

## DE DUBBELGEKROMDE SCHAAL BESCHOUWD ALS EEN PLAAT OP ELASTISCHE BEDDING

U.D.C. 624.074.4

*Uit de differentiaalvergelijking van de dubbelgekromde schaal in de verplaatsingscomponenten  $u$ ,  $v$  en  $w$  blijkt, dat deze wat de buigingsverschijnselen betreft, kan worden opgevat als een vlakke plaat op elastische bedding, althans in een voldoende klein gebied rondom de top van de osculerende paraboloïde, dat als quasi-euclidisch kan worden beschouwd. De tegendrukcoëfficiënt van de elastische bedding is afhankelijk van de dikte van de schaal en de hoofdkrommingen van het middenvlak. Echter moet de werkelijke belasting van de plaat nog worden vermeerderd met een vervormingsbelasting afhankelijk van de verplaatsingen  $u$  en  $v$  in het middenvlak.*

*Verschillende aspecten van deze beschouwingswijze worden getoetst aan eenvoudige voorbeelden alsmede aan beproevingsresultaten verkregen met een groot model van een gelijkzijdige hypparschaal.*

### 0 Inleiding

Zoals bekend is kan een gekromde schaal een belasting loodrecht op het middenvlak in de vorm van membraankrachten opnemen. In die gevallen waarin de membraanreacties kunnen worden opgenomen en de bijbehorende vormveranderingen van de schaal ongestoord kunnen plaats hebben, is een krachtsverdeling uitsluitend door membraankrachten een goede benadering van de werkelijke krachtsoverbrenging. Een statisch mogelijke spanningsverdeling waarbij buiging en wringing vermeden worden, geeft immers met grote benadering de minimale vormveranderingsarbeid in de constructie. De gebruikelijke gang van zaken is dan ook, dat men begint met de krachtsverdeling in de schaal te berekenen volgens de membraantheorie. Daarna zal men dan zo goed mogelijk een corrigerende krachtsverdeling moeten aanbrengen in verband met de begrenzingen (randbalken c.q. opleggingen) van de schaal, waar de vormveranderingen, die het gevolg zijn van genoemde membraanspanningstoestand, niet ongehinderd kunnen optreden. Denkt men zich nl. het randlid een ogenblik losgemaakt van de schaal, zodat de bedoelde vormveranderingen wèl ongehinderd kunnen plaatsvinden, dan zouden schaalrand en randlid niet meer passend aaneensluiten. Dit laatste kan alleen worden bewerkstelligd wanneer het randlid op de schaalrand krachten (normaal-, schuif- en dwarskrachten) en momenten (buigende en wringende) uitoefent en omgekeerd de schaal op het randlid tegengestelde krachten en momenten, zodanig, dat de daarmee gepaard gaande bijkomende vormveranderingen een volkomen aanpassing mogelijk maken. De berekening van deze randstoringsen, welke op de membraanspanningstoestand moeten worden gesuperponeerd, geschiedt met behulp van de z.g. buigingstheorie van de schaal.

Voor schalen in de vorm van eenvoudige mathematische oppervlakken zoals de bol- en cilinderschaal bestaan reeds vereenvoudigde buigingstheorieën. Door A. L. BOUMA werd een dergelijke theorie toegepast op elliptische en hyperbolische paraboloideschalen begrensd door vier hoofdparabolen.<sup>1)</sup>

Niet ontkend kan worden, dat zelfs deze vereenvoudigde theorieën nog vrij veel rekenwerk vereisen, terwijl voor willekeurige dubbelgekromde schalen of combinaties daarvan al dan niet begrensd door verend doorzakkende en/of verend draaibare randbalken, zoals ze in de moderne architectuur nogal eens worden toegepast, nog geen bruikbare theorie voor de berekening van buigingsstoringen bestaat.

Beschouwt men echter het verloop van het randstoringsmoment vanaf de randen naar het inwendige van het schaaloppervlak, welk verloop zoals bekend is in het algemeen het karakter heeft van een gedempte golf, dan ligt de vraag voor de hand, of in beginsel bij een schaal de orde van grootte van dit randstoringsmoment niet zou kunnen worden berekend met behulp van de theorie van de elastisch ondersteunde ligger. Immers ook hier verlopen de randstoringen volgens gedempte golven. Zo werd door J. W. GECKELER <sup>2)</sup> reeds in 1926 een benaderingsberekening gegeven voor de randstoring bij een bolschaal, die leidt tot de theorie van de elastisch ondersteunde ligger. Voorts heeft K. HRUBAN <sup>3)</sup> in 1953 de randstoringen langs de gebogen randen van een aantal uitgevoerde hyppar-shedschalen eveneens berekend met de theorie van de verend ondersteunde ligger, terwijl door W. S. WLASSOW in 1958 voor de bolschaal en de gelijkzijdige hypparschaal wordt gewezen op de analogie met de elastisch ondersteunde plaat.<sup>4)</sup>

Tenslotte heeft schrijver dezes in verband met het sterkteonderzoek van het Philipspaviljoen op de wereldtentoonstelling te Brussel in 1958, voor de schatting van bepaalde randstoringsmomenten, eveneens een rekenwijze voorgesteld, gebaseerd op de theorie van de elastisch ondersteunde plaat.<sup>5)</sup>

Ongetwijfeld betekent, indien toelaatbaar, de rekenwijze met behulp van de elastisch ondersteunde plaat of ligger een belangrijke vereenvoudiging. Hierdoor wordt immers de differentiaalvergelijking van de 8ste orde waarop de buigingstheorie van de schalen is gebaseerd vervangen door een van de 4e orde, waardoor op eenvoudiger wijze een inzicht is te verkrijgen omtrent de te verwachten randstoringen, hetgeen voor de constructeur van groot belang is.

---

<sup>1)</sup> BOUMA, A. L. Some applications of the bending theory regarding doubly curved shells. Proc. Symposium on Theory of thin elastic Shells (I.U.T.A.M.). North-Holland Publ. Cy, Amsterdam 1960.

<sup>2)</sup> GECKELER, J. W. Ueber die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen, Forschungsarbeiten Ing. wesen, H. 276, Berlin 1926.

<sup>3)</sup> HRUBAN, K. De algemene theorie van zadelvormige schalen (Tsjechisch), T.H. Brno, 1953.

<sup>4)</sup> WLASSOW, W. S. Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik, Akademie-Verlag, Berlin 1958, pp. 330, 372.

<sup>5)</sup> VREEDENBURGH, C. G. J. De hypparschaal en zijn mechanische eigenschappen, Philips Technisch Tijdschrift, No. 5, 1958.

Aan de andere kant is het bij de toepassing van een benaderende rekenwijze noodzakelijk zich terdege rekenschap te geven van de gemaakte verwaarlozingen en veronderstellingen, teneinde te kunnen beoordelen of in een bepaald geval nog bruikbare uitkomsten mogen worden verwacht.

### 1 De dubbelgekromde schaal en de elastisch ondersteunde plaat

Men beschouwe een punt O in het middenvlak van een willekeurige dubbelgekromde schaal en met dit punt als oorsprong een rechthoekig assenkruis XYZ. Het vlak OXY valle samen met het raakvlak in O aan het middenvlak en de as OZ langs de normaal (fig. 1).

Zoals bekend is, kan de vorm van het middenvlak in de onmiddellijke nabijheid van O worden vervangen door een parabolöide, de zogenaamde osculerende parabolöide met de vergelijking:

$$2z = \frac{x^2}{r_x} + \frac{2xy}{r_{xy}} + \frac{y^2}{r_y} \dots \dots \dots (1)$$

of wel:

$$2z = k_x x^2 + 2k_{xy} xy + k_y y^2 \dots \dots \dots (2)$$

In deze vergelijkingen stellen  $r_x$ ,  $r_y$  en  $r_{xy}$  resp. voor de kromtestralen van het middenvlak in O in de  $x$ - en  $y$ -richting en de torsiestraal voor deze richtingen, terwijl  $k_x$ ,  $k_y$  en  $k_{xy}$  resp. de krommingen zijn in de  $x$ - en  $y$ -richting en de verwringing voor deze richtingen.

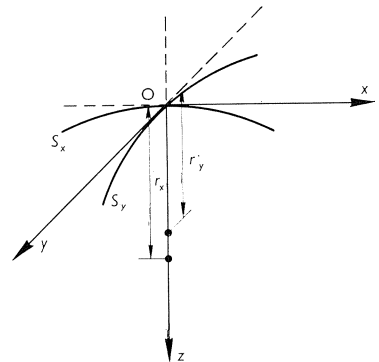


Fig. 1.  $OZ =$  normaal in O van het middenvlak;  $S_x$  en  $S_y =$  normale doorsneden;  $r_x$  en  $r_y =$  kromtestralen in O van  $S_x$  en  $S_y$  (positief als het kromtemiddelpunt een positieve  $z$ -coördinaat heeft).  $u$ ,  $v$  en  $w =$  verplaatsingscomponenten (positief als de verplaatsingen geschieden in de positieve richtingen van de coördinaatassen).

Uit (2) vindt men door differentiatie:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ k_{xy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ k_y &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Voor een schaalementje in O geldt in de  $z$ -richting de evenwichtsvergelijking:

$$n_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + p_z = K\Delta\Delta w \dots \dots \dots (4)$$

Voorts heeft men met  $\nu = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{r_x} = \frac{n_x}{E\delta} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{r_y} = \frac{n_y}{E\delta} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2w \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{n_{xy}}{G\delta} = \frac{2n_{xy}}{E\delta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

of wel:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= E\delta \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] \\ n_y &= E\delta \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] \\ n_{xy} &= E\delta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - w \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

**Lijst van gebruikte notaties.**

- $x, y$  en  $z$             coördinaten van een punt van het middenvlak.
- $u, v$  en  $w$             verplaatsingscomponenten van een punt van het middenvlak resp. in de  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -richting.
- $r_x, r_y$  en  $r_{xy}$         kromtestralen van het middenvlak resp. in de  $x$ - en  $y$ -richting en de torsie-straal voor deze richtingen.
- $\frac{1}{r_x} = k_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{1}{r_y} = k_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$     en  $\frac{1}{r_{xy}} = k_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  :  
krommingen van het middenvlak resp. in de  $x$ - en  $y$ -richting en de verwringing voor deze richtingen [ $l^{-1}$ ].
- $r_1, r_2$                 hoofdkromtestralen van het middenvlak [ $l$ ].
- $k_1 = \frac{1}{r_1}$ ,  $k_2 = \frac{1}{r_2}$     hoofdkrommingen van het middenvlak [ $l^{-1}$ ].
- $n_x, n_y$  en  $n_{xy}$      schaalnormaalkrachten resp. in de  $x$ - en  $y$ -richting en de schaalshuifkracht [ $kl^{-1}$ ].
- $m$                      schaalmoment [ $k$ ].
- $q$                      schaaldwarskracht [ $kl^{-1}$ ].
- $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  en  $\gamma_{xy}$     rekken resp. in de  $x$ - en  $y$ -richting en de afschuiving (verandering van de rechte hoek).
- $E, G$                  elasticiteits- resp. glijdingsmodulus [ $kl^{-2}$ ].
- $\nu$                      coëfficiënt van dwarscontractie.
- $\delta$                      dikte van de schaal [ $l$ ].
- $K = \frac{E \delta^3}{12(1-\nu^2)}$         buigingsstijfheid van de schaal [ $kl$ ].
- $c$                      tegendrukcoëfficiënt van de elastische bedding [ $kl^{-3}$ ].
- $\lambda$                      karakteristieke lengte [ $l$ ].
- $p_z$                     belasting per oppervlakte-eenheid van het middenvlak volgens de normaal [ $kl^{-2}$ ].
- $\bar{p}_z$                     vervormingsbelasting [ $kl^{-2}$ ]
- $\Delta$                      $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Door substitutie van de betrekkingen (6) in (4) vindt men dan met (3):

$$K\Delta\Delta w = p_z + E\delta \left[ k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial v}{\partial y} \right] - E\delta(k_x^2 + 2k_{xy}^2 + k_y^2)w \quad (7)$$

Deze vergelijking geldt in beginsel voor de schaal in de onmiddellijke nabijheid van O. Bij benadering echter ook voor punten van de schaal welke niet te ver van O zijn gelegen. Neemt men voor de begrenzing van dit gebied praktisch een cirkel met O als middelpunt en een straal gelijk aan de helft van de kleinste hoofdkromtestraal in O, dan is de verhouding tussen pijl en koorde van alle normale doorsneden van de osculerende paraboloid kleiner dan  $1/7$ , zodat men als regel ook het overeenkomstige gebied van de schaal als quasi-euclidisch kan aannemen.

Men stelle nu:

$$E\delta \left[ k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \bar{p}_z \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$E\delta(k_x^2 + 2k_{xy}^2 + k_y^2) = c \quad \dots \dots \dots (9)$$

Dan kan verg. (7) worden geschreven:

$$K\Delta\Delta w = p_z + \bar{p}_z - cw \quad \dots \dots \dots (10)$$

In de laatste vergelijking herkent men de differentiaalvergelijking van een vlakke plaat met stijfheid K, opgelegd op een elastische bedding met een tegendrukcoëfficiënt c belast met een reële belasting  $p_z$  en bovendien een bijkomende belasting  $\bar{p}_z$  welke afhankelijk is van de differentiaalquotienten van de verplaatsingscomponenten u en v (d.z. verplaatsingen in het middenvlak van de schaal).

Deze laatste belasting noeme men *vervormingsbelasting*. De waarden van  $\bar{p}_z$  en c zijn invariant, d.w.z. onafhankelijk van een draaiing van het assenstelsel XYZ om de oorsprong O.

Kiest men de assen OX en OY in de hoofdkromterichtingen van het middenvlak in O dan vindt men met  $k_x = k_1$ ,  $k_y = k_2$  en  $k_{xy} = 0$ :

$$\bar{p}_z = E\delta \left[ k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$c = E\delta [k_1^2 + k_2^2] \quad \dots \dots \dots (12)$$

Indien men ook de factor  $\nu$  in rekening brengt worden de betrekkingen (11) en (12):

$$\bar{p}_z = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left[ (k_1 + \nu k_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (k_2 + \nu k_1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$c = \frac{E\delta}{1-\nu^2} [k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2] \quad \dots \dots \dots (14)$$

terwijl de plaatstijfheid in (10) wordt:

$$K = \frac{1}{12} \frac{E\delta^3}{1-\nu^2} \dots \dots \dots (15)$$

Resumerende volgt uit het bovenstaande, dat de verplaatsingen  $w$  volgens de normaal in een punt van een quasi-euclidisch gedeelte van een willekeurige schaal dezelfde zijn als die van een vlakke plaat op elastische bedding, welke aan de randen op overeenkomstige wijze ondersteund is als de schaal. De tegendrukcoëfficiënt van de bedding wordt bepaald door de plaatselijke hoofdkromtestralen en de plaatselijke dikte van de plaat overeenkomstig formule (12) of (14). Behalve de normale belasting  $p_z$  moet echter op de plaat nog een bijkomende (zgn. vervormingsbelasting)  $\bar{p}_z$  volgens de normaal worden aangebracht overeenkomstig formule (11) of (13).

In tegenstelling met de belasting  $p_z$ , die gegeven is, is de vervormingsbelasting in het algemeen niet bekend. Dikwijls kan deze echter, zo niet verwaarloosd, dan toch ongeveer worden bepaald, waarvan straks enige voorbeelden zullen worden gegeven. Uiteraard is het aan te bevelen bij de constructie van een schaal er naar te streven de verplaatsingen  $u$  en  $v$  zo klein mogelijk te houden door toepassing van voldoende stijve randbegrenzingsen van de schaal, zodat in het bijzonder geen rekloze vervormingen optreden,<sup>1)</sup> dan wel door gebruik van juist gekozen voorspanningen.

In sommige gevallen zijn deze verplaatsingen zelfs gelijk nul, b.v. bij een bolschaal of cirkelcilinderschaal onderworpen aan een constante normale belasting en op de in fig. 2 aangegeven wijze ondersteund, zodat randstoringen ontbreken. Een ander voorbeeld waarbij de vervormingsbelasting gelijk nul is vindt men bij

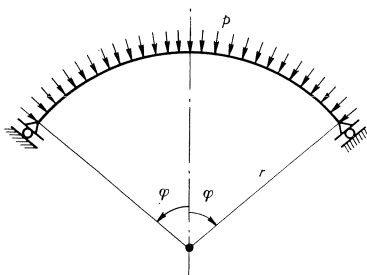


Fig. 2. Bol- c.q. cirkelcilinderschaal gelijkmatig radiaal belast zonder randstoringen.

de axiaalsymmetrisch belaste omwentelingskegel wanneer  $\nu = 0$ . Legt men de  $x$ -as langs een beschrijvende, dan is blijkbaar  $k_1 = 0$  en  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , zodat volgens (13)  $\bar{p}_z = 0$ .

Bijzonder aantrekkelijk wordt de toepassing van de plaatanalogie wanneer de randstoringsmomenten zich beperken tot een viertal stroken langs de

<sup>1)</sup> Zie voor de betekenis van rekloze vervormingen: BOUMA, A. L. Stijfheid en sterkte van schalen, Waltman, Delft 1960.

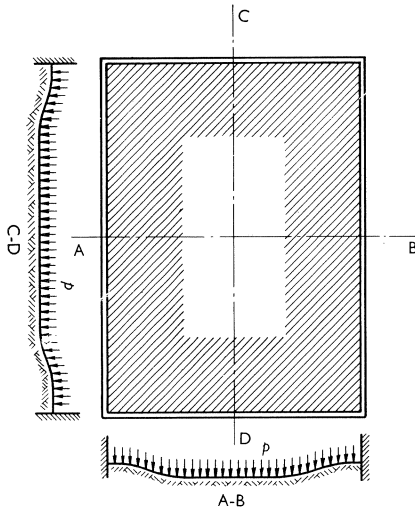


Fig. 3. Hypparschaal begrensd door vier beschrijvende lijnen, gelijkmatig verdeeld belast, beschouwd als elastisch ondersteunde plaat. De randleden worden gevormd door zeer stijve liggers. Het gearceerde oppervlak is het randstoringsgebied. Daarbinnen is de doorbuiging  $w$  van de plaat constant en dus het buigend moment in alle richtingen nul. De breedte van de randstoringsgebieden is maximaal  $4\lambda$ .

randen, zoals in figuur 3 is aangegeven voor een rechthoekige hypparschaal, begrensd door beschrijvende lijnen.

Beschouwt men dan een uit de plaat gesneden ligger loodrecht op de rand en gaande door het storingsvrije gebied, dan kan verg. (10) worden vereenvoudigd tot:

$$K \frac{d^4 w}{dx^4} = p_z + \bar{p}_z - cw \quad \dots \dots \dots (16)$$

wanneer men de  $x$ -richting langs de as van de ligger kiest.

Stelt men in verband met (12):

$$\frac{c}{K} = \frac{4}{\lambda^4} = \frac{E\delta(k_1^2 + k_2^2)}{1/12 E\delta^3}$$

dan krijgt men:

$$\lambda^4 = \frac{\delta^2}{3(k_1^2 + k_2^2)} \quad \dots \dots \dots (17)$$

$$\lambda = \frac{0,76 \sqrt{\delta}}{\sqrt[4]{k_1^2 + k_2^2}} \quad \dots \dots \dots (18)$$

De grootheid  $\lambda$  die bekend is uit de theorie van de ligger op verende bedding en de dimensie van een lengte heeft, noemt men ook wel de karakteristieke lengte. Men kan veelal aannemen dat, afhankelijk van de ondersteuningwijze, de randstoringsgebieden voorbij een strook ter breedte van  $\lambda$  à  $4\lambda$  langs de randen van de schaal praktisch niet meer merkbaar zullen zijn.

## 2 De tegendrukcoëfficiënt $c$

Men beschouwe een cirkelcilindrische schaal met een rechthoek als grondvlak, die over het gehele oppervlak een gelijkmatig verdeelde radiale belasting  $p$  draagt en aan de randen storingsvrij is opgelegd.

De straal van de cirkel zij  $r$  (fig. 2). Daar, zoals reeds gezegd, in dit geval de verplaatsingen  $u$  en  $v$  beide overal nul zijn is de vervormingsbelasting nul. Daar verder de verplaatsing  $w$  constant is, vindt men met (10):

$$w = \frac{p}{c} \quad \dots \dots \dots (19)$$

Met  $k_1 = \frac{1}{r}$  en  $k_2 = 0$  heeft men dan volgens (14):

$$c = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)r^2}$$

zodat tenslotte:

$$w = \frac{(1-\nu^2)pr^2}{E\delta} \quad \dots \dots \dots (20)$$

Deze verplaatsing kan men in dit geval ook rechtstreeks berekenen. De ringdrukspanning in de schaal is nl.:

$$\sigma = \frac{pr}{\delta} \quad \dots \dots \dots (21)$$

Daar in de lengte van de schaal in dit geval de dwarscontractie verhinderd wordt heeft men in de richting van de beschrijvende lijn een drukspanning:

$$\sigma' = \nu\sigma \quad \dots \dots \dots (22)$$

De specifieke verkorting langs de cirkel is dus:

$$\varepsilon = \frac{(1-\nu^2)\sigma}{E} = \frac{(1-\nu^2)pr}{E\delta} \quad \dots \dots \dots (23)$$

Daar deze gelijk is aan  $\frac{w}{r}$  ( $u$  en  $v$  zijn immers = 0) vindt men formule (20) terug.

Men beschouwe thans een bolschaal met cirkelvormig grondvlak, die over het gehele oppervlak een gelijkmatig verdeelde radiale belasting  $p$  draagt. De straal van de bol =  $r$  terwijl de bolschaal aan de rand weer storingsvrij is opgelegd (fig. 2).

Ook in dit geval zullen alle punten van de bol uitsluitend (constante) radiale verplaatsingen  $w$  ondergaan, zodat  $u$  en  $v$  in alle punten nul is en daarmee ook de vervormingsbelasting.

Het is duidelijk, dat de verplaatsing  $w$  weer door formule (19) wordt gegeven, maar de tegendrukcoëfficiënt  $c$  is voor de bol anders dan voor de cirkelcilindrische schaal.



Met  $k_1 = k_2 = \frac{1}{r}$  heeft men nu volgens (14):

$$c = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{2\nu}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right] = \frac{2E\delta}{(1-\nu)r^2}$$

zodat:

$$w = \frac{(1-\nu)pr^2}{2E\delta} \dots \dots \dots (24)$$

Rechtstreeks berekend vindt men:

$$\sigma = \frac{pr}{2\delta} \text{ en } \varepsilon = \frac{(1-\nu)pr}{2E\delta} = \frac{w}{r},$$

d.i. voor  $w$  dezelfde waarde als (24).

Deze eenvoudige berekeningen kunnen als een controle worden beschouwd van de juistheid van formule (14) voor de tegendrukcoëfficiënt  $c$  wanneer de schaal wordt beschouwd als een plaat op verende bedding en de vervormingsbelasting nul is. Daar, zoals dadelijk zal blijken, door het in rekening brengen van de vervormingsbelasting, zowel de werkelijke belasting als de tegendrukcoëfficiënt van de analoge plaat wordt gewijzigd, zal de tegendrukcoëfficiënt volgens (12) of (14), die dus geldt voor een vervormingsbelasting = 0, *primaire* tegendrukcoëfficiënt worden genoemd. De door de vervormingsbelasting gewijzigde coëfficiënt noeme men dan *secundair*.

### 3 De vervormingsbelasting

Men neme een cirkelcilindrische schaal met een lange rechthoek als grondvlak, over het gehele oppervlak gelijkmatig verdeeld belast met een radiale belasting  $p$ . De schaal zij echter nu aan alle randen volkomen ingeklemd. Men kieze de Y-as in de lengterichting van de schaal en de X-as in dwarsrichting (fig. 4).

Het is duidelijk, dat vanaf een voldoende grote afstand van de dwarsrand AB, de randstoring die van deze rand in de Y-richting uitgaat, praktisch zal zijn uitgedempt, zodat hier  $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$  kan worden gesteld. In dit gebied denke men zich in dwarsrichting een strook CD uit de schaal gesneden met de breedte

1. Voor de vervormingsbelasting vindt men dan met  $k_1 = \frac{1}{r}$  en  $k_2 = 0$  in verband met (11):

$$\bar{p}_z = \frac{E\delta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \dots \dots \dots (25)$$

en in verband met de eerste verg. (5):

$$\bar{p}_z = \frac{E\delta}{r} \left[ \frac{n_x}{E\delta} + \frac{w}{r} \right] \dots \dots \dots (26)$$

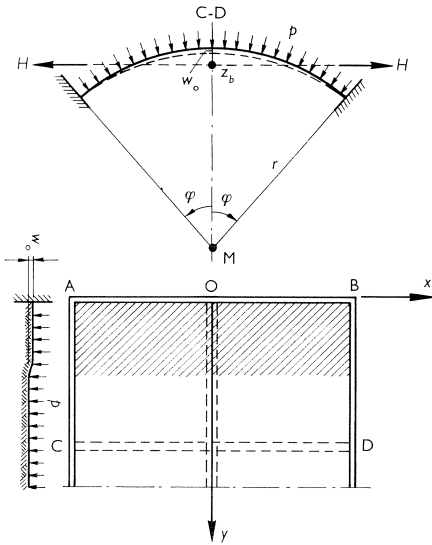


Fig. 4. Lange cilinderische schaal met rechthoekig grondvlak, aan alle randen volkomen ingeklemd en gelijkmatig radiaal belast. Buiten het randstoringsgebied van de korte randen (gearceerd oppervlak) gedraagt een dwars-schijf uit de schaal zich niet meer als een ligger op elastische bedding, maar als een aan beide zijden ingeklemde boog met horizontale treklijn door het buigingszwaartepunt. De oorzaak hiervan ligt in de vervormingsbelasting.

Daar de invloed van de buiging op  $n_x$  hier zeer gering is, kan men  $n_x = -pr$  stellen en wordt verg. (10):

$$K\Delta\Delta w = p - p + \frac{E\delta w}{r^2} - cw$$

hetgeen met

$$c = \frac{E\delta}{r^2} \text{ en } \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ geeft:}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad \dots \dots \dots (27)$$

In dit geval zijn door de vervormingsbelasting zowel de belasting van de analoge plaat als de tegendrukcoëfficiënt beide = 0 geworden en de verplaatsingen  $w$  van de uitgesneden boogstrook CD worden uitsluitend bepaald door een randbelasting in de inklemmingen C en D van een onbelaste ligger. Het is niet moeilijk deze inklemmingsreactie te bepalen. Het is een horizontale trekkracht  $H$  gaande door het buigingszwaartepunt  $Z_b$  van de boog, dat op een afstand  $\frac{r \sin \varphi}{\varphi}$  van het middelpunt  $M$  is gelegen.

De grootte van  $H$  kan met  $\nu = 0$  worden berekend uit de betrekking:

$$H \frac{12r^3}{E\delta^3} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi - \frac{2 \sin^2 \varphi}{\varphi} \right) = \frac{2pr^2}{E\delta} \sin \varphi \quad \dots \dots \dots (28)$$

Is  $H$  bekend, dan kan de verplaatsing  $w_0$  in de top van de boog worden berekend en door beschouwing van een elastisch opgelegde liggerstrook met de as

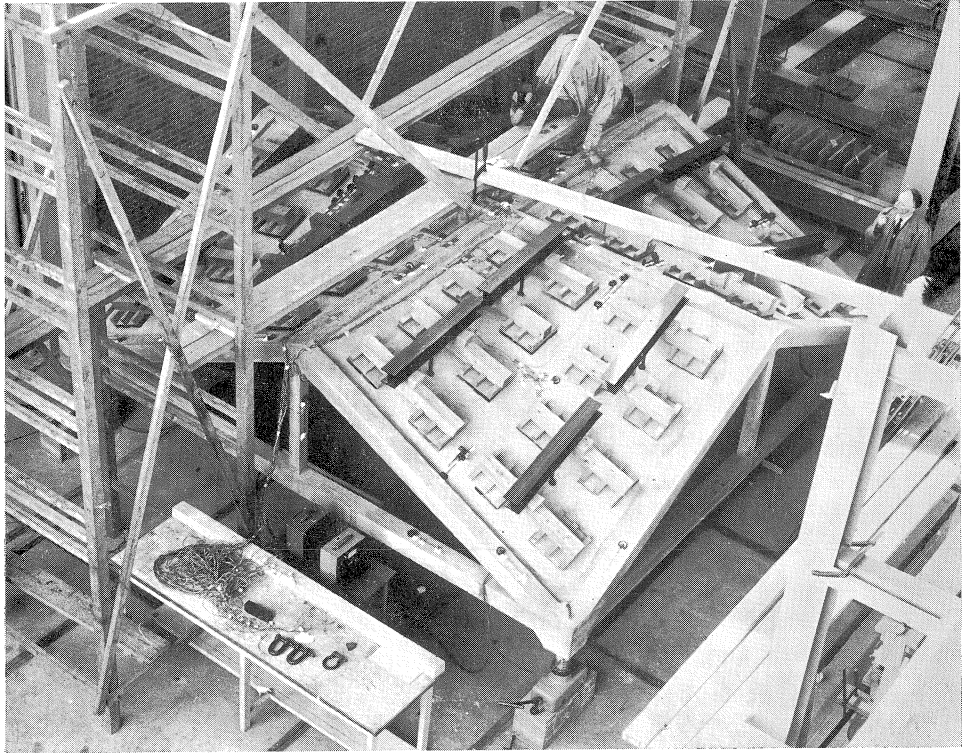


Fig. 5. Overzicht proefopstelling hypparschaal Stevin-laboratorium. Totale afmetingen van het grondvlak van het model  $5 \times 5 \text{ m}^2$ .

langs OY vindt men met  $\lambda = 0,76\sqrt{r\delta}$  volgens (18) voor het schaalmoment en de schaaldwarskracht in O <sup>1)</sup> resp:

$$m_0 = - \frac{E\delta^3 w_0}{6\lambda^2} \dots \dots \dots (29)$$

$$q_0 = \frac{E\delta^3 w_0}{3\lambda^3} \dots \dots \dots (30)$$

Als een interessant geval, waarbij de invloed van de vervormingsbelasting aan de werkelijkheid kon worden getoetst, kan worden genoemd het onderzoek aan een groot model van een hypparschaal, in 1958 in het Stevin-laboratorium door C. VAN DER SCHENK uitgevoerd.<sup>2)</sup> Het betrof hier een stelsel van vier gelijkzijdige hypparschalen, ieder met een kwadratisch grondvlak, door stijve nokbalken aan elkaar verbonden, terwijl ook de hellende randen van stijve liggers waren voorzien (zie fig. 5, 6 en 7).

<sup>1)</sup> Zie ook: Randstoringsen bij axiaalsymmetrisch belaste omwentelingsschalen, IBC-mededelingen, jaargang 6, no. 1, januari 1958.  
<sup>2)</sup> VAN DER SCHENK, C. Onderzoek naar de spanningsverdeling en de sterkte van een hypparschaal, deel II, T.H. Delft, 1958.

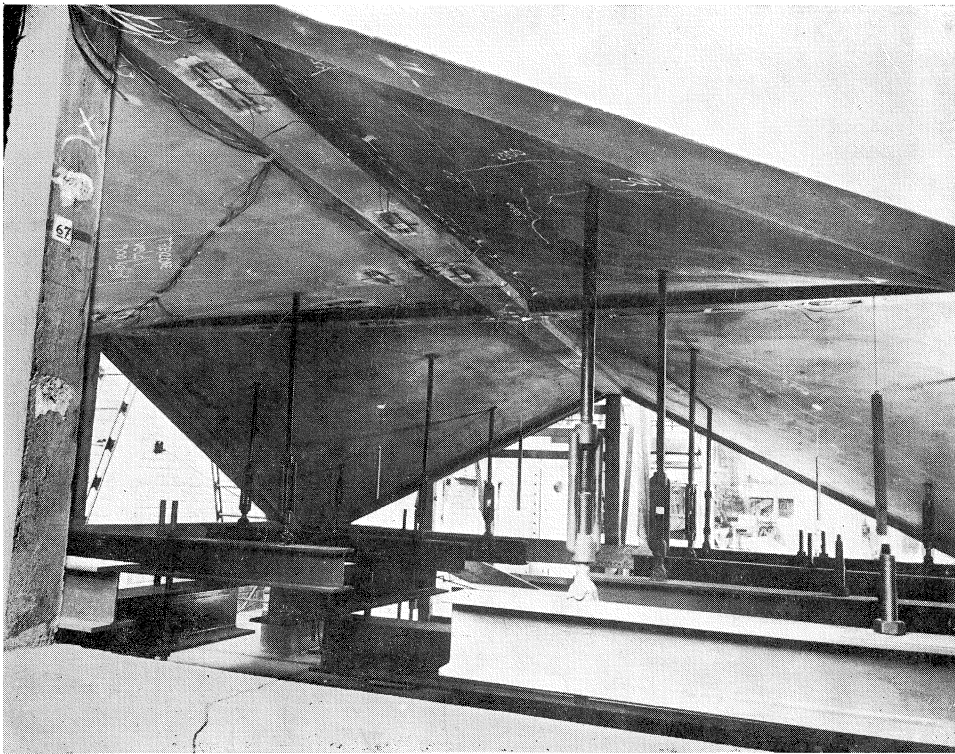


Fig. 6. Onderaanzicht hypparschaal met belastingapparaat. Schaaldikte 3 cm. Doorsnede van de hangers  $10 \times 10 \text{ cm}^2$ , van de andere randleden  $15 \times 15 \text{ cm}^2$ .

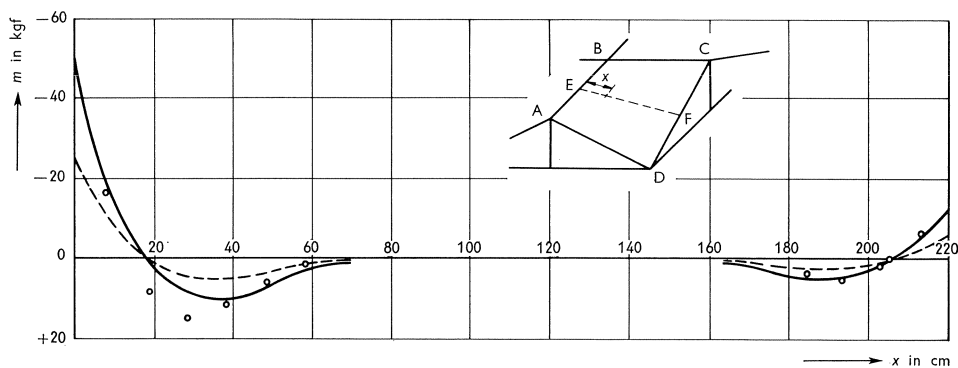


Fig. 7. Hypparschaal van gewapend beton bij gelijkmatige volbelasting van alle vier velden met  $p = 1000 \text{ kgf/m}^2$ ;  $\lambda$  in B = 22,4 cm.

EF beschouwd als ligger op elastische bedding, volkomen ingeklemd in E en verend ingeklemd in F.

- gemeten schaalmomenten
- berekend zonder vervormingsbelasting
- berekend met een vervormingsbelasting gelijk aan  $p$

Beschouwd wordt het geval van een gelijkmatige volbelasting van alle vier velden met  $p = 1000 \text{ kgf/m}^2$ .

Daar in verband met de karakteristieke lengte (22,4 cm in de top) het geval volgens figuur 3 kon worden verwacht, werd de elastisch ondersteunde plaat plaatselijk vervangen door een elastisch ondersteunde ligger. Denkt men zich een liggerstrook met de eenheid van breedte uit het veld ABCD gesneden volgens de beschrijvende lijn EF (fig. 7) dan kan deze ligger in E als volkomen ingeklemd worden beschouwd in de nokbalk. Daarentegen is hij in F in de randbalk verend ingeklemd. Als  $x$  de afstand is van de volkomen inklemming, dan is het verloop van het moment in de elastisch ondersteunde ligger bij een gelijkmatig verdeelde belasting  $p$ , zoals bekend:

$$m_x = -1/2 p \lambda^2 e^{-x/\lambda} \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) \dots \dots \dots (31)$$

Verwaarloost men de vervormingsbelasting dan vindt men met  $p = 0,1 \text{ kgf/cm}^2$  en  $\lambda = 22,4 \text{ cm}$  voor het inklemmingsmoment bij E:  $m_i = -25,1 \text{ kgf}$ . Het maximale positieve moment treedt op bij  $x = \frac{\pi}{2} \lambda$  en bedraagt 5,2 kgf.

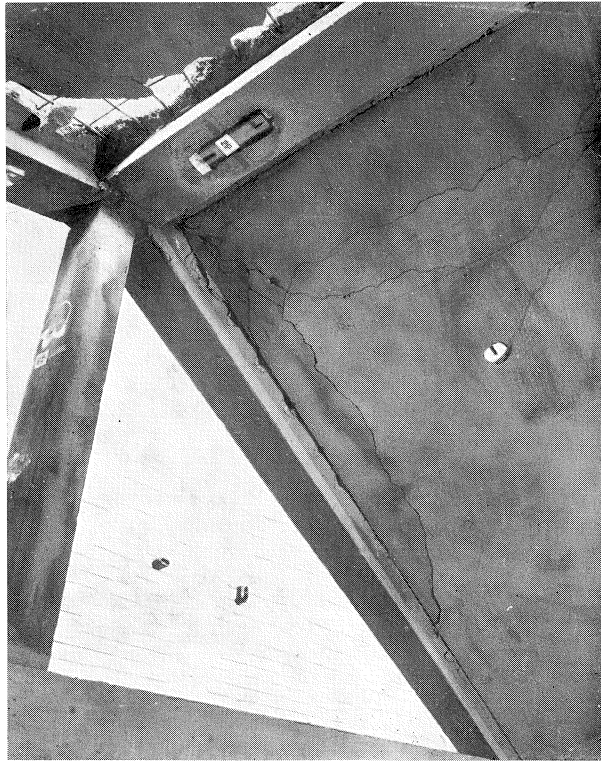
In figuur 7 is met een stippellijn het verloop getekend van de aldus berekende momenten welke van E uitgaan.

Op soortgelijke wijze kunnen ook de momenten worden berekend welke van de verende inklemming bij F uitgaan. Deze zijn eveneens met een stippellijn in figuur 7 aangegeven. Vergelijkt men de met verwaarlozing van de vervormingsbelasting berekende waarden met de werkelijk gemeten momenten (in fig. 7 met cirkelpunten aangegeven) dan ziet men dat het verloop wel vrij goed overeenstemt, maar dat de berekende waarden belangrijk te klein zijn. Rekent men hier, om de invloed van de vervormingsbelasting te verdisconteren, met een werkelijke belasting van de schaal welke twee keer zo groot is (belastingfactor = 2) dan krijgt men de getrokken lijn in figuur 7, welke thans beter overeenstemt met de gemeten waarden. Zoals uit een nader onderzoek is gebleken, kan de orde van grootte van de vervormingsbelasting in het betreffende geval worden verklaard met behulp van de gemeten lengteveranderingen van de randleden, waaruit voor  $\frac{\partial u}{\partial x}$  en  $\frac{\partial v}{\partial y}$  gemiddelde waarden konden worden berekend.

Wat de piekwaarden van de momenten bij E en F betreft kan nog worden opgemerkt, dat deze gewoonlijk niet zo ernstig zijn als het wel lijkt.

In de eerste plaats worden in de praktijk scherpe hoeken altijd min of meer afgeschuind. Verder zal bij overschrijding van de evenredigheidsgrens van het materiaal, zoals bekend is, een spanningspiek worden afgevlakt, terwijl bij ontlasting een residuele spanning van tegengesteld teken ontstaat. Overigens zullen, bij geleidelijke toeneming van de belasting van de hier beschouwde

Fig. 8. Onderaanzicht van een gebroken veld, met ongeveer evenwijdig aan de randen lopende scheuren.



schaal, de eerste scheuren wel optreden langs de randleden. Bij verdere belastingtoeneming zullen deze scheuren dan als lijnscharnieren werken. De elastisch ondersteunde ligger EF (fig. 7) is dan aan beide uiteinden scharnierend bevestigd, waardoor, zoals bekend is, de maximale positieve momenten zullen voor-

komen op afstanden  $\frac{\pi}{4} \lambda$

van de uiteinden. In de

bezwijktoestand moet dan ook hier een tweede stelsel van breuklijnen ontstaan parallel aan de rand-

leden, hetgeen bij de beproeving tot breuk inderdaad ook werd geconstateerd (zie fig. 8).

Van deze wetenschap kan worden gebruik gemaakt voor de berekening van de uiterste draagkracht van de schaal bij volbelasting volgens de breuklijn-

theorie.

Volledigheidshalve moge tenslotte nog worden medegedeeld, dat de betreffende schaal eerst totaal bezweek bij een belasting van ruim 6000 kgf/m<sup>2</sup>!

#### 4 Beschouwing van een diametrale liggerstrook van de cirkelvormige elastisch ondersteunde plaat

Men beschouwe weer een bolschaal met cirkelvormig grondvlak en gelijkmatig verdeeld belast met een belasting  $p$ . De randen zijn echter volkomen ingeklemd. Voor de berekening van de verplaatsingen  $w$  mag men dan bij niet te grote pijl-koordeverhouding van de meridiaandoorsnede, de bolschaal vervangen door een cirkelvormige elastisch ondersteunde vlakke plaat met de straal van het grondvlak (of nog beter met een straal gelijk aan de beschrijvende van de kegel, rakende aan de bolschaal ter plaatse van de grondcirkel),

die aan de omtrek volkomen is ingeklemd. Is de straal van de bol =  $r$ , dan is met verwaarlozing van  $\nu$  volgens (12) de primaire tegendrukcoëfficiënt:

$$c = \frac{2E\delta}{r^2} \dots \dots \dots (32)$$

Wordt deze plaat belast met  $p$  dan kan men hetzij analytisch hetzij experimenteel de verplaatsingen  $w$  en de schaalmomenten vinden.

De vraag rijst, of men ook hier niet kan volstaan met de beschouwing van een diametrale liggerstrook (zie fig. 9).

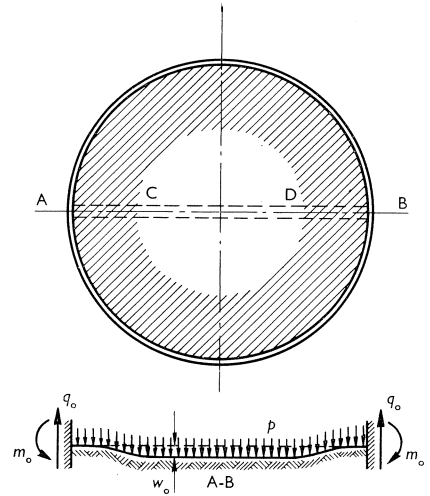


Fig. 9. Bolschaal met cirkelvormig grondvlak beschouwd als een elastisch ondersteunde plaat. De rand is volkomen ingeklemd. Het gearceerde oppervlak is het randstoringsgebied. AB is een liggerstrook uit de plaat gesneden. Als deel van de plaat werken echter aan weerszijden van de liggerstrook over de gedeelten AC en BD nog dwarskrachten en wringende momenten met een ontlastende invloed op de vrije ligger.

Met verwaarlozing van  $\nu$  is de verplaatsing van de bolschaal buiten het randstoringsgebied volgens formule (24):

$$w_0 = \frac{pr^2}{2E\delta}.$$

De vormveranderingsvergelijkingen voor de berekening van de inklemingsreacties  $m_0$  en  $q_0$  van de elastisch ondersteunde ligger met een breedte  $l$  worden dan:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_0\lambda}{EI} &= \frac{q_0\lambda^2}{2EI} \\ \frac{q_0\lambda^3}{2EI} - \frac{m_0\lambda^2}{2EI} &= w_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

Hieruit volgt:

$$m_0 = \frac{2EIw_0}{\lambda^2} \dots \dots \dots (34)$$

$$q_0 = \frac{4EIw_0}{\lambda^3} \dots \dots \dots (35)$$

Met formule (17) vindt men voor de bol:

$$\lambda_b^2 = \frac{\delta r}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \dots \dots \dots (36)$$

en voor de cirkelcilinder met straal  $r$ :

$$\lambda_c^2 = \frac{\delta r}{\sqrt{3}} \dots \dots \dots (37)$$

Bij verwaarlozing van de vervormingsbelasting moet men voor de berekening van het inklemmingsmoment  $m_0$  in formule (34) voor  $\lambda^2$  de waarde  $\lambda_b^2$  volgens (36) substitueren.

Hierbij dient echter te worden opgemerkt, dat door beschouwing van een vrije diametrale liggerstrook uit de cirkelvormige plaat, een te ongunstige krachtsverdeling wordt gevonden, omdat als deel van de gehele cirkelvormige plaat aan weerszijden van de liggerstrook nog dwarskrachten en wringende momenten aanwezig zijn in de randstoringsgebieden AC en BD die ontlastend werken.<sup>1)</sup>

Hierdoor zullen de berekende momenten groter zijn dan de werkelijk optredende. Voorts zal de vervormingsbelasting hier nog een bijkomende vermindering geven.

Substitueert men in formule (34) voor  $\lambda^2$  de waarde  $\lambda_c^2$  volgens (37) die voor de cilinder geldt, dan krijgt men het inklemmingsmoment volgens de benaderingstheorie van GECKELER, dat echter kleiner is dan de juiste waarde.<sup>2)</sup> Men rekent derhalve veiliger, wanneer men met verwaarlozing van de vervormingsbelasting de karakteristieke lengte toepast, welke gebaseerd is op de primaire tegendrukcoëfficiënt van de bol. Dat in de benadering van GECKELER voor de bolschaal de karakteristieke lengte van de omwentelingscilinder voorkomt, kan op de volgende wijze met behulp van de vervormingsbelasting worden verklaard. In verband met axiale symmetrie heeft men nl.:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ en dus } \bar{p} = \frac{E\delta}{r} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{E\delta}{r} \left[ \frac{n_x}{E\delta} + \frac{w}{r} \right] = \frac{n_x}{r} + \frac{E\delta w}{r^2} \dots (38)$$

Met  $\frac{E\delta}{r^2} = 1/2 c$  ( $c$  = primaire tegendrukcoëfficiënt van de bol) en  $\frac{n_x}{r} = -1/2 p$  stellende, hetgeen bij een niet te kleine middelpuntshoek van de bolschaal wel

<sup>1)</sup> In dit verband moge in herinnering worden gebracht, dat b.v. in een cirkelvormige gelijkmatig volbelaste plaat (aan de omtrek vrij opgelegd dan wel volkomen ingeklemd), de momenten in een diametrale liggerstrook als deel van de plaat slechts  $3/8$  bedragen van die in de vrijgemaakte ligger met dezelfde belasting.

<sup>2)</sup> Verg. TIMOSHENKO, S. Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, New-York 1940, pp 472-475. Zie ook HETÉNYI, M. Spherical shells subjected to symmetrical bending, Publ. Int. Ass. Bridge Struct. Eng., 5th Vol. 1937/1938, pp. 173-175.



aanvaardbaar is, wordt dan de differentiaalvergelijking voor een meridiaanstrook:

$$K \frac{d^4 w}{dx^4} = p^{-1/2} p^{+1/2} c w - c w$$

of 
$$K \frac{d^4 w}{dx^4} = {}^{1/2} p^{-1/2} c w \dots \dots \dots (39)$$

Men ziet dat de particuliere oplossing van deze vergelijking  $w_0 = \frac{p}{c} = \frac{p r^2}{2 E \delta}$  blijft, terwijl de tegendrukcoëfficiënt de helft van die van de bol is geworden d.w.z. gelijk is aan die van de omwentelingscilinder.

Ook Wlassow komt bij zijn plaatanalgie van de flauwgekromde bolschaal tot een tegendrukcoëfficiënt gelijk aan die van de omwentelingscilinder, hetgeen evenals bij de rekenwijze van Geckeler blijkbaar alleen juist is voor axiaalsymmetrische belasting.

Men bedenke echter, dat de belasting welke men op de analoge plaat of ligger moet aanbrengen, aanmerkelijk kan verschillen van de werkelijke belasting van de schaal.

Meer algemeen kan men zeggen, dat voor een axiaalsymmetrisch belaste omwentelingschaal met willekeurige meridiaandoorsnede, de secundaire tegendrukcoëfficiënt  $\frac{E \delta}{r_2^2}$  wordt, wanneer  $r_2$  de tweede hoofdkromtestraal voorstelt (lengte normaal tot aan de omwentelingsas).

Met  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  en verwaarlozing van  $v$  volgt nl. uit (11) en (5):

$$\bar{p}_z = E \delta k_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{E \delta}{r_1} \left( \frac{n_1}{E \delta} + \frac{w}{r_1} \right)$$

hetgeen met (10) en (12) geeft:

$$K \Delta \Delta w = p_z + \frac{n_1}{r_1} - \frac{E \delta}{r_2^2} w \dots \dots \dots (40)$$

Wordt  $v$  niet verwaarloosd, dan vindt men:

$$K \Delta \Delta w = p_z + \left( \frac{1}{r_1} + \frac{v}{r_2} \right) n_1 - \frac{E \delta}{r_2^2} w \dots \dots \dots (41)$$

## 5 Conclusies

De beschouwingswijze van de dubbelgekromde schaal als een elastisch ondersteunde plaat heeft veel aantrekkelijks. In zeer gecompliceerde gevallen lijkt zij voorshands de enige wijze voor de construerende ingenieur om de orde van grootte van randstoringsmomenten ongeveer te kunnen schatten.

Men bedenke echter, dat een dubbelgekromde schaal alleen op redelijke wijze door een vlakke plaat kan worden vervangen, wanneer men zich beperkt tot een zgn. quasi-euclidisch gebied, dat is een gebied rondom de oorsprong van het gekozen coördinatenstelsel waar de vlakke meetkunde nog redelijk geldt. Men kan aannemen, dat dit het geval is tot een pijl-koordeverhouding van ca.  $\frac{1}{7}$ . Voor de berekening van de primaire tegendrukcoëfficiënt in een bepaald punt moeten beide hoofdkromtestralen in dat punt in rekening worden gebracht.

Deze tegendrukcoëfficiënt geldt alleen wanneer de vervormingsbelasting nul is of mag worden verwaarloosd. Brengt men de vervormingsbelasting in rekening, dan wordt in het algemeen zowel de werkelijke belasting van de analoge plaat of ligger, als de primaire tegendrukcoëfficiënt beïnvloed. Er ontstaat dan een secundaire tegendrukcoëfficiënt. Bij axiaalsymmetrisch belaste omwentelingsschalen is deze secundaire tegendrukcoëfficiënt alleen afhankelijk van de tweede hoofdkromtestraal, hetgeen in overeenstemming is met de tegendrukcoëfficiënt door GECKELER en Wlassow toegepast. Bij een gelijkmatig volbelaste cilindrische tonschaal met een lange rechthoek als grondvlak en langs alle vier zijden ondersteund, kan de secundaire tegendrukcoëfficiënt voor een schaalstrook in dwarsrichting zelfs nul worden.

De rekenwijze als plaat c.q. ligger op verende bedding schijnt bij bolschalen, hypparschalen begrensd door beschrijvende lijnen en bij elliptische paraboloideschalen met rechthoekig grondvlak<sup>1)</sup> wel tot bruikbare uitkomsten te kunnen leiden.

Mogelijke toepassing in andere gevallen zal nader moeten worden onderzocht, evenals de eventuele toepassing met verwaarlozing van de vervormingsbelasting doch gelijktijdige invoering van geëigende belastingfactoren.

---

<sup>1)</sup> GIRKMAN, K. Flächentragwerke, 5. Auflage, Springer, Wien, 1959, pp. 462–464. Zie ook de publikatie onder noot 1 p. 229 aldaar.