niet groot, zodat deze gewoonlijk kan worden verwaarloosd.

### Raamwerk van staven

Wanneer van deze eenvoudige staaf naar een meer gecompliceerd staaf-systeem – b.v. een portaal – wordt overgegaan, dan ligt het voor de hand te veronderstellen, dat ook bij de draagkracht van een dergelijke constructie zowel de elastische stabiliteit als de bezwijklast volgens de elementaire bezwijkanalyse een rol zullen spelen.

Bij een geringe last gedraagt dit systeem zich geheel elastisch. De doorbuigingen  $z_0$  kunnen worden afgeleid uit de krachtsverdeling, zoals wordt gevonden voor het onvervormde systeem (de gangbare elastische berekening). Aangenomen wordt, dat geen verplaatsingen uit het vlak van het systeem mogelijk zijn. Daar de vervormingen ook enige invloed zullen uitoefenen op de krachtsverdeling, worden deze vermenigvuldigd met een geringe vergrotingsfactor  $\frac{n_0}{n_0 - 1}$ , waarbij  $n_0 = \frac{P}{P_0}$  en  $P_0$  de elastische kniklast van het

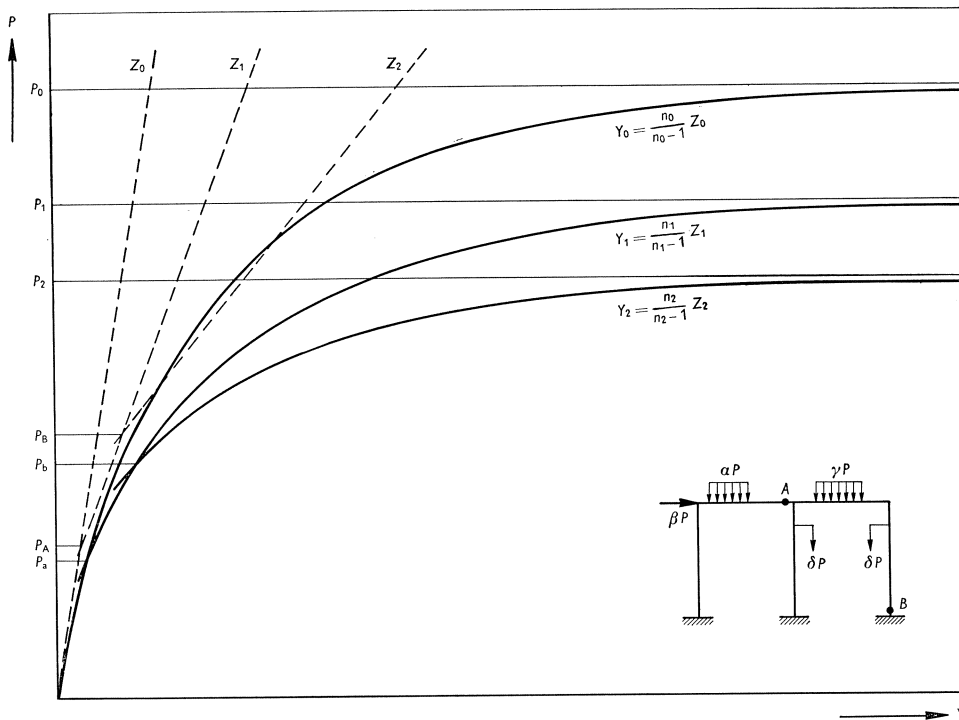


Fig. 3. Verband tussen de verplaatsing  $y$  van een willekeurig punt van een constructie (b.v. de horizontale verplaatsing van de bovenregel van het geschetste systeem) en de belasting. Hierbij spelen een rol:

- de elastische kniklast  $P_0$ : als nog geen plastische scharnieren zijn ontstaan
- $P_1$ : voor de constructie met een scharnier in  $A$
- $P_2$ : voor de constructie met scharnieren in  $A$  en  $B$

Volgens een gewone elastische berekening, waarbij de invloed van de vervormingen dus verwaarloosd wordt, zou bij een last  $P = P_A$  in  $A$  een plastisch scharnier worden gevormd. In werkelijkheid geschiedt dit bij een enigszins kleinere last  $P_a$ , omdat de verplaatsingen  $y_0$  ook enige invloed op de krachtsverdeling hebben. Na de vorming van het plastisch scharnier in  $A$  is de constructie slapper, zodat verplaatsingen  $y_1$  optreden. Voor  $P = P_b$  ontstaat in  $B$  het volgende scharnier, zodat het systeem nog slapper wordt en verplaatsingen  $y_2$  optreden etc.

geheel elastisch gedachte portaal voorstelt. De werkelijke doorbuigingen zijn dan (zie fig. 3):

$$y_0 = \frac{n_0}{n_0 - 1} z_0 \dots \dots \dots (5)$$

Heeft  $P$  de waarde  $P_a$  bereikt, dan is het moment in punt  $A$  gelijk geworden aan  $M_p$ , zodat daar een plastisch scharnier ontstaat. Ook nu nog gedraagt het portaal zich elastisch. Slechts ter plaatse van het plastisch scharnier is een bekend „uitwendig” moment aanwezig, doch overigens gedraagt het scharnier zich als een gewoon scharnier. Weer kan dus een krachtsverdeling worden gevonden, waaruit thans met een vergrotingsfactor  $\frac{n_1}{n_1 - 1}$ , de doorbuigingen  $y_1$  kunnen worden afgeleid. Hierbij is  $n_1 = \frac{P_1}{P}$ , terwijl  $P_1$  de elastische knik-

kracht is van het portaal met een scharnier in A. Uiteraard is  $P_1$  kleiner dan  $P_0$ . Zo voortgaande ontstaat voor  $P = P_b$  eveneens een scharnier en wel in B (zie fig. 3). De elastische kniklast van het portaal met twee scharnieren zij  $P_2$ , waarbij  $P_2 < P_1 < P_0$ .

Op deze wijze vormt zich een aantal scharnieren tot een systeem ontstaat met  $n$  scharnieren, dat een elastische knikkraft  $P_N$  bezit, die lager is dan de kracht  $P_n$ , waarbij het scharnier  $n$  werd gevormd. Het meest voor de hand liggende geval is dat, waarmee de elementaire bezwijkanalyse rekest, nl. dat  $P_N = 0$ , waarbij de constructie met  $n$  plastische scharnieren een mechanisme is geworden. Bij slanke constructies kan echter in sommige gevallen ook reeds bij een kleiner aantal plastische scharnieren een zodanige teruggang in het draagvermogen optreden, dat van bezwijken kan worden gesproken.

Wanneer wordt verondersteld, dat de plaats  $N$  bekend is, waar het  $n$ de en laatste plastische scharnier binnenkort zal ontstaan, is het duidelijk, dat in het systeem met  $n-1$  scharnieren het moment in  $N$  wordt gekarakteriseerd door de kracht  $R_{n-1}$ , die deze doorsnede moet overbrengen en de excentriciteit  $z_{n-1}$  van deze kracht. Als de krachtsverdeling wordt voorgesteld door een druklijn, waarlangs bepaalde krachtcomponenten werken, dan kan deze krachtsverdeling worden bepaald voor het onvervormde systeem met  $n-1$  scharnieren. De kracht  $R_{n-1}$  is dan dus lineair van  $P$  afhankelijk en de excentriciteit  $z_{n-1}$  is bekend. Ten gevolge van de vervormingen zal de excentriciteit ongeveer

met een faktor  $\frac{n_{n-1}}{n_{n-1}-1}$  worden vermenigvuldigd, terwijl de grootte van  $R_{n-1}$  betrekkelijk weinig verandert, omdat  $R_{n-1}$  wordt verkregen door ontbinding van het uitwendig aangrijpend belastingssysteem.

Het plastische scharnier in  $N$  zal dus ontstaan, als:

$$R_{n-1} \frac{n_{n-1}}{n_{n-1}-1} z_{n-1} = M_p \dots \dots \dots (6)$$

Wordt ter vergelijking een rechte staaf beschouwd, zoals op pag. 57 is besproken, dan kan deze zo goed mogelijk equivalent worden gemaakt aan de gegeven constructie. Dit wil zeggen, dat voor deze staaf, die wordt belast door  $P$  met een excentriciteit  $e_{n-1}$  geldt, dat:

de kniklast volgens EULER  $P_E =$  de elastische kniklast  $P_{n-1}$  van het portaal met  $n-1$  scharnieren;

de kritieke last  $P_{kr} = P_{kr}$  van het portaal;

de bezwijklast volgens de elementaire bezwijkanalyse  $P_p = P_p$  van het portaal.

Daar  $R_{n-1}$  lineair afhankelijk is van  $P$  kan worden geschreven:

$$P e_{n-1} = R_{n-1} z_{n-1} \dots \dots \dots (7a)$$

Op het ogenblik, dat het  $n$ de en laatste scharnier ontstaat, wordt  $P = P_{kr}$ , zodat:

$$P_{kr} e_{n-1} = R_{n-1} z_{n-1} \dots \dots \dots (7b)$$

of, met inachtneming van (6):

$$P_{kr} e_{n-1} \frac{n_{n-1}}{n_{n-1}-1} = R_{n-1} z_{n-1} \frac{n_{n-1}}{n_{n-1}-1} = M_p \dots \dots \dots (7c)$$

Uit de elementaire bezwijkanalyse, waarbij dus de vervormingen worden verwaarloosd, is bekend, dat:

$$P_p e_{n-1} = M_p \dots \dots \dots (8)$$

wanneer ten minste wordt verondersteld, dat in beide gevallen hetzelfde scharnier als laatste optreedt. Gesteld kan dus worden, dat:

$$P_p e_{n-1} = P_{kr} e_{n-1} \frac{n_{n-1}}{n_{n-1}-1} \dots \dots \dots (9a)$$

of:

$$P_{kr} = \frac{n_{n-1}-1}{n_{n-1}} P_p = \frac{P_{n-1}-P_{kr}}{P_{n-1}} P_p \dots \dots \dots (9b)$$

zodat:

$$\frac{1}{P_{kr}} = \frac{1}{P_p} + \frac{1}{P_{n-1}} \dots \dots \dots (9c)$$

Het is dus niet onredelijk te veronderstellen, dat de werkelijke bezwijklast  $P_{kr}$  van een portaalconstructie, evenals die van een excentrisch gedrukte staaf op zeer eenvoudige wijze kan worden uitgedrukt in:

$P_p$  = de bezwijklast van de constructie volgens de elementaire bezwijkanalyse;

$P_{n-1}$  = de elastische kniklast van het, in vele gevallen statisch bepaalde, systeem, waarin alle scharnieren behalve het laatste zijn gevormd.

Het is evenwel niet eenvoudig om  $P_{n-1}$  door berekening te bepalen, omdat, alvorens het voorlaatste plastische scharnier optreedt, de stabiliteit reeds een merkbare invloed op de krachtsverdeling kan uitoefenen. De elementaire bezwijkanalyse is om deze reden niet altijd in staat met voldoende zekerheid te voorspellen, waar de plastische scharnieren zich zullen bevinden en in welke volgorde deze zullen ontstaan.

### Toepassing van het model als hulpmiddel

De gedachte ligt nu voor de hand een model in te schakelen om dit probleem op te lossen. Uiteraard heeft een model, dat een „karikatuur” is van de te onderzoeken portaalconstructie, waarbij de invloed van de stabiliteit een overdreven rol speelt, vele voordelen boven een geheel realistisch model. Door de grote slankheid van een dergelijk „karikatuur”-model kan worden verwacht, dat de bezwijklast aanzienlijk lager is dan de elementaire bezwijk-

analyse voorspelt. Voor de werkelijke constructie wordt de grootheid  $\frac{EI}{l^2} = A$  gesteld en voorts  $\frac{M_p}{l} = K$ . Voor het model bedragen deze waarden resp.  $A_1$  en  $K_1$ .

De bezwijklast volgens de elementaire bezwijkanalyse voor de werkelijke constructie bedraagt  $P_p = pK$  en voor het model  $P_p' = pK_1$ . Voorts zal, indien bij het model en bij de constructie de plastische scharnieren in dezelfde volgorde en op dezelfde plaatsen optreden, de kniklast  $P_{n-1}'$  van het model in die van de werkelijke constructie als volgt kunnen worden uitgedrukt:

$$P_{n-1}' = \frac{A_1}{A} P_{n-1} \dots \dots \dots (10)$$

In werkelijkheid zal  $P_{n-1}'$  gewoonlijk iets kleiner zijn, daar immers de modelafmetingen op zodanige wijze worden gekozen, dat de vervormingen bij het model meer invloed hebben op de vorming van de plastische scharnieren dan bij de werkelijke constructie.

De bezwijklast van het model  $P_{kr}'$  kan worden uitgedrukt in  $P_p'$  en  $P_{n-1}'$ , overeenkomstig (9c):

$$\frac{1}{P_{kr}'} = \frac{1}{P_p'} + \frac{1}{P_{n-1}'} \dots \dots \dots (11a)$$

waaruit volgt:

$$\frac{1}{P_{n-1}'} = \frac{1}{P_{kr}'} - \frac{1}{P_p'} \dots \dots \dots (11b)$$

De kniklast van de werkelijke constructie is dan met behulp van (10) als volgt te bepalen:

$$\frac{1}{P_{n-1}} = \frac{A_1}{A} \frac{1}{P_{n-1}'} = \frac{A_1}{A} \left( \frac{1}{P_{kr}'} - \frac{1}{pK_1} \right) \dots \dots \dots (12)$$

Hiermede wordt een enigszins lage schatting voor  $P_{n-1}$  verkregen, zodat daarmede aan de veilige kant wordt gebleven. De bezwijklast  $P_{kr}$  van de werkelijke constructie kan nu worden voorspeld aan de hand van de verrassend eenvoudige formule, verkregen door substitutie van (12) in (9c):

$$\frac{1}{P_{kr}} = \frac{A_1}{A} \left( \frac{1}{P_{kr}'} - \frac{1}{pK_1} \right) + \frac{1}{pK} \dots \dots \dots (13)$$

In deze formule zijn  $A$  en  $K$  grootheden, die aan de werkelijke constructie zijn ontleend.  $A_1$  en  $K_1$  worden bepaald door de afmetingen van het model, terwijl  $p$  wordt gevonden met de elementaire bezwijkanalyse.  $P_{kr}'$  is de bezwijklast van het model. Het feit, dat slechts de bezwijklast behoeft te worden bepaald, maakt de modeltechniek wel bijzonder eenvoudig.

## Modeltechniek

Een model kan worden vervaardigd van strippen zachtstaal. Het staal dient een duidelijke vloeigrens te bezitten. Met behulp van een ligger op twee steunpunten of een ingeklemde staaf kunnen  $M_p$  en  $EI$  worden bepaald. De waarde van de laatste grootheid is evenwel ook door middel van berekening voldoende nauwkeurig te vinden. Het is noodzakelijk voor alle staven, zowel aan de

verhouding  $\frac{A_1}{A}$  als aan  $\frac{K_1}{K}$ , een bepaalde constante waarde toe te kennen. Uiteraard zal  $\frac{A_1}{A}$  aanzienlijk kleiner moeten zijn dan  $\frac{K_1}{K}$ , omdat

$a = \frac{A}{K} = \frac{EI}{l^2} : \frac{M_p}{l}$  een maat is voor de invloed van de stabiliteit op de draag-

kracht. Naarmate  $a$  kleiner is, zal de constructie slapper zijn en het model moet overdreven slap zijn. Daar  $M_p = \frac{1}{4} bh^2 \sigma_v$  en  $I = \frac{1}{12} bh^3$ , kan door middel van  $h$ , zijnde de dikte van de plaat waaruit de strippen worden geknipt, de

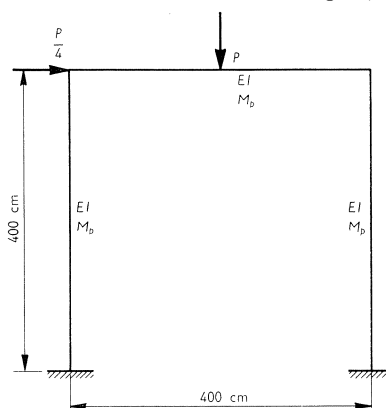
verhouding  $a = \frac{EI}{M_p l} = \frac{Eh}{3\sigma_v l}$  willekeurig worden bepaald. Met behulp

van de breedte  $b$  van de strippen kunnen daarna de waarden voor  $M_p$  en  $EI$  nog worden gekozen.

Het samenstellen van het model kan zeer eenvoudig met behulp van klemmetjes, meccano-onderdelen of zelfs lassen geschieden. Een groot voordeel is, dat de druklijnen van de krachten in het algemeen ver van de staafassen verwijderd liggen. Om deze reden spelen initiale krommingen van de staven, die bij meer theoretische knikgevallen steeds vele experimentele moeilijkheden leveren, bij de onderhavige modellen geen rol. Ook de juiste vorm van het moment-krommingsdiagram heeft weinig invloed op de uitkomsten. Zolang maar  $M_p$  niet verandert, blijft de sterkte van het model praktisch gehandhaafd, zodat het in vele gevallen mogelijk is een eenmaal bezweken model weer recht te buigen en daarna, b.v. voor het onderzoek van een ander belastingsgeval, nogmaals te gebruiken.

Ter illustratie wordt als voorbeeld genomen een portaal, vervaardigd van DIN 10 volgens fig. 4. Aangenomen wordt, dat de constructie geheel tegen zijdelingse verplaatsing uit zijn vlak is verzekerd. Wanneer voor het model de waarde voor  $a = 0,1 \times$  die voor de werkelijke constructie wordt gekozen, dan is de slankheid in het model aanzienlijk overdreven.

Fig. 4.





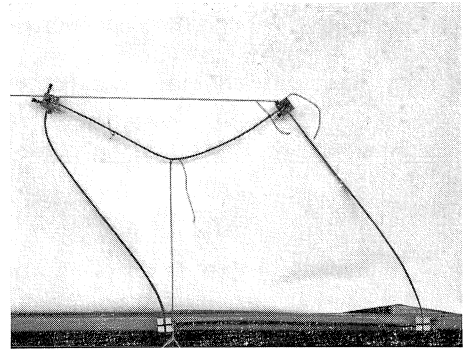
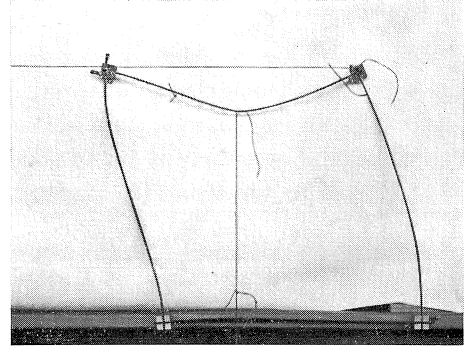
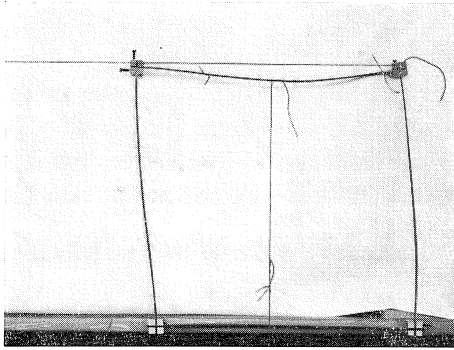


Foto 1, 2 en 3.  
 Verschillende vervormingsstadia van een model van een portaal bij toenemende belasting. De verplaatsingen zijn uitsluitend opgetreden in het vlak van het portaal.

Voor de constructie gelden de volgende waarden:

$$A = \frac{EI}{l^2} = 6450 \text{ kg} \quad \text{en} \quad K = \frac{M_p}{l} = 655 \text{ kg},$$

zodat:

$$a = \frac{A}{K} = \frac{6450}{655} = 9,82.$$

Voor het vervaardigde model werden zachtstalen strippen gekozen van  $1,5 \cdot 10 \text{ mm}^2$ . Hieruit volgt, dat  $EI = 605 \text{ kgcm}^2$  en  $M_p = 13 \text{ kgcm}$ , bepaald aan de hand van een driepuntsbuigproef. Voor het model gold dus:

$$a = \frac{EI}{M_p l} = 0,1 \cdot 9,82 = 0,982$$

zodat:

$$l = \frac{605}{0,982 \cdot 13} = 47,4 \text{ cm}.$$

De waarden voor  $A_1$  en  $K_1$  konden nu worden berekend. Deze waren:

$$A_1 = \frac{EI}{l^2} = 0,27 \text{ kg} \quad \text{en} \quad K_1 = \frac{M_p}{l} = 0,275 \text{ kg}.$$

Volgens de elementaire bezwijkanalyse is de bezwijklast  $P_p = 8 \frac{M_p}{l}$  (zie foto's 1 t/m 3). Het model bezweek echter bij  $P'_{kr} = 1,8 \text{ kg} = 6,55 \frac{M_p}{l}$ .

De bezwijklast van de werkelijke constructie was nu te bepalen volgens (13):

$$\frac{1}{P_{kr}} = \frac{0,27}{6450} \left( \frac{1}{1,8} - \frac{1}{8 \cdot 0,275} \right) + \frac{1}{8 \cdot 655} = 195 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{-1},$$

waaruit volgt:

$$P_{kr} = 5130 \text{ kg}.$$

Volgens de elementaire bezwijkanalyse zou de bezwijklast zijn:

$$P_p = 8 \frac{M_p}{l} = 8 \cdot 655 = 5240 \text{ kg}.$$

De werkelijke bezwijklast was dus in dit geval 2,3% kleiner dan de elementaire bezwijkanalyse voorspelde.

Later is gebleken, dat ook een berekening van dit geval tot vrij goede resultaten kan leiden. Daartoe dienen dan enige plausibele onderstellingen over de aard van de optredende vervormingen te worden gedaan. Een dergelijke berekening blijft echter onder alle omstandigheden zeer bewerkelijk, daar eveneens onderstellingen moeten worden gedaan ten aanzien van de plaats van het laatste scharnier en over het aantal scharnieren, waarbij bezwijken optreedt.

### Ruimtelijk geval

Tot nu toe is het geval beschouwd, waarin verondersteld werd, dat de bewegingsmogelijkheden van een constructie tot het vlak van de constructie beperkt bleven. Het meer algemene geval, waarbij een doorsnede niet in het vlak van de constructie blijft (zie fig. 5), wordt uiteraard veel ingewikkelder.

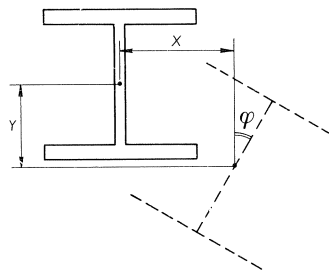


Fig. 5.

Er zijn drie soorten verplaatsingen mogelijk, nl.  $x$ ,  $y$  en  $\varphi$ , die elk associaties oproepen aan bepaalde typen knikgevallen. Met  $y$  is blijkbaar verbonden de knik in het vlak van het systeem en met  $x$  en  $\varphi$  knik loodrecht op dit vlak, zoals b.v. zijdelings uitknikken en kip. Er zijn aanwijzingen, dat het mogelijk is met even eenvoudige middelen als zijn beschreven voor het vlakke geval, eveneens voor het ruimtelijke geval de invloed van de stabiliteit op de draagkracht te onderzoeken. Dit is van belang, omdat de meeste constructies, die ongeveer tot bezwijken worden belast, inderdaad als ruimtelijke constructies gaan werken, wanneer tenminste alle onderdelen op ongeveer dezelfde lasten zijn berekend.

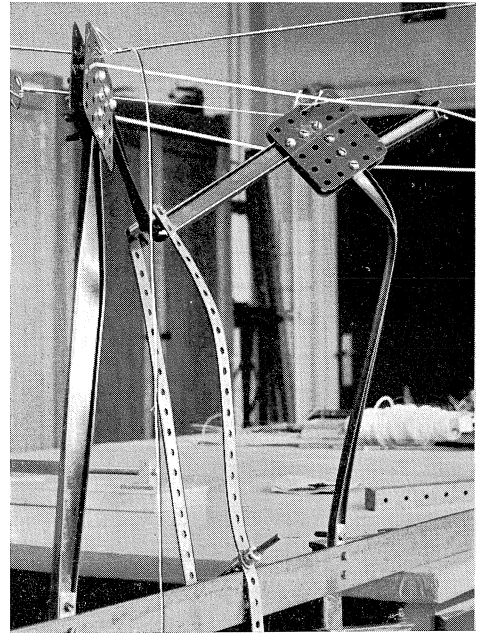
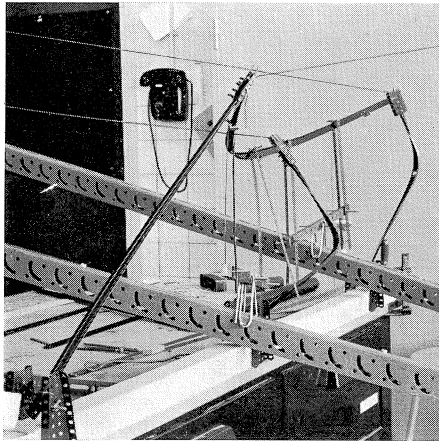


Foto 4 en 5.  
 Bezwijkvormen van enkele modellen van raamwerken, waarbij eveneens verplaatsingen uit het vlak van de raamwerken zijn opgetreden.

Om een dergelijk geval te onderzoeken, zouden drie verschillende „karikatuur“-modellen nodig zijn. Welke merkwaardige bezwijkvormen kunnen ontstaan, tonen de foto's 4 en 5. De modellen zijn gemaakt van gordijnrailprofielen.

### **Conclusie**

In normale gevallen zal de bezwijklast redelijk met behulp van de elementaire bezwijkanalyse kunnen worden voorspeld. Uiteraard verdient het aanbeveling om de stabiliteit van de constructie zoveel mogelijk te verzekeren. In het bekende boek van BAKER, HEYMAN en HORNE „The Steel Skeleton“, vol. II, wordt dan ook uitvoerig ingegaan op de wijze om minimumafmetingen van stijlen en regels zodanig te kunnen kiezen, dat knik- en kipverschijnselen de berekende draagkracht niet nadelig zullen beïnvloeden.

Er kunnen zich evenwel omstandigheden voordoen, waarin het van belang is ook van een zeer slanke constructie de bezwijklast te bepalen. Dit kan b.v. het geval zijn als het gewenst is nauwkeuriger regels voor het ontwerpen op te stellen, dan waarover BAKER c.s. thans beschikken. Voorts kan de bestemming van een bestaande constructie worden gewijzigd, waardoor achteraf een berekening nodig wordt volgens de bezwijkanalyse. Belangrijke toepassingen zijn denkbaar, als het gaat over constructies, die in oorlogstijd vitale belangen dienen, zoals fabrieken en schuilkelders, waarbij de werkelijke bezwijklast, ook als stijlen door bominslag zijn vernield, belangrijk kan zijn. Dit geldt tevens in geval van brand, waarbij door de temperatuurverhoging de vloeigrens en de elasticiteitsmodulus van staal afnemen. De toeneming van de kruip zal boven-

dien de vervormingen vergroten. De schade en het gevaar voor mensenlevens is zeer veel kleiner als een constructie desondanks niet instort.

In dergelijke gevallen geeft de besproken methode – die vermoedelijk ook tot ruimtelijke constructies kan worden uitgebreid – een eenvoudig hulpmiddel om te beoordelen of de werkelijke bezwijklast wellicht kleiner is dan de elementaire bezwijkanalyse voorspelt. Het benodigde model, waarbij de constructie overdreven slank wordt voorgesteld, is zeer eenvoudig samen te stellen en te beproeven.

### **Stability and collapse analysis**

The ultimate load  $P_p$  of a structure is usually calculated with the aid of the elementary collapse analysis. Many experiments have shown that this method of calculation generally leads to reliable results. When we, however, have to do with very slender structures, the stability may exercise an unfavourable influence on the ultimate load.

In order to have a judgment about this influence, in this article an eccentrically loaded column is considered. It appears that the real collapse load  $P_{cr}$  can be found with the help of a simple formula in which the ultimate load  $P_p$ , calculated according to the elementary collapse analysis and the buckling load  $P_E$  according to Euler are playing a part.

For the calculation of the real collapse load of any given portal frame for which the possibilities for moving are restricted to the plane of the portal frame, a corresponding formula is found. In order to find for the portal frame the load corresponding with  $P_E$ , a caricature model of the structure is used which is much more slender, and which can be built up in a simple way with small strips of mild steel.

The method discussed may be of importance, not only for obtaining more exact design standards for normal structures, but also for a collapse analysis in cases of fire, war-damage or the like, under which conditions the loading may approach the collapse load very closely.

### **Lijst van verschenen rapporten II <sup>1)</sup>**

De onderstaande rapporten kunnen op verzoek tegen kostprijs worden verstrekt. De inhoud dient als betrouwbaar te worden beschouwd, daar in sommige gevallen het onderzoek nog niet voltooid is en in andere gevallen de resultaten nog niet van zodanige aard zijn, dat definitieve conclusies kunnen worden getrokken.

*Rapport BI-56-3*

3+11 pag.

#### **Research on the ultimate concentrated and line load for an infinite slab on two supports and on the cooperating width at failure**

Genoemd worden de factoren, die van invloed kunnen zijn op de uiterste draagkracht van een oneindig lange, aan twee zijden vrij opgelegde, rechthoekige gewapend-betonplaat, welke wordt onderworpen aan een puntlast of een lijnlast. Met behulp van de breuklijnentheorie van JOHANSEN is voor verschillende gevallen, waarbij de plaats van de last en de hoeveelheid wapening in beide richtingen is gevarieerd, de uiterste draagkracht en de meewerkende breedte bij breuk berekend. Dit rapport is mede bedoeld als inleiding op rapport BI-56-4.

*Rapport BI-56-4*

27 pag. + 39 fig. + 19 foto's

#### **Ultimate concentrated and line load for an infinite slab on two supports**

Besproken wordt de beproeving van een aantal rechthoekige gewapend-betonplaten, vervaardigd op verkleinde schaal. De verhouding van de zijden van de platen bedroeg ca 1 : 3, terwijl twee zijden zwevend en de andere zijden vrij opgelegd waren. Gevarieerd werd de hoeveelheid wapening in beide richtingen. De gemeten uiterste draagkrachten worden vergeleken met die volgens de theorie van JOHANSEN.

<sup>1)</sup> Vervolg op de lijst, opgenomen in de I.B.C.-mededelingen 4 (1956) no. 3.